数学奥林匹克小丛书

第三版

初中卷 1

Mathematical Olympiad Series

因式分解技巧

单 墫 著

华东师范大学出版社

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

0 什么是因式分解

在小学里，我们学过整数的因数分解. 由乘法，得

$$3\times 4=12.$$

反过来，12 可以分解：

$$12=3\times 4.$$

当然，4 还可以继续分解为 2×2. 于是得

$$12=3\times 2\times 2.$$

这时 12 已经分解成质因数的乘积了.

同样地，由整式乘法，得

$$(1+2x)(1-x^2)=1+2x-x^2-2x^3.$$

反过来，$1+2x-x^2-2x^3$ 可以分解为两个因式 $1+2x$ 与 $1-x^2$ 的乘积，即

$$1+2x-x^2-2x^3=(1+2x)(1-x^2).$$

$1-x^2$ 还可以继续分解为$(1+x)(1-x)$. 于是

$$1+2x-x^2-2x^3=(1+2x)(1+x)(1-x),$$

这里 x 的一次多项式 $1+2x$、$1+x$、$1-x$ 都不能继续分解，它们是不可约多项式，也就是既约多项式. 所以，$1+2x-x^2-2x^3$ 已经分解成质因式的乘积了.

把一个整式写成几个整式的乘积，称为因式分解. 每一个乘式称为积的因式.

在因式分解中，通常要求各个乘式（因式）都是既约多项式，这样的因式称为质因式.

因式分解的方法，我们将逐一介绍.

1 提公因式

学过因式分解的人爱说:"一提、二代、三分组."

"提"是指"提取公因式". 在因式分解时,首先应当想到的是有没有公因式可提.

几个整式都含有的因式称为它们的公因式.

例如 ma、mb、$-mc$ 都含有因式 m, m 就是它们的公因式.

由乘法分配律,我们知道

$$m(a+b-c)=ma+mb-mc,$$

因此
$$ma+mb-mc=m(a+b-c). \tag{1}$$

这表明(1)式左边三项的公因式 m 可以提取出来,作为整式 $ma+mb-mc$ 的因式. $ma+mb-mc$ 的另一个因式 $a+b-c$ 仍由三项组成,每一项等于 $ma+mb-mc$ 中对应的项除以公因式 m:

$$a=ma\div m,\ b=mb\div m,\ c=mc\div m.$$

1.1 一次提净

例 1 分解因式: $12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2$.

解 $12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2$ 由

$$12a^2x^3、6abx^2y、-15acx^2$$

这三项组成,它们的数系数 12、6、−15 的最大公约数是 3,各项都含有因式 a 和 x^2,所以 $3ax^2$ 是上述三项的公因式,可以提取出来作为 $12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2$ 的因式,即有

$$12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2=3ax^2(4ax+2by-5c).$$

在例 1 中,如果只将因式 $3a$ 或 $3ax$ 提出,那么留下的式子仍有公因式可以提取,这增添了麻烦,不如一次提净为好. 因此,应当先检查数系数,然后再

一个个字母逐一检查，将各项的公因式提出来，使留下的式子没有公因式可以直接提取.

还需注意原式如果由三项组成，那么提取公因式后留下的式子仍由三项组成. 在例 1 中，这三项分别为 $12a^2x^3$、$6abx^2y$、$-15acx^2$ 除以公因式 $3ax^2$ 所得的商. 初学的同学为了防止产生错误，可以采取两点措施：

1. 在提公因式前，先将原式的三项都写成公因式 $3ax^2$ 与另一个式子的积，然后再提取公因式，即

$$\begin{aligned}&12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2\\=&3ax^2\cdot 4ax+3ax^2\cdot 2by+3ax^2\cdot(-5c)\\=&3ax^2\cdot(4ax+2by-5c).\end{aligned}$$

在熟练之后应当省去中间过程，直接写出结果.

2. 用乘法分配律进行验算. 由乘法得出

$$3ax^2(4ax+2by-5c)=12a^2x^3+6abx^2y-15acx^2.$$

1.2 视“多”为一

例 2 分解因式：$2a^2b(x+y)^2(b+c)-6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$.

解 原式由

$$2a^2b(x+y)^2(b+c)、-6a^3b^3(x+y)(b+c)^2$$

这两项组成. 它们的数系数的最大公约数是 2，两项都含有因式 a^2 和 b，而且都含有因式 $x+y$ 与 $b+c$，因此 $2a^2b(x+y)(b+c)$ 是它们的公因式. 于是有

$$\begin{aligned}&2a^2b(x+y)^2(b+c)-6a^3b^3(x+y)(b+c)^2\\=&2a^2b(x+y)(b+c)\cdot(x+y)-2a^2b(x+y)(b+c)\cdot 3ab^2(b+c)\\=&2a^2b(x+y)(b+c)[(x+y)-3ab^2(b+c)]\\=&2a^2b(x+y)(b+c)(x+y-3ab^3-3ab^2c).\end{aligned}$$

在本例中，我们把多项式 $x+y$、$b+c$ 分别整个看成是一个字母，这种观点在因式分解时是很有用的.

