第 5.1 倒数的概念

1. 已知直线运动方程为

$$s = 10t + 5t^2,$$

分别令 $\Delta t=1,0.1,0.01$，求从 $t=4$ 至 $t=4+\Delta t$ 这一段时间内运动的平均速度及 $t=4$ 时的瞬时速度.

2. 等速旋转的角速度等于旋转角与对应时间的比，试由此给出变速旋转的角速度的定义.

3. 设 $f(x_0)=0$，$f'(x_0)=4$，试求极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)}{\Delta x}.$$

4. 设$f(x)=\begin{cases} x^2, & x\geqslant 3, \\ ax+b, & x<3, \end{cases}$试确定 a,b 的值，使 f 在 $x=3$ 处可导.

5. 试确定曲线 $y=\ln x$ 上哪些点的切线平行于下列直线：

(1) $y=x-1$；　　(2) $y=2x-3$.

6. 求下列曲线在指定点 P 的切线方程与法线方程：

(1) $y=x^2/4,P(2,1)$；　　(2) $y=\cos x,P(0,1)$.

7. 求下列函数的导函数：

(1) $f(x)=|x|^3$；

(2) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\geqslant 0, \\ 1, & x<0. \end{cases}$

8. 设函数

$$f(x)=\begin{cases} x^m \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases} \quad (m \text{ 为正整数}),$$

试问：(1) m 等于何值时，f 在 $x=0$ 连续；

(2) m 等于何值时，f 在 $x=0$ 可导.

9. 求下列函数的稳定点：

(1) $f(x)=\sin x-\cos x$；

(2) $f(x)=x-\ln x$.

11. 设 $g(0)=g'(0)=0$,

$$f(x)=\begin{cases} g(x)\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$$

$f'(0)$

12. 设 f 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,且对任何 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,都有

$$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2).$$

若 $f'(0)=1$,证明对任何 $x\in\mathbf{R}$,都有

$$f'(x)=f(x).$$

13. 证明:若 $f'(x_0)$ 存在,则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0-\Delta x)}{\Delta x}=2f'(x_0).$$

14. 证明:若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)=f(b)=K$, $f'_+(a)f'_-(b)>0$,则在 (a,b) 内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=K$.

15. 设有一吊桥,其铁链成抛物线形,两端系于相距 100 m 高度相同的支柱上,铁链之最低点在悬点下 10 m 处,求铁链与支柱所成之角.

16. 在曲线 $y=x^3$ 上取一点 P,过 P 的切线与该曲线交于 Q,证明:曲线在 Q 处的切线斜率正好是在 P 处切线斜率的四倍.

17. 设$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$的最大零点为$x_0$. 证明:$f'(x_0)\geqslant 0$.

第 5.2 求导法则

1、求下列函数在指定点的导数:

(1) 设$f(x)=3x^4+2x^3+5$,求$f'(0)$, $f'(1)$;

(2) 设$f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$,求$f'(0)$, $f'(\pi)$;

2. 求下列函数的导数:

(1) $y=3x^2+2$;

(2) $y=\dfrac{1-x^2}{1+x+x^2}$;

(3) $y=x^{n}+nx$;

(4) $y=\frac{x}{m}+\frac{m}{x}+2\sqrt{x}+\frac{2}{\sqrt{x}}$;

(5) $y=x^{3}\log_{3}x$;

(6) $y=e^{x}\cos x$;

(7) $y=(x^{2}+1)(3x-1)(1-x^{3})$;

(8) $y=\frac{\tan x}{x}$;

(9) $y=\frac{x}{1-\cos x}$;

(10) $y=\frac{1+\ln x}{1-\ln x}$;

(11) $y=(\sqrt{x}+1)\arctan x$;

(12) $y=\dfrac{1+x^2}{\sin x+\cos x}$.

