第 12.1 节 级数的收敛性

1. 证明下列级数的收敛性，并求其和：

(1) $\dfrac{1}{1\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 11}+\dfrac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\dfrac{1}{(5n-4)(5n+1)}+\cdots$;

(2) $\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}\right)+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

加群:882056847或826633750。

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$.

2. 证明：若级数$\sum u_n$发散，$c\neq 0$，则$\sum cu_n$也发散.

3. 设级数$\sum u_n$与$\sum v_n$都发散，试问$\sum(u_n+v_n)$一定发散吗？又若u_n与v_n $(n=1,2,\cdots)$都是非负数，则能得出什么结论？

4. 证明:若数列$\{a_n\}$收敛于a,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})=a_1-a$.

5. 证明：若数列$\{b_n\}$有$\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$，则

(1) 级数$\sum(b_{n+1}-b_n)$发散；

(2) 当$b_n\neq 0$时，级数$\sum\left(\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{1}{b_1}$.

6. 应用第 4,5 题的结果求下列级数的和：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a+n-1)(a+n)}$;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n^2+1)[(n+1)^2+1]}$.

7. 应用柯西准则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{\sin 2^n}{2^n}$；　　(2) $\sum \frac{(-1)^{n-1} n^2}{2n^2+1}$；

(3) $\sum\frac{(-1)^n}{n}$;　　(4) $\sum\frac{1}{\sqrt{n+n^2}}$.

8. 证明级数 $\sum u_n$ 收敛的充要条件是：任给正数 ε，存在某正整数 N，对一切 $n>N$ 总有

$$\left| u_N + u_{N+1} + \cdots + u_n \right| < \varepsilon.$$

9. 举例说明：若级数 $\sum u_n$ 对每个固定的 p 满足条件

$$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0,$$

此级数仍可能不收敛.

10. 设级数 $\sum u_n$ 满足：加括号后级数 $\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_k+1}+\cdots+u_{n_{k+1}})$ 收敛($n_1=0$)，且在同一括号中的 $u_{n_k+1},u_{n_k+2},\cdots,u_{n_{k+1}}$ 符号相同，证明 $\sum u_n$ 亦收敛.

第 12.2 节 正项级数

1. 应用比较原则判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{1}{n^2+a^2}$；

(2) $\sum 2^n \sin \frac{\pi}{3^n}$；

(3) $\sum \frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$;　　　　(4) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$;

(5) $\sum\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$;　　(6) $\sum\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$;

(7) $\sum(\sqrt[n]{a}-1)\ (a>1)$;　　(8) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$;

(9) $\sum\left(a^{\frac{1}{n}}+a^{-\frac{1}{n}}-2\right)$ $(a>0)$；　　(10) $\sum\frac{1}{n^{2n\sin\frac{1}{n}}}$.

2. 用比式判别法或根式判别法鉴定下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{n!}$；　　(2) $\sum \frac{(n+1)!}{10^n}$；

(3) $\sum\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$;

(4) $\sum\frac{n!}{n^n}$;

(5) $\sum \frac{n^2}{2^n}$;

(6) $\sum \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$;

(7) $\sum\left(\frac{b}{a_n}\right)^n$ （其中 $a_n\to a$ $(n\to\infty)$，$a_n,b,a>0$，且 $a\neq b$）.

3. 设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 为正项级数，且存在正数 N_0，对一切 $n>N_0$，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant\frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

证明：若级数 $\sum v_n$ 收敛，则级数 $\sum u_n$ 也收敛；若 $\sum u_n$ 发散，则 $\sum v_n$ 也发散.

4. 设正项级数$\sum a_n$收敛，证明$\sum a_n^2$亦收敛；试问反之是否成立？

5. 设 $a_n \geqslant 0, n=1,2,\cdots$. 且 $\{na_n\}$ 有界，证明 $\sum a_n^2$ 收敛.

6. 设级数 $\sum a_n^2$ 收敛，证明 $\sum \frac{a_n}{n}$ $(a_n>0)$ 也收敛.

7. 设正项级数 $\sum u_n$ 收敛,证明级数 $\sum \sqrt{u_n u_{n+1}}$ 也收敛.

8. 利用级数收敛的必要条件，证明下列等式：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n}{(n!)^2}=0$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!}{a^{n!}}=0\quad(a>1)$.

9. 用积分判别法讨论下列级数的敛散性：

(1) $\sum\dfrac{1}{n^2+1}$；　　(2) $\sum\dfrac{n}{n^2+1}$；

(3) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln(\ln n)}$;　　　(4) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p}(\ln\ln n)^{q}}$.

10. 判别下列级数的敛散性

(1) $\sum\frac{n-\sqrt{n}}{2n-1}$;

(2) $\sum\frac{1}{1+a^n}$ ($a>1$);

(3) $\sum\frac{n\ln n}{2^n}$;

(4) $\sum\frac{n!\,2^n}{n^n}$;

(5) $\sum \frac{n!\,3^n}{n^n}$;

(6) $\sum \frac{1}{3^{\ln n}}$;

(7) $\sum \frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}$ $(x>0)$.

11. 设$\{a_n\}$为递减正项数列,证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与$\sum 2^m a_{2^m}$同时收敛或同时发散.

12. 用拉贝判别法判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}$；　　(2) $\sum \frac{n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$ $(x>0)$.

13. 用根式判别法证明级数 $\sum 2^{-n-(-1)^n}$ 收敛，并说明比式判别法对此级数无效.

14. 求下列极限（其中 $p>1$）：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{(n+1)^p}+\dfrac{1}{(n+2)^p}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^p}\right]$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p^{n+1}}+\frac{1}{p^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{p^{2n}}\right)$.

15. 设 $a_n>0$，证明数列 $\{(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\}$ 与级数 $\sum a_n$ 同时收敛或同时发散.

第 12.3 节 一般项级数

1. 下列级数哪些是绝对收敛，条件收敛或发散的：

(1) $\sum \frac{\sin nx}{n!}$；

(2) $\sum (-1)^n \frac{n}{n+1}$；

(3) $\sum \frac{(-1)^n}{n^{p+\frac{1}{n}}}$;

(4) $\sum (-1)^n \sin \frac{2}{n}$;

(5) $\sum\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)$;

(6) $\sum\frac{(-1)^n\ln(n+1)}{n+1}$;

(7) $\sum(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$;　　　　(8) $\sum n!\left(\frac{x}{n}\right)^n$.

2. 应用阿贝尔判别法或狄利克雷判别法判断下列级数的收敛性：

(1) $\sum \frac{(-1)^n}{n} \frac{x^n}{1+x^n} \quad (x>0)$；

(2) $\sum \frac{\sin nx}{n^\alpha}, x \in (0,2\pi) \quad (\alpha>0)$；

(3) $\sum (-1)^n \frac{\cos^2 n}{n}$.

3. 设 $a_n>0, a_n>a_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. 证明级数

$$\sum(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

是收敛的.

4. 设 p_n, q_n 如(8)式所定义. 证明:若 $\sum u_n$ 条件收敛,则级数 $\sum p_n$ 与 $\sum q_n$ 都是发散的.

5. 写出下列级数的乘积：

(1) $\left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}\right)$；　　(2) $\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\right)$.

6. 证明级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$ 绝对收敛，且它们的乘积等于 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a+b)^n}{n!}$.

7. 重排级数$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$,使它成为发散级数.

8. 证明：级数$\sum\frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$收敛.