1.3 切勿漏 1

例 3 分解因式：$(2x+y)^3-(2x+y)^2+(2x+y)$.

解 我们把多项式 $2x+y$ 看成是一个字母，因此原式由

$$(2x+y)^3、-(2x+y)^2、2x+y$$

这三项组成，$2x+y$ 是这三项的公因式，于是

$$\begin{aligned}&(2x+y)^3-(2x+y)^2+(2x+y)\\=&(2x+y)\cdot(2x+y)^2-(2x+y)\cdot(2x+y)+(2x+y)\cdot 1\\=&(2x+y)[(2x+y)^2-(2x+y)+1].\end{aligned}$$

请注意，中括号内的式子仍由三项组成，千万不要忽略最后一项 1. 在省去中间过程时，尤需加倍留心.

1.4 注意符号

例 4 分解因式：$-3ab(2x+3y)^4+ac(2x+3y)^3-a(2x+3y)$.

解

$$\begin{aligned}&-3ab(2x+3y)^4+ac(2x+3y)^3-a(2x+3y)\\=&a(2x+3y)\cdot(-3b)\cdot(2x+3y)^3+a(2x+3y)\cdot c(2x+3y)^2+\\&a(2x+3y)\cdot(-1)\\=&a(2x+3y)[-3b(2x+3y)^3+c(2x+3y)^2-1].\end{aligned}$$

注意中括号内的最后一项是 -1，千万别漏掉！

本例中，原式的第一项有个因数 -1，它也可以作为因数提取出来，即

$$\begin{aligned}&-3ab(2x+3y)^4+ac(2x+3y)^3-a(2x+3y)\\=&-a(2x+3y)\cdot 3b(2x+3y)^3-a(2x+3y)\cdot(-c)(2x+3y)^2-\\&a(2x+3y)\cdot 1\\=&-a(2x+3y)[3b(2x+3y)^3-c(2x+3y)^2+1].\end{aligned}\tag{2}$$

这样做也是正确的. 但必须注意各项的符号，提出因数 -1 后各项都应改变符号，所以(2)式的中括号内三项的符号恰与原式中相应的三项相反.

1.5 仔细观察

例 5 分解因式：$(2x-3y)(3x-2y)+(2y-3x)(2x+3y)$.

解 初看起来，原式所含的第一项 $(2x-3y)(3x-2y)$ 与第二项 $(2y-3x)(2x+3y)$ 没有公因式，但进一步观察便会发现

$$2y-3x=-(3x-2y),$$

因此 $3x-2y$ 是两项的公因式. 于是有

$$
\begin{aligned}
&(2x-3y)(3x-2y)+(2y-3x)(2x+3y)\\
=&(3x-2y)[(2x-3y)-(2x+3y)]\\
=&-6y(3x-2y).
\end{aligned}
$$

提出公因式后，留下的式子如果可以化简，就应当化简.

1.6 化“分”为整

例 6 分解因式：$3a^3b^2-6a^2b^3+\dfrac{27}{4}ab$.

解 这里的第三项$\dfrac{27}{4}ab$的系数是分数，为了避免分数运算，我们把$\dfrac{1}{4}$先提取出来，这时每项都除以$\dfrac{1}{4}$(也就是乘以 4)，即

$$
\begin{aligned}
&3a^3b^2-6a^2b^3+\frac{27}{4}ab\\
=&\frac{1}{4}(12a^3b^2-24a^2b^3+27ab)\\
=&\frac{3}{4}ab(4a^2b-8ab^2+9).
\end{aligned}
$$

熟练以后可以将以上两步并作一步，“一次提净”.

在提出一个分数因数(它的分母是各项系数的公分母)后，我们总可以使各项系数都化为整数(这个过程实质上就是通分). 并且，还可以假定第一项系数是正整数，否则可用前面说过的方法，把-1作为公因数提出，使第一项系数成为正整数.

小 结

提公因式是因式分解的基本方法之一. 在因式分解时，首先应该想到是否有公因式可提. 在与其他方法配合时，即使开始已经提出公因式，但是经过分组或应用公式后还有可能再出现公因式. 凡有公因式应立即提净. 提公因式时，应注意各项的符号，千万不要漏掉一项.

习 题 1

将以下各式分解因式：

1 $5x^2y-10xyz+5xy$.

2 $a(x-a)+b(a-x)-(x-a)$.

3 $-2x(x+1)+a(x+1)+(x+1)$.

4 $\frac{3}{2}b^{3n-1}+\frac{1}{6}b^{2n-1}$（$n$ 是正整数）.

5 $2(p-1)^2-4q(p-1)$.

