

第 11.1 节 反常积分的概念

1. 讨论下列无穷积分是否收敛？若收敛，则求其值：

$$(1) \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx;$$

$$(2) \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx;$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx;$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)};$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

(5) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$; (6) $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx$;

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(7) \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \sin x dx;$$

$$(8) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

2. 讨论下列瑕积分是否收敛? 若收敛, 则求其值:

$$(1) \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p};$$

$$(2) \int_0^1 \frac{dx}{1-x^2};$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。
加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

$$(3) \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{|x-1|}};$$

$$(4) \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

私聊群主拉进题目辅导会员群。
加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(5) \int_0^1 \ln x dx;$$

$$(6) \int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx;$$

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。

$$(7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}};$$

$$(8) \int_0^1 \frac{dx}{x(\ln x)^p}.$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

3. 举例说明: 瑕积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛时, $\int_a^b f^2(x) dx$ 不一定收敛.

加群: 882056847 或 826633750。

教师qq: 1374599466, 微博: 博硕数学。

加群: 882056847 或 826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq: 1374599466, 微博: 博硕数学。

加群: 882056847 或 826633750。

4. 举例说明: $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛且 f 在 $[a, +\infty)$ 上连续时, 不一定有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

5. 证明:若 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛,且存在极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$,则 $A = 0$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

6. 证明:若 f 在 $[a, +\infty)$ 上可导, 且 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} f'(x) dx$ 都收敛, 则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

第 11.2 节 无穷积分的性质和收敛判别

1. 证明定理 11.2 及其推论 1.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

2. 设 f 与 g 是定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数, 对任何 $u > a$, 它们在 $[a, u]$ 上都可积. 证明: 若 $\int_a^{\infty} f(x) dx$ 与 $\int_a^{\infty} g^2(x) dx$ 收敛, 则 $\int_a^{\infty} f(x)g(x) dx$ 与 $\int_a^{\infty} [f(x) + g(x)]^2 dx$ 也都收敛.

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

3. 设 f, g, h 是定义在 $[a, +\infty)$ 上的三个连续函数, 且成立不等式 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$. 证明:

(1) 若 $\int_a^{+\infty} h(x) dx$ 与 $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ 都收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 也收敛;

(2) 又若 $\int_a^{+\infty} h(x) dx = \int_a^{+\infty} g(x) dx = A$, 则 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = A$.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

4. 讨论下列无穷积分的收敛性:

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}};$$

$$(2) \int_1^{+\infty} \frac{x}{1-e^x} dx;$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{x \arctan x}{1+x^2} dx;$$

加群:882056847或826633750。私聊群主拉群题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

(5) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^n} dx$; (6) $\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx (n, m \geq 0)$.

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。
加群:882056847或826633750。

5. 讨论下列无穷积分为绝对收敛还是条件收敛：

$$(1) \int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{x}}{x} dx;$$

$$(2) \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sgn}(\sin x)}{1+x^2} dx;$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{100+x} dx;$$

$$(4) \int_1^{+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \sin x dx.$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

6. 举例说明: $\int_a^b f(x) dx$ 收敛时 $\int_a^b f^2(x) dx$ 不一定收敛; $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛时, $\int_a^b f^2(x) dx$ 也不一定收敛.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

7. 证明:若 $\int_a^b f(x) dx$ 绝对收敛, 且 $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = 0$, 则 $\int_a^b f^2(x) dx$ 必定收敛.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

8. 证明:若 f 是 $[a, +\infty)$ 上的单调函数,且 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛,则 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$,且 $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow +\infty$.

私聊群主拉入题目辅导会员群。
加群:882056847或826633750。私聊群主拉入题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。
加群:882056847或826633750。

9. 证明:若 f 在 $[a, +\infty)$ 上一致连续,且 $\int_a^{\infty} f(x) dx$ 收敛,则 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

私聊群主拉进题目辅导会员群。

10. 利用狄利克雷判别法证明阿贝尔判别法.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466

微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

第 11.3 节 瑕积分的性质与收敛判别

1. 写出性质 3 的证明.

2. 写出定理 11.6 及其推论 1 的证明.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

3. 讨论下列瑕积分的收敛性:

$$(1) \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2};$$

$$(2) \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx;$$

加群:882056847或826633750
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

$$(3) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} \ln x};$$

$$(4) \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x} dx;$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(5) \int_0^1 \frac{\arctan x}{1-x^2} dx;$$

$$(6) \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos x}{x^m} dx;$$

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博:博硕数学。

加群:882056847或826633750。

$$(7) \int_0^1 \frac{1}{x^a} \sin \frac{1}{x} dx;$$

$$(8) \int_0^{+\infty} e^{-x} \ln x dx.$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

4. 计算下列瑕积分的值(其中 n 为正整数):

(1) $\int_0^1 (\ln x)^n dx$; (2) $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} dx$.

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

5. 证明瑕积分 $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx$ 收敛, 且 $J = -\frac{\pi}{2} \ln 2$. (提示: 利用 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos x) dx$, 并将它们相加.)

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。
教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

6. 利用上题结果, 证明:

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta \ln(\sin \theta) d\theta = -\frac{\pi^2}{2} \ln 2;$$

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。私聊群主拉进题目辅导会员群。

$$(2) \int_0^{\pi} \frac{\theta \sin \theta}{1 - \cos \theta} d\theta = 2\pi \ln 2.$$

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

7. 写出定理 11.7 和 11.8 的证明。

加群:882056847或826633750。

教师qq:1374599466, 微博: 博硕数学。

加群:882056847或826633750。

私聊群主拉进题目辅导会员群。