**1. 求下列函数的偏导数：**

(1) $z=x^2y$; (2) $z=y\cos x$;

(3) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; (4) $z=\ln(x+y^2)$;

(5) $z=e^{xy}$; (6) $z=\arctan\dfrac{y}{x}$;

(7) $z=xye^{\sin(xy)}$;　　　　(8) $u=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}-\frac{x}{z}$;

(9) $u=(xy)^z$;　　.　　(10) $u=x^{y^z}$.

2. 设$f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$,求$f_x(x,1)$.

3. 设$f(x,y)=\begin{cases} y\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0, \end{cases}$

考察函数$f$在原点$(0,0)$的偏导数.

4. 证明函数$z=\sqrt{x^2+y^2}$在点$(0,0)$连续但偏导数不存在.

5. 考察函数$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0, \\ 0, & x^2+y^2=0 \end{cases}$在点$(0,0)$的可微性.

6. 证明函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点(0,0)连续且偏导数存在，但在此点不可微.

7. 证明函数$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$在点(0,0)连续且偏导数存在，但偏导数在点(0,0)不连续，而$f$在点(0,0)可微.

**8. 求下列函数在给定点的全微分：**

**(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$ 在点(0,0)，(1,1)；**

(2) $z=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$在点$(1,0)$,$(0,1)$.

9. 求下列函数的全微分：

(1) $z=y\sin(x+y)$；　　(2) $u=xe^{yz}+e^{-z}+y$.

10. 求曲面$z=\arctan\dfrac{y}{x}$在点$\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$的切平面方程和法线方程.

11. 求曲面 $3x^2+y^2-z^2=27$ 在点(3,1,1)的切平面与法线方程.

12. 在曲面 $z=xy$ 上求一点,使这点的切平面平行于平面 $x+3y+z+9=0$,并写出这切平面方程和法线方程.

13. 计算近似值:

(1) $1.002\times2.003^2\times3.004^3$; (2) $\sin 29°\times\tan 46°$.

14. 设圆台上下底的半径分别为 $R=30$ cm，$r=20$ cm，高 $h=40$ cm. 若 $R,r,h$ 分别增加 3 mm，4 mm，2 mm，求此圆台体积变化的近似值.

15. 证明：若二元函数 $f$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P)$ 上的偏导函数 $f_x$ 与 $f_y$ 有界，则 $f$ 在 $U(P)$ 上连续.

16. 设二元函数 $f$ 在区域 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上连续.

(1) 若在 $\operatorname{int} D$ 内有 $f_x\equiv 0$，试问 $f$ 在 $D$ 上有何特性?

(2) 若在 int $D$ 内有 $f_x=f_y=0$，$f$ 又怎样？

(3) 在(1)的讨论中，关于 $f$ 在 $D$ 上的连续性假设可否省略？长方形区域可否改为任意区域？

17. 试证在原点(0,0)的充分小邻域内，有

$$\arctan\frac{x+y}{1+xy}\approx x+y.$$

18. 求曲面 $z=\frac{x^2+y^2}{4}$ 与平面 $y=4$ 的交线在 $x=2$ 处的切线与 $Ox$ 轴的交角.

19. 试证:(1) 乘积的相对误差限近似于各因子相对误差限之和;

(2) 商的相对误差限近似于分子和分母相对误差限之差.

20. 测得一物体的体积 $V=4.45\ \mathrm{cm}^3$，其绝对误差限为 $0.01\ \mathrm{cm}^3$；又测得重量 $W=30.80$ g，其绝对误差限为 0.01 g. 求由公式 $d=\frac{W}{V}$ 算出的密度 $d$ 的相对误差限和绝对误差限.



17.2 复合函数微分法

1. 求下列复合函数的偏导数或导数：

(1) 设 $z=\arctan(xy)$，$y=e^x$，求 $\frac{dz}{dx}$；

(2) 设 $z=\frac{x^2+y^2}{xy}e^{\frac{x^2+y^2}{xy}}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}$；

(3) 设 $z=x^2+xy+y^2,x=t^2,y=t$，求 $\frac{dz}{dt}$；

(4) 设 $z=x^2\ln y,x=\frac{u}{v},y=3u-2v$，求 $\frac{\partial z}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial v}$；

(5) 设 $u=f(x+y,xy)$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$;

(6) 设 $u=f\left(\frac{x}{y},\frac{y}{z}\right)$,求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}$.

