数学奥林匹克小丛书

第三版

初中卷 2

Mathematical Olympiad Series

方程与方程组

葛 军 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样，是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中，数学竞赛的历史最悠久、国际性强，影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛，当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动，并组织出版了一系列青少年数学读物，激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克，多次获得团体总分第一，并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克，这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位，为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明，凡是开展好的地区和单位，都能大大激发学生的学习数学的兴趣，有利于培养创造性思维，提高学生的学习效率.这项竞赛活动，将健康的竞争机制引进数学教学过程中，有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者，既有扎实广泛的数学基础，又有刻苦钻研、科学的学习方法，其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国，数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者；在波兰，著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者；在匈牙利，著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家，产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在IMO获得奖牌的学生中，日后有不少成为大数学家.例如，获菲尔兹奖的数学家有：玛古利斯(G. Margulis，俄罗斯，1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld，乌克兰，1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz，法国，1994年)、博切尔兹(R. Borcherds，英国，1998年)、高尔斯(T. Gowers，英国，1998年)、拉福格(L. Lafforgue，法国，2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman，俄罗斯，2006年)、陶哲轩(Terence Tao，澳大利亚，2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo，越南，2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss，以色列，2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov，俄罗斯，2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani，女，伊朗，2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 看 a 与 1

To see a world in a grain of sand,
And a heaven in a wild flower;
Hold infinity in the palm of your hand,
And eternity in an hour.
从一粒细沙俯察世界,
从一朵野花仰观苍穹;
用你的掌心把握无穷,
在一小时内留驻恒永.

——布莱克
《天真的预言》(Auguries of Innocence)

大多数人总会认为如下的问题:

字母 a 表示什么?

数字 1 是什么?

都是极为平凡的问题.

可是,你再仔细瞧端详,用脑想一想,感觉不那么简单,而且想来很有趣,难道不是吗?!

字母 a 表示什么呢? 转换你看问题的角度,用 a“丈量”你学习的足迹,发现 a 真的很丰富很生动.

你会说,a 是 26 个英文字母表中排第一的字母;a 可以代表正整数,可以代表分数,代表无理数、实数……a 还可以代表一个算术算式,一个多项式如 $x-2$, x^2+3x-2,代表分式如$\frac{1}{x-3}$,代表无理式如$\sqrt{x^2-2}$……a 还可以代表一个几何图形及其周长与面积……

你想 a 是什么,它就是什么.

由此可以明白，a 可表示单数“一”，也包含着“all”. 因此，你看 a，不能仅仅看成是一个“一”，而是要看到“一切”.

其实，我们每个人都容易拥有一切，只需用你的眼光. 但是，我们常常把自己框限于一个小小天地里，因此就会感觉到学得不够灵活，不够轻松.

让我们从现在开始，转换观念，由“一”想及“一切”，则你必胜于“千里之外”，不战而胜，且“胜于无形”之中.

说到数 1，与以上的认识一样，它也预示着“看我 1，不起眼，我却可以代表一切”.

读者在阅读这本小册子时，首先要做的，就是你要拥有眼光：“看 a 不是 a”，“看 1 不是 1”. 看“a”应认为是你曾经的所有. 能做到吗？亲爱的读者们.

习 题 1

试举几个具体例子，运用上述理念来进一步认识这些例子，并谈谈你自己的感受.

我思，故我在.

——笛卡儿

2 一元一次方程的求解

受过数学训练的人，应当比没有受过数学训练的人聪明一些，效率更高一些.

——单墫（摘自《解题研究》）

让我们一起来玩列式游戏吧！

将数 2 和 3、字母 x，用等号"＝"及四则运算符号"＋、－、×、÷"中一个连接起来，可以得到哪些式子？

相信你可以写出很多个式子.

由前一讲"a 与 1"的理解，你可以将它们归为四类，一类式子是形如 $x=a\pm b$，$x=a\times b$，$x=a\div b$，这一类式子可以直接利用算术计算得 x 的结果；第二类式子形如 $x+b=c$；第三类式子形如 $ax=c\ (a\neq 0)$；第四类式子形如 $\dfrac{a}{x}=c$.

对于式子 $x+b=c$，可以用加法与减法互为逆运算来计算，若一个数加上数 b 等于数 c，则这个数等于 c 减去 b，即 $x=c-b$. 当我们用未知数 x 来认识等式 $x+b=c$ 时，就称为一元一次方程 $x+b=c$，上述运算过程，又可以看作是将方程中的项 b 从等号的左边移至右边且改变符号，使含未知数 x 的项在等号的左边，已知数的式子在等号的右边. 这个过程，在解方程中叫做移项，得 $x=c+(-b)$，即方程 $x+b=c$ 的解为 $x=c-b$.