6 $mn(m^2+n^2)-n^2(m^2+n^2)$.

7 $(5a-2b)(2m+3p)-(2a-7b)(2m+3p)$.

8 $2(x+y)+6(x+y)^2-4(x+y)^3$.

9 $(x+y)^2(b+c)-(x+y)(b+c)^2$.

10 $6p(x-1)^3-8p^2(x-1)^2-2p(1-x)^2$.

2 应用公式

将乘法公式反过来写就得到因式分解中所用的公式，常见的有七个公式：

(1) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

(2) $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$；

(3) $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$；

(4) $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$；

(5) $a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$；

(6) $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$；

(7) $a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$.

以上公式必须熟记，牢牢掌握各自的特点.

2.1 平 方 差

七个公式中，公式(1)(即平方差公式)应用得最多.

例 1 分解因式：$9(m-n)^2-4(m+n)^2$.

解 原式由两项组成，这两项符号相反，并且

$$9(m-n)^2=[3(m-n)]^2,$$

$$4(m+n)^2=[2(m+n)]^2,$$

因此可以应用公式(1)，得

$$\begin{aligned}&9(m-n)^2-4(m+n)^2\\=&[3(m-n)]^2-[2(m+n)]^2\\=&[3(m-n)+2(m+n)][3(m-n)-2(m+n)] && [\text{应用公式(1)}]\\=&(5m-n)(m-5n). && [\text{合并同类项}]\end{aligned}$$

例 2 分解因式：$75x^6y-12x^2y^5$.

解 $75x^6y-12x^2y^5$

$=3x^2y(25x^4-4y^4)$ ［首先提取公因式］

$=3x^2y[(5x^2)^2-(2y^2)^2]$ ［熟练后这步可以省去］

$=3x^2y(5x^2+2y^2)(5x^2-2y^2).$ ［应用公式(1)］

例 3 分解因式：$-(3a^2-5b^2)^2+(5a^2-3b^2)^2$.

解 $-(3a^2-5b^2)^2+(5a^2-3b^2)^2$

$=(5a^2-3b^2)^2-(3a^2-5b^2)^2$

$=[(5a^2-3b^2)+(3a^2-5b^2)][(5a^2-3b^2)-(3a^2-5b^2)]$

［应用公式(1)］

$=(8a^2-8b^2)(2a^2+2b^2)$ ［合并同类项］

$=16(a^2-b^2)(a^2+b^2)$ ［提公因式］

$=16(a+b)(a-b)(a^2+b^2).$ ［应用公式(1)］

例 3 表明在因式公解中可能需要多次应用公式或提公因式，直到不能继续分解为止.

2.2 立方和与立方差

例 4 分解因式：$9x^5-72x^2y^3$.

解 $9x^5-72x^2y^3$

$=9x^2(x^3-8y^3)$ ［提公因式］

$=9x^2[x^3-(2y)^3]$

$=9x^2(x-2y)(x^2+2xy+4y^2).$ ［应用公式(3)］

例 5 分解因式：a^6+b^6.

解 a^6+b^6

$=(a^2)^3+(b^2)^3$

$=(a^2+b^2)[(a^2)^2-a^2b^2+(b^2)^2]$ ［应用公式(2)］

$=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4).$

公式(2)、(3)中的符号极易搞错，务必引起注意.

2.3 完全平方

例 6 分解因式：$9x^2-24xy+16y^2$.

解　原式由三项组成，第一项 $9x^2=(3x)^2$，第三项 $16y^2=(4y)^2$，而

$$2\cdot 3x\cdot 4y=24xy,$$

与中间一项只差一个符号，因此可以利用公式(5)，得

$$9x^2-24xy+16y^2=(3x-4y)^2.$$

这样的式子称为(完全)平方式. 不是平方式的二次三项式，通常用十字相乘法分解，请参看第 5 单元.

例 7　分解因式：$8a-4a^2-4$.

解　首先把原式“理顺”，也就是将它的各项按字母 a 降幂(或升幂)排列，从而有

$$\begin{aligned}&8a-4a^2-4\\=&-4a^2+8a-4\\=&-4(a^2-2a+1)\qquad\text{[提公因式]}\\=&-4(a-1)^2.\end{aligned}$$

按某个字母降幂排列是一个简单而有用的措施(简单的往往是有用的)，值得注意.

例 8　分解因式：$4a^2+9b^2+9c^2-18bc-12ca+12ab$.

解　我们需要引入一个公式. 由乘法可得

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca,$$

即若干项的和的平方等于各项的平方与每两项乘积的 2 倍的和.

上面的式子可写成

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2.\tag{8}$$

这也是一个因式分解的公式.