2. 设 $z=(x+y)^{xy}$,求 $\mathrm{d}z$.

3. 设 $z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 $f$ 为可微函数，验证

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{y^2}.$$

5. 设 $f(x,y)$ 可微，证明：在坐标旋转变换

$$x=u\cos\theta-v\sin\theta,\quad y=u\sin\theta+v\cos\theta$$

之下，$(f_x)^2+(f_y)^2$ 是一个形式不变量. 即若

$$g(u,v)=f(u\cos\theta-v\sin\theta,u\sin\theta+v\cos\theta),$$

则必有 $(f_x)^2+(f_y)^2=(g_u)^2+(g_v)^2$（其中旋转角 $\theta$ 是常数）.

6. 设 $f(u)$ 是可微函数，$F(x,t)=f(x+2t)+f(3x-2t)$. 试求：

$F_x(0,0)$ 与 $F_t(0,0)$.

7. 若函数 $u=F(x,y,z)$ 满足恒等式 $F(tx,ty,tz)=t^kF(x,y,z)$ $(t>0)$，则称 $F(x,y,z)$ 为 $k$ 次齐次函数. 试证下述关于齐次函数的欧拉定理：可微函数 $F(x,y,z)$ 为 $k$ 次齐次函数的充要条件是

$$xF_x(x,y,z)+yF_y(x,y,z)+zF_z(x,y,z)=kF(x,y,z).$$

并证明：$z=\dfrac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}-xy$ 为 2 次齐次函数.

8. 设 $f(x,y,z)$ 具有性质 $f(tx,t^ky,t^mz)=t^nf(x,y,z)$ $(t>0)$，证明：

(1) $f(x,y,z)=x^nf\left(1,\dfrac{y}{x^k},\dfrac{z}{x^m}\right)$；

(2) $xf_x(x,y,z)+kyf_y(x,y,z)+mzf_z(x,y,z)=nf(x,y,z)$.

9. 设由行列式表示的函数

$$D(t)=\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ij}(t)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 的导数都存在，证明

$$\frac{\mathrm{d}D(t)}{\mathrm{d}t}=\sum_{k=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{k1}(t) & \cdots & a'_{kn}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

17.3 方向导数与梯度

1. 求函数 $u=xy^2+z^3-xyz$ 在点 $(1,1,2)$ 沿方向 $l$（其方向角分别为 $60°,45°,60°$）的方向导数.

2. 求函数 $u=xyz$ 在点 $A(5,1,2)$ 沿到点 $B(9,4,14)$ 的方向 $\overrightarrow{AB}$ 上的方向导数.

3. 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy-4x+2y-4z$ 在 $A=(0,0,0)$ 及 $B=\left(5,-3,\frac{2}{3}\right)$ 的梯度以及它们的模.

4. 设函数 $u=\ln\left(\frac{1}{r}\right)$，其中，$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}$，求 $u$ 的梯度，并指出在空间哪些点上成立等式 $|\mathrm{grad}\ u|=1$.

5. 设函数 $u=\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$，求它在点 $(a,b,c)$ 的梯度.

6. 证明：

（1）$\mathrm{grad}(u+c)=\mathrm{grad}\ u$（$c$ 为常数）；

(2) $\mathrm{grad}(\alpha u+\beta v)=\alpha\,\mathrm{grad}\,u+\beta\,\mathrm{grad}\,v$（$\alpha,\beta$ 为常数）；

(3) $\mathrm{grad}(uv)=u\,\mathrm{grad}\,v+v\,\mathrm{grad}\,u$；

(4) $\mathrm{grad}f(u)=f'(u)\,\mathrm{grad}\,u$.

7. 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，试求：

(1) $\operatorname{grad} r$;　　　　(2) $\operatorname{grad}\dfrac{1}{r}$.



