14.1 幂级数

1. 求下列幂级数的收敛半径与收敛区域：

(1) $\sum nx^n$；

(2) $\sum \frac{x^n}{n^2 \cdot 2^n}$；

(3) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$；

(4) $\sum r^{n^2}x^n \ (0<r<1)$；

(5) $\sum \frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$；

(6) $\sum \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$；

(5) $\sum \frac{(x-2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$;

(6) $\sum \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$;

(7) $\sum \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;

(8) $\sum \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

2. 应用逐项求导或逐项求积方法求下列幂级数的和函数(应同时指出它们的定义域):

(1) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$;

(2) $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+\cdots+n(n+1)x^n+\cdots$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2x^n$.

3. 证明：设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 当 $|x|<R$ 时收敛，若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1}R^{n+1}$ 也收敛，则

$$\int_0^R f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$$

$\Big($注意：这里不管 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=R$ 是否收敛$\Big)$. 应用这个结果证明：

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = \ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n}.$$

4. 证明：

(1) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{(4n)!}$ 满足方程 $y^{(4)}=y$；

(2) $y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{(n!)^{2}}$ 满足方程 $xy''+y'-y=0$.

5. 证明：设 f 为幂级数(2)在 $(-R,R)$ 上的和函数，若 f 为奇函数，则级数(2)仅出现奇次幂的项，若 f 为偶函数，则(2)仅出现偶次幂的项.

6. 求下列幂级数的收敛域：

（1）$\sum \frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a>0,b>0)$；（2）$\sum \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

7. 证明定理 14.3 并求下列幂级数的收敛半径：

（1）$\sum \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$；

（2）$a+bx+ax^2+bx^3+\cdots$ $(0<a<b)$.

8. 求下列幂级数的收敛半径及其和函数：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n(n+1)(n+2)}$；

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(n-1)^2}{n+1} x^n$（提示：$(n-1)^2 = [(n+1)-2]^2 = (n+1)^2 - 4(n+1) + 4$）.

9. 设 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ 为等差数列（$a_0 \neq 0$）. 试求：

(1) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径；

（2）数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$ 的和数.

14.2 函数的幂级数展开

1. 设函数 f 在区间 (a,b) 上的各阶导数一致有界,即存在正数 M,对一切 $x\in(a,b)$,有

$$|f^{(n)}(x)|\leq M,\quad n=1,2,\cdots.$$

证明:对 (a,b) 上任一点 x 与 x_0 有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\quad(f^{(0)}(x)=f(x),0!=1).$$

2. 利用已知函数的幂级数展开式,求下列函数在 $x=0$ 处的幂级数展开式,并确定它收敛于该函数的区间:

(1) e^{x^2};　　(2) $\dfrac{x^{10}}{1-x}$;

(3) $\dfrac{x}{\sqrt{1-2x}}$;

(4) $\sin^2 x$;

(5) $\dfrac{e^x}{1-x}$;

(6) $\dfrac{x}{1+x-2x^2}$;

(7) $\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}dt$;

(8) $(1+x)e^{-x}$;

(9) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

3. 求下列函数在 $x=1$ 处的泰勒展开式：

(1) $f(x)=3+2x-4x^2+7x^3$；

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$；

(3) $f(x)=\sqrt{x^3}$.

4. 求下列函数的麦克劳林级数展开式：

(1) $\dfrac{x}{(1-x)(1-x^{2})}$；　　(2) $x\arctan x-\ln\sqrt{1+x^{2}}$.

5. 试将 $f(x)=\ln x$ 按 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 的幂展开成幂级数.

加群:882056847或826633750。
教师qq:1374599466，微博：博硕数学。
加群:882056847或826633750。