联系到例 8 就有

$$\begin{aligned}&4a^2+9b^2+9c^2-18bc-12ca+12ab\\=&(2a)^2+(3b)^2+(-3c)^2+2(3b)(-3c)+2(2a)(-3c)+2(2a)(3b)\\=&(2a+3b-3c)^2.\end{aligned}$$

显然，公式(4)是公式(8)的特殊情况，当 $c=0$ 时，公式(8)就简化成公式(4)，公式(5)也是公式(8)的特殊情况. 另外，在公式(4)中将 b 换为 $-b$，公式(4)就变成公式(5). 不难看出，公式(2)与(3)，(6)与(7)也有同样的关系.

2.4 完全立方

例 9 分解因式：$8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2$.

解 $8x^3+27y^3+36x^2y+54xy^2$

$=8x^3+36x^2y+54xy^2+27y^3$ ［按 x 降幂排列］

$=(2x)^3+3(2x)^2(3y)+3(2x)(3y)^2+(3y)^3$

$=(2x+3y)^3$. ［应用公式(6)］

例 10 分解因式：$729a^6-243a^4+27a^2-1$.

解 $729a^6-243a^4+27a^2-1$

$=(9a^2)^3-3\cdot(9a^2)^2\cdot 1+3\cdot(9a^2)\cdot 1^2-1^3$

$=(9a^2-1)^3$ ［应用公式(7)］

$=(3a+1)^3(3a-1)^3$. ［应用公式(1)］

在应用公式(6)、(7)时，需要判明原式是否符合条件，即它应由四项组成，有两项是立方：a^3 与 b^3(或 $-b^3$)，另两项应当是 $3a^2b$(或 $-3a^2b$) 与 $3ab^2$. 这些要求不太容易满足，因此直接应用公式(6)、(7) 的情况是比较少的. 但是，如果遇到了也不可失之交臂.

相比之下，完全平方式用得较多，人们常常用它来证明一个式子的值是非负的.

2.5 问一知三

例 11 分解因式：a^6-b^6.

解 a^6 可以看成平方： $a^6=(a^3)^2$，

也可以看成立方： $a^6=(a^2)^3$，

于是 a^6-b^6 的分解就有两条路可走.

第一条路是先应用平方差公式：

a^6-b^6

$=(a^3)^2-(b^3)^2$

$=(a^3+b^3)(a^3-b^3)$ ［应用公式(1)］

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$. ［应用公式(2)(3)］

第二条路是从立方差公式入手：

$$\begin{aligned}&a^6-b^6\\=&(a^2)^3-(b^2)^3\\=&(a^2-b^2)(a^4+a^2b^2+b^4)&&[\text{应用公式}(3)]\\=&(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4).&&[\text{应用公式}(1)]\end{aligned}$$

采用两种方法分解，获得的结果应当相同. 因此比较

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

与

$$(a+b)(a-b)(a^4+a^2b^2+b^4),$$

我们知道 $a^4+a^2b^2+b^4$ 不是既约多项式，并且有

$$a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2) \tag{9}$$

及

$$a^6-b^6=(a+b)(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2). \tag{10}$$

于是，从 a^6-b^6 的分解出发，不但得到(10)式，而且知道 $a^4+a^2b^2+b^4$ 不是既约多项式，导出了(9)式，可谓问一知三.

在第 4 单元中，我们还要介绍导出(9)式的另一种方法.

2.6 $2^{1984}+1$ 不是质数

例 12 求证 $2^{1984}+1$ 不是质数.

证明 为了将 $2^{1984}+1$ 分解因数，我们需要知道一个新的公式，即在 n 为正奇数时

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1}). \tag{11}$$

(11)式不难用乘法验证，将右边的两个因式相乘便得到 a^n+b^n.

现在我们有

$$\begin{aligned}&2^{1984}+1\\=&(2^{64})^{31}+1^{31}\\=&(2^{64}+1)(2^{64\times30}-2^{64\times29}+\cdots-2^{64}+1).\end{aligned}$$

$2^{64}+1$ 是 $2^{1984}+1$ 的真因数，它大于 1，小于 $2^{1984}+1$，所以 $2^{1984}+1$ 不是质数.

用这个方法可以证明：当 n 有大于 1 的奇数因数时，2^n+1 不是质数.

与(11)式类似，由乘法可以得到在 n 为正整数时

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}). \qquad (12)$$

这也是一个有用的公式.

例 13 分解因式：$x^5 - 1$.

解 $x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.

公式(3)是公式(12)的特例，公式(2)是公式(11)的特例.

请注意公式(12)对一切正整数 n 成立，而公式(11)的适用范围只是正奇数 n.

小　　结

“一提、二代”中的“代”就是指“应用公式”(代公式). 在这一节介绍了公式(1)～(12)，其中(1)～(7)必须牢记，公式(1)尤为重要. 做题时，应当根据具体情况选用公式.

习　题　2

将以下各式分解因式：

1 $16 - (3a + 2b)^2$.

2 $4y^2 - (2z - x)^2$.

3 $a^4 - b^4$.

4 $-81a^4b^4 + 16c^4$.