8. 设 $u=x^2+y^2+z^2-3xyz$，试问在怎样的点集上 $\operatorname{grad} u$ 分别满足：

(1)垂直于 $z$ 轴；

(2)平行于 $z$ 轴；

**(3)恒为零向量.**

9. 设$f(x,y)$可微，$l$是$\mathbf{R}^2$上的一个确定向量. 倘若处处有$f_l(x,y)=0$，试问此函数$f$有何特征？

10. 设$f(x,y)$可微，$l_1$与$l_2$是$\mathbf{R}^2$上的一组线性无关向量. 试证明：若$f_{l_i}(x,y)=0$ $(i=1,2)$，则$f(x,y)=$常数.

## 17.4 泰勒公式与极值问题

**1. 求下列函数的高阶偏导数：**

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$，所有二阶偏导数；

(2) $z=e^x(\cos y+x\sin y)$，所有二阶偏导数；

(3) $z=x\ln(x,y)$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$，$\dfrac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$；

(4) $u=xyze^{x+y+z}$, $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$;

(5) $z=f(xy^2,x^2y)$,所有二阶偏导数;

(6) $u=f(x^2+y^2+z^2)$,所有二阶偏导数;

2. 设 $u=f(x,y)$，$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

3. 设 $u=f(r)$，$r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$，证明：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}=\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}.$$

4. 设 $v=\frac{1}{r}g\left(t-\frac{r}{c}\right)$，$c$ 为常数，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 证明：

$$v_{xx}+v_{yy}+v_{zz}=\frac{1}{c^2}v_{tt}.$$

5. 证明定理 17.8 的推论.

6. 通过对 $F(x,y)=\sin x\cos y$ 施用中值定理,证明对某 $\theta\in(0,1)$,有

$$\frac{3}{4}=\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6}-\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.$$

7. 求下列函数在指定点处的泰勒公式:

(1) $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$ 在点 $(0,0)$(到二阶为止);

(2) $f(x,y)=\dfrac{x}{y}$在点$(1,1)$（到三阶为止）；

(3) $f(x,y)=\ln(1+x+y)$在点$(0,0)$；

(4) $f(x,y)=2x^2-xy-y^2-6x-3y+5$ 在点$(1,-2)$.

8. 求下列函数的极值点：

(1) $z=3axy-x^3-y^3\ (a>0)$；

(2) $z=x^2-xy+y^2-2x+y$；

(3) $z=e^{2x}(x+y^2+2y)$.

**9. 求下列函数在指定范围内的最大值与最小值：**

(1) $z=x^2-y^2$, $\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 4\}$;

(2) $z=x^2-xy+y^2$, $\{(x,y)\mid |x|+|y|\leqslant 1\}$;

(3) $z=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$, $\{(x,y)\mid x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 2\pi\}$.

10. 在已知周长为 $2p$ 的一切三角形中,求出面积为最大的三角形.

11. 在 $xy$ 平面上求一点,使它到三直线 $x=0,y=0$ 及 $x+2y-16=0$ 的距离平方和最小.

12. 已知平面上 $n$ 个点的坐标分别是

$$A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots,A_n(x_n,y_n),$$

试求一点,使它与这 $n$ 个点距离的平方和最小.

13. 证明：函数 $u=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-b)^2}{4a^2t}}$ ($a,b$ 为常数)满足热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

14. 证明：函数 $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ ($a,b$ 为常数)满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

15. 证明：若函数 $u=f(x,y)$ 满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,$$

则函数 $v=f\left(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ 也满足此方程.

16. 设函数 $u=\varphi(x+\psi(y))$，证明

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

17. 设 $f_x$，$f_y$ 和 $f_{yx}$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内存在，$f_{yx}$ 在点 $(x_0,y_0)$ 连续，证明 $f_{xy}(x_0,y_0)$ 也存在，且 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

18. 设 $f_x$，$f_y$ 在点 $(x_0,y_0)$ 的某邻域内存在且在点 $(x_0,y_0)$ 可微，则有

$$f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0).$$

19. 设

$$u=\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}.$$

求：(1) $u_x+u_y+u_z$；(2) $xu_x+yu_y+zu_z$；(3) $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$.

20. 设 $f(x,y,z)=Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Eyz+Fzx$，试按 $h,k,l$ 的正数幂展开 $f(x+h,y+k,z+l)$.