对于 $ax=c$，在 $a\neq 0$ 的条件下，利用乘除互逆运算关系得 $x=c\times\left(\dfrac{1}{a}\right)$，即 $x=\dfrac{c}{a}$. 从方程的角度可以将上述过程看作是方程两边同除以 $a(a\neq 0)$，得 $x=\dfrac{c}{a}$，即方程 $ax=c\ (a\neq 0)$ 的解为 $x=\dfrac{c}{a}$. 同样地，对于第四类式子 $\dfrac{a}{x}=c$，先在两边同乘以 x，得 $a=cx$，化为第三类式子从而求得 $x=\dfrac{a}{c}$.

至此,我们会解方程 $ax=c\ (a\neq 0)$ 和 $x+b=c$ 了,如方程 $2x=\frac{1}{3}$ 和 $x-3=1$ 的解就容易得到了,前者在方程两边同时除以 2,后者把 -3 移到等号右边,则这两个方程的解分别为 $x=\frac{1}{6}$, $x=4$.

再回首.多看一眼 $ax=c$,可以认识到 $ax+0=c$;多看一眼 $x+b=c$,可以认识到 $1\cdot x+b=c$.据此,你自然想问若将"0"换为数 b,将"1"换为 a 得到形如 $ax+b=c$ 的方程可以求解吗?

例如,方程 $3x-5=4$ 如何求解呢?

必然地想到利用解形如方程 $ax=c$, $x+b=c$ 的基本解法.

首先,将 -5 改变符号后,移至等号右边,得 $3x=4+5$,即 $3x=9$.

其次在方程 $3x=9$ 的两边同时除以 3,得 $x=3$.

将 $x=3$ 代入原方程,验算知等式成立.(这一步在解多项式方程时可以略去,但在解分式方程时需将求得结果代回到原方程验算等式是否成立.这一步骤又称为检验).

所以,方程 $3x-5=4$ 的解为 $x=3$.

因此,我们又会解方程 $ax+b=c\ (a\neq 0)$ 了.

尝试总结解方程 $ax+b=c$ 的步骤,并思考在解方程 $ax+b=c\ (a\neq 0)$ 时是否还可先两边同除 a,然后再移项呢?

例 1 解方程 $\frac{1}{2}x+5=1$.

解法 1 移项得 $\frac{1}{2}x=1-5$,即 $\frac{1}{2}x=-4$.

两边同除 $\frac{1}{2}$,得 $x=(-4)\times 2$,即 $x=-8$.

故原方程的解为 $x=-8$.

解法 2 方程两边同除 $\frac{1}{2}$,得

$$x+5\times 2=1\times 2,$$

即 $x+10=2$,移项得 $x=2-10$,即 $x=-8$.

故原方程的解为 $x=-8$.

说明 上述两个基本解法可根据实际选用.

例 2 解方程 $3(x+2)-\frac{1}{3}(x-2)=4$.

基本思路 例 2 的方程与例 1 相比要复杂得多,因为它需要通过代数式

的运算(合并同类项)将其转化为形如 $ax+b=c$ 或 $ax=c$ 的形式. 因此首先要化简.

解 方程可化为

$$3x+3\times 2-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\times 2=4,$$

合并同类项,得 $\left(3-\frac{1}{3}\right)x+\left(3\times 2+\frac{1}{3}\times 2\right)=4,$

即
$$\frac{8}{3}x+\frac{20}{3}=4,$$

两边通分,得 $8x+20=4\times 3$,即 $8x+20=12$.

移项得 $8x=-8$.

两边同除 8,得 $x=-1$.

故原方程的解为 $x=-1$.

说明 通过解例 2,你能总结出解类似于例 2 的较为复杂的方程的步骤吗?

例 3 小明在解方程 $3a-2x=15$ (x 为未知数)时,误将 $-2x$ 看作是 $+2x$,得方程的解为 $x=3$,试求出原方程的解.

基本思路 先按题设将方程改写为 $3a+2x=15$,然后利用方程的解的意义即 $x=3$ 使得等式成立,从而求得 a. 最后解题设中的方程.

解 由题设知方程 $3a+2x=15$ 的解为 $x=3$,所以将 $x=3$ 代入方程得

$$3a+2\times 3=15,$$

即 $3a+6=15$.

解这个关于 a 的一元一次方程,得 $a=3$.

于是题中方程为 $9-2x=15$.

解这个方程得 $x=-3$.

故原方程的解为 $x=-3$.