5 $20a^3x^3 - 45axy^2$.

6 $(3a^2 - b^2)^2 - (a^2 - 3b^2)^2$.

7 $x^8 - y^8$.

8 $16x^5 - x$.

9 $(5x^2 + 2x - 3)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2$.

10 $32a^3b^3 - 4b^9$.

11 $8a^3b^3c^3 - 1$.

12 $64x^6y^3 + y^{15}$.

13 $x^2(a+b)^2 - 2xy(a^2 - b^2) + y^2(a-b)^2$.

14 $a^{n+2} + 8a^n + 16a^{n-2}$.

15 $9a^2 + x^{2n} + 6a + 2x^n + 6ax^n + 1$.

16 $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$.

17 $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy + 4xz - 12yz$.

18 $(p+q)^3-3(p+q)^2(p-q)+3(p+q)(p-q)^2-(p-q)^3$.

19 $4a^2b^2-(a^2+b^2)^2$.

20 $(a+x)^4-(a-x)^4$.

3 分组分解

整式 $ax-by-bx+ay$ 的四项没有公因式可以提取,也无法直接应用公式,这样的式子需要分组分解.

3.1 三步曲

我们用上面的整式来说明如何分组分解.

例 1 分解因式:$ax-by-bx+ay$.

解

$$\begin{aligned} & ax-by-bx+ay \\ =\ & (ax-bx)+(ay-by) && [\text{分为两组}] \\ =\ & x(a-b)+y(a-b) && [\text{“提”}] \\ =\ & (x+y)(a-b). && [\text{再“提”}] \end{aligned}$$

一般地,分组分解大致分为三步:

1. 将原式的项适当分组;
2. 对每一组进行处理(“提”或“代”);
3. 将经过处理后的每一组当作一项,再采用“提”或“代”进行分解.

一位高明的棋手,在下棋时,决不会只看一步.同样,在进行分组时,不仅要看到第二步,而且要看到第三步.

一个整式的项有许多种分组的方法,初学者往往需要经过尝试才能找到适当的分组方法,但是只要努力实践,多加练习,就会成为有经验的“行家”.

3.2 殊途同归

分组的方法并不是唯一的,对于上面的整式 $ax-by-bx+ay$,也可以采用下面的做法:

$$\begin{aligned}&ax-by-bx+ay\\=&(ax+ay)-(bx+by)\\=&a(x+y)-b(x+y)\\=&(x+y)(a-b).\end{aligned}$$

两种做法的效果是一样的，殊途同归！可以说，一种是按照 x 与 y 来分组（含 x 的项在一组，含 y 的项在另一组）；另一种是按 a 与 b 来分组.

例 2 分解因式：$x^2+ax^2+x+ax-1-a$.

解法一 按字母 x 的幂来分组.

$$\begin{aligned}&x^2+ax^2+x+ax-1-a\\=&(x^2+ax^2)+(x+ax)-(1+a)\\=&x^2(1+a)+x(1+a)-(1+a)\\=&(1+a)(x^2+x-1).\end{aligned}$$

解法二 按字母 a 的幂来分组.

$$\begin{aligned}&x^2+ax^2+x+ax-1-a\\=&(ax^2+ax-a)+(x^2+x-1)\\=&a(x^2+x-1)+(x^2+x-1)\\=&(a+1)(x^2+x-1).\end{aligned}$$

3.3 平均分配

在例 2 中，原式的 6 项是平均分配的，或者分成三组，每组两项；或者分成两组，每组三项.

如果分组的目的是使第二步与第三步都有公因式可提，那么就必须平均分配.

例 3 分解因式：$x^3-2x^2-x+2+x^5-2x^4$.

解 6 项可以分成三组，每组两项. 我们把幂次相近的项放在一起，即

$$\begin{aligned}&x^3-2x^2-x+2+x^5-2x^4\\=&(x^5-2x^4)+(x^3-2x^2)-(x-2)\\=&x^4(x-2)+x^2(x-2)-(x-2)\\=&(x-2)(x^4+x^2-1).\end{aligned}$$

本例也可以将 6 项分为两组，每组三项，即将系数为 1 的放在一组，系数为 -2 的放在另一组. 详细过程请读者自己完成.

例 4 分解因式：$ac^2+bd^2-ad^2-bc^2$.

解

$$
\begin{aligned}
& ac^2+bd^2-ad^2-bc^2 \\
=& (ac^2-ad^2)+(bd^2-bc^2) \\
=& a(c^2-d^2)-b(c^2-d^2) \\
=& (a-b)(c^2-d^2) \\
=& (a-b)(c+d)(c-d).
\end{aligned}
$$

请读者考虑另一种分组分解.

3.4 瞄准公式

如果在第二步或第三步中需要应用乘法公式，那么各组中的项数不一定相等，应当根据公式的特点来确定.

例 5 分解因式：$-1-2x-x^2+y^2$.