3. 求下列函数的导函数：

(1) $y=x\sqrt{1-x^2}$;

(2) $y=(x^2-1)^3$;

(3) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)^3$;

(4) $y=\ln(\ln x)$;

(5) $y=\ln(\sin x)$;

(6) $y=\lg(x^2+x+1)$;

(7) $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^{2}}\right)$;

(8) $y=\ln\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$;

(9) $y=(\sin x+\cos x)^{3}$;

(10) $y=\cos^{3}4x$;

(11) $y=\sin\sqrt{1+x^{2}}$;

(12) $y=(\sin x^{2})^{3}$;

(13) $y=\arcsin\dfrac{1}{x}$;

(14) $y=(\arctan x^{3})^{2}$;

(15) $y=\operatorname{arccot}\frac{1+x}{1-x}$;

(16) $y=\arcsin(\sin^2 x)$;

(17) $y=e^{x+1}$;

(18) $y=2^{\sin x}$;

(19) $y=x^{\sin x}$,

(20) $y=x^{x^x}$;

(21) $y=e^{-x}\sin 2x$;

(22) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

(23) $y=\sin(\sin(\sin x))$;

(24) $y=\sin\left(\frac{x}{\sin\left(\frac{x}{\sin x}\right)}\right)$;

(25) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

(26) $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\arcsin\frac{a\sin x+b}{a+b\sin x}$.

4. 对下列各函数计算 $f'(x)$，$f'(x+1)$，$f'(x-1)$.

(1) $f(x)=x^3$；　　(2) $f(x+1)=x^3$；

(3) $f(x-1)=x^3$.

5. 已知 g 为可导函数，a 为实数，试求下列函数 f 的导数：

(1) $f(x)=g(x+g(a))$；　　(2) $f(x)=g(x+g(x))$；

(3) $f(x)=g(xg(a))$；　　(4) $f(x)=g(xg(x))$.

6. 设 f 为可导函数，证明：若 $x=1$ 时有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f^2(x).$$

则必有 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

7. 定义双曲函数如下：

双曲正弦函数 $\operatorname{sh} x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；双曲余弦函数 $\operatorname{ch} x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$；

双曲正切函数 $\operatorname{th} x=\dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$；双曲余切函数 $\operatorname{coth} x=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$.

证明：

(1) $(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x$；

(2) $(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x$；

(3) $(\operatorname{th} x)'=\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$；

(4) $(\operatorname{coth} x)'=-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

8. 求下列函数的导数：

(1) $y=\operatorname{sh}^3 x$；

(2) $y=\operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$；

(3) $y=\ln(\operatorname{ch} x)$；

(4) $y=\arctan(\operatorname{th} x)$.

9. 以 $\mathrm{sh}^{-1}x,\mathrm{ch}^{-1}x,\mathrm{th}^{-1}x,\mathrm{coth}^{-1}x$ 分别表示各双曲函数的反函数.试求下列函数的导数：

(1) $y=\mathrm{sh}^{-1}x$; (2) $y=\mathrm{ch}^{-1}x$;

(3) $y=\mathrm{th}^{-1}x$; (4) $y=\mathrm{coth}^{-1}x$;

(5) $y=\mathrm{th}^{-1}x-\mathrm{coth}^{-1}\dfrac{1}{x}$; (6) $y=\mathrm{sh}^{-1}(\tan x)$.

第 5.3 高阶导数

1. 求下列由参量方程所确定的导数$\frac{dy}{dx}$：

(1) $\begin{cases} x=\cos^4 t, \\ y=\sin^4 t \end{cases}$ 在 $t=\frac{\pi}{3}$ 处；

(2) $\begin{cases} x=\frac{t}{1+t}, \\ y=\frac{1-t}{1+t} \end{cases}$ 在 $t>0$ 处.

2. 设$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases}$ 求$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\pi}$.

3. 设曲线方程 $x=1-t^2, y=t-t^2$，求它在下列点处的切线方程与法线方程：

(1) $t=1$；　　　　(2) $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. 证明曲线

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t) \end{cases}$$

上任一点的法线到原点距离等于 a.

5. 证明：圆 $r=2a\sin\theta$ $(a>0)$ 上任一点的切线与向径的夹角等于向径的极角.

6. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)$ 的切线与切点向径之间的夹角.

第 5.4 高阶导数

1. 求下列函数在指定点的高阶导数：

(1) $f(x)=3x^3+4x^2-5x-9$，求 $f''(1)$，$f'''(1)$，$f^{(4)}(1)$；

(2) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，求 $f''(0)$，$f''(1)$，$f''(-1)$.

2. 设函数 f 在点 $x=1$ 处二阶可导，证明：若 $f'(1)=0$，$f''(1)=0$，则在 $x=1$ 处有 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x^2)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}f^2(x)$.

3. 求下列函数的高阶导数：

(1) $f(x)=x\ln x$，求 $f''(x)$；　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，求 $f'''(x)$；

(3) $f(x)=\ln(1+x)$，求 $f^{(5)}(x)$；　(4) $f(x)=x^3\mathrm{e}^x$，求 $f^{(10)}(x)$.

3. 求下列函数的高阶导数：

(1) $f(x)=x\ln x$，求 $f''(x)$；　(2) $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$，求 $f'''(x)$；

(3) $f(x)=\ln(1+x)$，求 $f^{(5)}(x)$；　(4) $f(x)=x^3\mathrm{e}^x$，求 $f^{(10)}(x)$.

4. 设 f 为二阶可导函数,求下列各函数的二阶导数:

(1) $y=f(\ln x)$;　　(2) $y=f(x^n)$, $n\in \mathbf{N}_+$;

(3) $y=f(f(x))$.

5. 求下列函数的 n 阶导数:

(1) $y=\ln x$;　　(2) $y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$;

(3) $y=\frac{1}{x(1-x)}$;　　(4) $y=\frac{\ln x}{x}$;

(5) $f(x)=\frac{x^n}{1-x}$;

(6) $y=e^{ax}\sin bx$(a,b 均为实数).

7. 研究函数 $f(x)=|x^3|$ 在 $x=0$ 处的各阶导数.

8. 设函数 $y=f(x)$ 在点 x 三阶可导，且 $f'(x)\neq 0$. 若 $f(x)$ 存在反函数 $x=f^{-1}(y)$，试用 $f'(x)$，$f''(x)$ 以及 $f'''(x)$ 表示 $(f^{-1})'''(y)$.

9. 设 $y=\arctan x$.

(1) 证明它满足方程 $(1+x^2)y''+2xy'=0$；

(2) 求 $y^{(n)}\big|_{x=0}$.

10. 设 $y=\arcsin x$.

(1) 证明它满足方程

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0\ (n\geqslant 0);$$

(2) 求 $y^{(n)}\big|_{x=0}$.

11. 证明函数

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处 n 阶可导且 $f^{(n)}(0)=0$,其中 n 为任意正整数.

第 5.5 微分

1. 若 $x=1$，而 $\Delta x=0.1, 0.01$. 问对于 $y=x^2$，Δy 与 dy 之差分别是多少？

2. 求下列函数的微分：

(1) $y=x+2x^2-\frac{1}{3}x^3+x^4$；

(2) $y=x\ln x-x$；

(3) $y=x^2\cos 2x$；

(4) $y=\frac{x}{1-x^2}$；

(5) $y=e^{ax}\sin bx$;　　(6) $y=\arcsin\sqrt{1-x^2}$.

3. 求下列函数的高阶微分：

(1) 设 $u(x)=\ln x, v(x)=e^x$，求 $d^3(uv), d^3\left(\frac{u}{v}\right)$；

(2) 设 $u(x)=e^{\frac{x}{2}}, v(x)=\cos 2x$，求 $d^3(uv), d^3\left(\frac{u}{v}\right)$.

4. 利用微分求近似值：

(1) $\sqrt[3]{1.02}$；　　(2) $\lg 2.7$；

(3) $\tan 45°10'$；　　(4) $\sqrt{26}$.

5. 为了使计算出球的体积准确到 1%，问度量半径为 r 时允许发生的相对误差至多应多少？

6. 检验一个半径为 2 m，中心角为 55° 的工件面积（图 5-10），现可直接测量其中心角或此角所对的弦长，设量角最大误差为 0.5°，量弦长最大误差为 3 mm，试问用哪一种方法检验的结果较为精确.