解

$$
\begin{aligned}
& -1-2x-x^2+y^2 \\
=& y^2-(x^2+2x+1) \\
=& y^2-(x+1)^2 && [\text{应用公式}(4)] \\
=& (y+x+1)(y-x-1) && [\text{应用公式}(1)]
\end{aligned}
$$

本例是瞄准公式(1)与(4)来分组的.

例 6 分解因式：$ax^3+x+a+1$.

解 根据 a 的幂来分组是可以行得通的，恰好能用上公式(2)，并为下一步提公因式奠好基础.

$$
\begin{aligned}
& ax^3+x+a+1 \\
=& (ax^3+a)+(x+1) \\
=& a(x+1)(x^2-x+1)+(x+1) && [\text{应用公式}(2)] \\
=& (x+1)(ax^2-ax+a+1). && [\text{提公因式}]
\end{aligned}
$$

例 7 分解因式：$x^4+x^3+2x^2+x+1$.

解

$$
\begin{aligned}
& x^4+x^3+2x^2+x+1 \\
=& (x^4+2x^2+1)+(x^3+x) \\
=& (x^2+1)^2+x(x^2+1) && [\text{公式}(4)\text{ 及提公因式}] \\
=& (x^2+1)(x^2+x+1). && [\text{提公因式}]
\end{aligned}
$$

这次是瞄准公式(4)来分组的.

例 8　分解因式：x^3+x^2+x-3.

解

$$\begin{aligned}&x^3+x^2+x-3\\=&(x^3-1)+(x^2-1)+(x-1)\\=&(x-1)(x^2+x+1)+(x-1)(x+1)+(x-1)\\=&(x-1)(x^2+2x+3).\end{aligned}$$

本题将-3分成3个-1，而x^3-1，x^2-1都可以利用公式分解.

3.5　从零开始

如果分组分得不恰当，因式分解无法进行下去，那么就应当回到分组前的状况，从零开始，考虑新的分组.

例 9　分解因式：$x^3+x^2-y^3-y^2$.

解　如果把有x的项集在一起，有y的项集在一起，那么

$$\begin{aligned}&x^3+x^2-y^3-y^2\\=&(x^3+x^2)-(y^3+y^2)\\=&x^2(x+1)-y^2(y+1).\end{aligned}$$

虽然每一组都有公因式可提，但是两组之间却无公因式可提，也没有公式可以利用，分解无法进行下去. 这时，必须从零开始，重新分组.

这一次将次数相同的项放在一起，我们有

$$\begin{aligned}&x^3+x^2-y^3-y^2\\=&(x^3-y^3)+(x^2-y^2)\\=&(x-y)(x^2+xy+y^2)+(x-y)(x+y)\quad[\text{应用公式(1)、(3)}]\\=&(x-y)(x^2+xy+y^2+x+y).\quad[\text{提公因式}]\end{aligned}$$

例 10　分解因式：$ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd$.

解　此式无法直接进行分解，必须先用乘法分配律将原式变为四项，再进行分组.

$$\begin{aligned}&ab(c^2-d^2)-(a^2-b^2)cd\\=&abc^2-abd^2-a^2cd+b^2cd\\=&(abc^2-a^2cd)+(b^2cd-abd^2)\\=&ac(bc-ad)+bd(bc-ad)\\=&(ac+bd)(bc-ad).\end{aligned}$$

从这个例子可以看出，错误的分组还不如不分组. 聪明的人并不是不犯错误的人，而是善于改正错误的人.

小　结

如果“一提、二代”都不能奏效，就应当采用分组分解. 分组分解应依照前面所说的三步进行. 这三步是密切联系的，不仅要看到第二步，而且要看到第三步. 在第二步与第三步都是提取公因式时，各组的项数相等(平均分配). 否则，应当瞄准公式来进行分组. 应当注意，分组需要尝试，失败了，从零开始. 只要反复实践，就能掌握分组的技巧，运用自如.

习　题　3

将以下各式分解因式：

1 $ax-ay+bx+cy-cx-by$.

2 $x^4+x^3+x^2-1$.

3 $a(1-b+b^2)-1+b-b^2$.

4 $4x(a^2+x^2)-a^2-x^2$.

5 $abx^2+bxy-axy-y^2$.

6 $a^2b^3-abc^2d+ab^2cd-c^3d^2$.

7 $32ac^2+15cx^2-48ax^2-10c^3$.

8 $2(x^2-3ab)+x(4a-3b)$.

9 x^3-x+y^3-y.

10 $x^3+y^3+x^2+2xy+y^2$.

11 $4a^2-b^2+c^2-9d^2+4ac+6bd$.

12 $a(1-b)^2-1+2b-b^2$.

13 $x(x+z)-y(y+z)$.

14 $x^3+bx^2+ax+ab$.

15 $acx^3+bcx^2+adx+bd$.

16 $a^4+a^3b-ab^3-b^4$.

17 $a^4-a^3b-ab^3+b^4$.

18 $a^2b^2-a^2-b^2+1$.

19 $x^2y^2-x^2z^2-y^2z^2+z^4$.

20 $x^2y^2z^2-x^2z-y^2z+1$.

21 $x^4+x^3y+xz^3+yz^3$.

22 $(a+b)^2+(a+c)^2-(c+d)^2-(b+d)^2$.

23 $ax(y^3+b^3)+by(bx^2+a^2y)$.

24 $(a+b)^3+(b+c)^3+(c+a)^3+a^3+b^3+c^3$.

4 拆项与添项

为便于进行分组分解,常常将一项(或若干项)拆为两项(或几项)的和.

4.1 拆开中项

前面已经说过,在分组分解时,常常将项数平均分配.但是,像 x^4-4x+3 这样的式子,只有三项,怎么能平均分成两组呢?方法是先将一项拆为两项.如果这个整式是按某一字母的升幂或降幂排列的,那么以拆开中项为宜.

例 1 分解因式:x^4-4x+3.

解

$$\begin{aligned}&x^4-4x+3\\=&x^4-x-3x+3\\=&(x^4-x)-(3x-3)\\=&x(x-1)(x^2+x+1)-3(x-1)\\=&(x-1)(x^3+x^2+x-3).\\=&(x-1)^2(x^2+2x+3)\quad(\text{利用 3.4 节的例 8})\end{aligned}$$

本题还有其他解法.如

$$\begin{aligned}&x^4-4x+3\\=&x^4-2x^2+1+2(x^2-2x+1)\\=&(x^2-1)^2+2(x-1)^2\\=&(x-1)^2[(x+1)^2+2]\\=&(x-1)^2(x^2+2x+3).\end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned}&x^4-4x+3\\=&x^4+4x^2+4-(4x^2+4x+1)\\=&(x^2+2)^2-(2x+1)^2\\=&(x^2+2x+3)(x^2-2x+1)\\=&(x-1)^2(x^2+2x+3).\end{aligned}$$

例 2 分解因式：$1+(b-a^2)x^2-abx^3$.

解
$$\begin{aligned}&1+(b-a^2)x^2-abx^3\\=&(1-a^2x^2)+(bx^2-abx^3)\\=&(1+ax)(1-ax)+bx^2(1-ax)\\=&(1-ax)(1+ax+bx^2).\end{aligned}$$

在这两个例子中，都有一个因式是 x 的一次多项式. 第 8 单元将讨论求一次因式的一般方法.

4.2 皆大欢喜

拆项的目的无非是在适当分组后使得每一组都可以“提”或“代”（同时，组与组之间也可以“提”或“代”）. 因此，有时也不一定都是拆开中项.

例 3 分解因式：$a^3+3a^2+3a+b^3+3b^2+3b+2$.

解 前三项比完全立方公式少 1，四、五、六项的和也比立方公式少 1. 如果把 2 拆为两个 1，那么就可以使两组都成为完全立方，皆大欢喜. 于是

$$\begin{aligned}&a^3+3a^2+3a+b^3+3b^2+3b+2\\=&(a^3+3a^2+3a+1)+(b^3+3b^2+3b+1)\\=&(a+1)^3+(b+1)^3\\=&(a+b+2)[(a+1)^2-(a+1)(b+1)+(b+1)^2]\\=&(a+b+2)(a^2-ab+b^2+a+b+1).\end{aligned}$$

4.3 旧事重提

例 4 分解因式：$a^4+a^2b^2+b^4$.

解 在第 2 单元中，我们已经巧妙地导出了这个多项式的因式分解（例 11 中得到的公式(9)）. 现在，我们用拆项的方法来导出公式(9).

首先注意 $a^4+2a^2b^2+b^4$ 是完全平方，为了把 $a^4+a^2b^2+b^4$ 配成完全平方，就得把 a^2b^2 拆成两项的（代数）和，即 $a^2b^2=2a^2b^2-a^2b^2$，于是

$$\begin{aligned}&a^4+a^2b^2+b^4\\=&(a^4+2a^2b^2+b^4)-a^2b^2\\=&(a^2+b^2)^2-(ab)^2\\=&(a^2+ab+b^2)(a^2-ab+b^2).\end{aligned}$$

这种配平方的做法用途很多,后面习题中有不少类似的问题供读者练习.

4.4 无中生有

例 5 证明:在 m、n 都是大于 1 的整数时,m^4+4n^4 是合数.

解 这个问题的实质是将 m^4+4n^4 因式分解,我们仍然采用例 4 中的配方法. 可是,m^4+4n^4 只有两项,所以,要配成完全平方就得在中间添上一项 $4m^2n^2$,然后在后面再减去 $4m^2n^2$,即

$$\begin{aligned}&m^4+4n^4\\=&m^4+4m^2n^2+4n^4-4m^2n^2\\=&(m^2+2n^2)^2-(2mn)^2\\=&(m^2+2n^2+2mn)(m^2+2n^2-2mn).\end{aligned}$$

由于在 m、n 都大于 1 时,两个因数中较小的那一个

$$m^2+2n^2-2mn=(m-n)^2+n^2\geqslant n^2>1,$$

即两个因数都是 m^4+4n^4 的真因数,所以 m^4+4n^4 是合数.

这里先添上 $4m^2n^2$,然后再减去 $4m^2n^2$,可以看成是把 0 拆成 $4m^2n^2$ 与 $-4m^2n^2$ 之和. 这种“无中生有”的做法也是常用的.

4.5 配成平方

例 6 分解因式:$-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2$.

解 先把原式写成

$$-(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2),$$

括号中的式子首项系数是正的,这个式子不是完全平方式,但只要改变后三项中任一项的符号,比如说将$-2a^2b^2$ 改为 $2a^2b^2$,那么由公式(8)可得

$$a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2=(a^2+b^2-c^2)^2.$$

所以为了配成平方,应当将 $-2a^2b^2$ 拆为 $2a^2b^2-4a^2b^2$,这时

$$\begin{aligned}&-a^4-b^4-c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2c^2a^2\\=&-(a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2)\\=&-(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2c^2a^2-4a^2b^2)\\=&-[(a^2+b^2-c^2)^2-(2ab)^2]\end{aligned}$$

$$=-(a^2+b^2-c^2+2ab)(a^2+b^2-c^2-2ab)$$
$$=-[(a+b)^2-c^2][(a-b)^2-c^2]$$
$$=-(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)$$
$$=(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a).$$

这个例子中多次应用公式，特别是公式(1).

注：由几何可以知道，如果一个三角形的三条边的长分别为 a、b、c，那么三角形的面积

$$\triangle=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 是周长的一半. 例 6 中的整式实际上是 $16\triangle^2$.

小　　结

为了分组分解，常常采用拆项和添项的方法，使得分成的每一组都有公因式可提或者可以应用公式. 对于按某一字母降幂排列的三项式，拆开中项是最常见的. 配完全平方的时候，往往需要添上一个适当的项或者将某一项适当改变，然后再应用公式(1)分解.

习　题　4

将以下各式分解因式：

1 x^4-3x^2+1.

2 $x^4-7x^2y^2+81y^4$.

3 x^4-23x^2+1.

4 $-14x^2y^2+x^4+y^4$.

5 x^8+x^4+1.

6 x^4-47x^2+1.

7 $x^{12}-3x^6+1$.

8 $x^3(a+1)-xy(x-y)(a-b)+y^3(b+1)$.

9 $x^2-y^2+2x+6y-8$.

10 x^4+2^6.

11 $1-2ax-(c-a^2)x^2+acx^3$.

12 $2x^3-4x^2y-x^2z+2xy^2+2xyz-y^2z$.

5 十字相乘

对于二次三项式 ax^2+bx+c 的因式分解,最简单最有效的方法是十字相乘.

5.1 知己知彼

通常是老师编题,学生解题. 其实,学生也可以编题. 既会编题又会解题,那可真是“知己知彼,百战不殆”了.

因式分解的题很容易编. 比如说,取两个一次多项式 $x+2$ 与 $x+3$ 相乘,排竖式

$$\begin{array}{r} x+2 \\ \times\qquad x+3 \\ \hline 3x+6 \\ x^2+2x \\ \hline x^2+5x+6 \end{array}$$

得积为 x^2+5x+6,那么就可以编一道题:

例 1 分解因式:x^2+5x+6.

编题的人早已心中有数:

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3). \tag{1}$$

解题的人解起来要费点神,关键是怎么求出 2 与 3 这两个数.

请看上面的竖式乘法,我们有

$$2\times3=6,\ 2+3=5(2x+3x=5x),$$

即 2、3 这两个数的积是 6,和是 5.

因此,可以把 6 分解因数,得到 2 与 3. 当然,6 还有其他的分解,比如说 $6=1\times6$ 或 $(-2)\times(-3)$ 或 $(-1)\times(-6)$,但是,其中只有 2 与 3 的和为 5,所以结果是(1)式.

图书在版编目(CIP)数据

因式分解技巧/单墫著. —3版. —上海：华东师范大学出版社，2019
（数学奥林匹克小丛书：第三版. 初中卷）
ISBN 978-7-5675-9734-1

Ⅰ. ①因… Ⅱ. ①单… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第213924号

数学奥林匹克小丛书（第三版）·初中卷

因式分解技巧(第三版)

著　　者　单　墫
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　8.25
字　　数　149千字
版　　次　2020年4月第三版
印　　次　2020年4月第一次
印　　数　1—46 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9734-1
定　　价　21.00元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206

2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422

3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244

4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349

5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454

6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。