例 4 解方程

$$\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)-8\right]=\frac{3}{2}x+1.$$

基本思路 别急,多读题. 通常的做法是去括号,先去小括号再去中括

号……运算较繁琐.但是,你再读一遍,发觉可尝试先去中括号(因为$\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}=1$),可以简化方程式.

解 题设方程可化为

$$\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\right)-6=\frac{3}{2}x+1,$$

得

$$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}x=1+\frac{1}{4}+6,$$

$$-x=7\frac{1}{4},$$

$$x=-7\frac{1}{4}.$$

故原方程的解为 $x=-7\frac{1}{4}$.

说明 (1)请读者尝试按通常做法解此方程,并指出按通常做法处理较为复杂方程时的优点.(2)解方程的过程不必拘泥于一定将含未知数的项移至方程式等号的左边.上述求解中,还可以将含未知数 x 的项$\frac{1}{2}x$ 移至等号右边,而数 1 移至左边,即$-\frac{1}{4}-6-1=x$.

例 5 解方程 $|x+1|+3=5$.

基本思路 先移项 3,再用绝对值的意义分情况讨论,注意舍去不合题设的 x(即增解).

解 由方程 $|x+1|+3=5$,得 $|x+1|=2$.

当 $x+1\geqslant 0$ 时,有 $x\geqslant -1$,且 $x+1=2$,得 $x=1$.

当 $x+1<0$ 时,有 $x<-1$,且 $x+1=-2$,得 $x=-3$.

将 $x=1$ 和 $x=-3$ 代入原方程,知 $x=1$ 和 $x=-3$ 均为原方程的解.

故原方程的解为 $x=-3$, $x=1$.

生长思考 (1) 你会解 $|x+a|+3=5$ 吗?你认为求解 $|x+a|+3=5$ 其实就是求解 $|x+a|=b$ 吗?为什么?

(2) 你能解关于 x 的方程 $|x+a|=b$ 吗?

习 题 2

1 解方程：(1) $0.5x=19.5$；　　(2) $\dfrac{x+3}{0.5}+\dfrac{\frac{1}{3}(x+4)}{0.125}=5x+19$.

2 解方程：

(1) $\dfrac{x+2}{4}-\dfrac{2x-3}{6}=1$；

(2) $\dfrac{2x+1}{3}-\dfrac{x-1}{2}=1$.

3 解方程：

(1) $3(2x-3)-\dfrac{1}{3}(3-2x)=7(3-2x)-\dfrac{1}{7}(2x-3)$；

(2) $x-\dfrac{1}{3}\left[x-\dfrac{1}{3}(x-9)\right]=\dfrac{1}{9}(x-9)$.

4 解方程：

(1) $2\left|x-\dfrac{1}{2}\right|-3=\dfrac{2}{3}$；

(2) $\dfrac{1}{3}\left\{x-\dfrac{1}{3}\left[x-\dfrac{1}{4}\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\right]-1\right\}=x+\dfrac{3}{4}$；

(3) $3\{2x-1-[3(2x-1)+3]\}=5$.

心智体操

铅笔＋橡皮＝55 万美金

律蒲曼是美国佛罗里达州的一位画家，他一度穷得除了画具和一支短短的铅笔之外一无所有. 由于绘画时需要用橡皮擦，往往要花费很大功夫才能找到橡皮擦，待把画面擦好后又找不到铅笔了. 如果把橡皮擦用丝线扎在铅笔的另一端上不就解决了吗？实验之下，他发现这种方法仅仅能够凑合使用，没多久，橡皮擦又从笔端掉落下来.

几经思考，他终于想出了一个好办法. 他剪下一块薄铁皮片，把橡皮擦放在笔端，用铁皮片包起来，这样一来果然管用了. “说不定这玩意还能赚钱呢！”律蒲曼有了申请专利的念头. 于是就找亲戚借钱申办了专利手续. 果不其然，当他将这项专利卖给 RABAR 铅笔公司时，他得到了 55 万美金.

3 含字母系数的一次方程

... it took men about five thousand years, counting from the beginning of number symbols, to think of a symbol for nothing.

……从产生数的符号算起,到想用一个符号来表示"无",足足花了人类约五千年的时间.

——阿西莫夫(摘自《阿西莫夫论数》)

适当地使用字母,可以使问题简化,规律变得明显.

——单墫(摘自《解题研究》)

在第 2 讲中,我们主要讨论了一元一次方程 $ax=b\ (a\neq 0)$ 的求解,这里 a, b 是给定的数,知道了关于 x 的方程在 $a\neq 0$ 的情形下方程的解为 $x=\dfrac{b}{a}$.

方程 $ax=b$ 又称为含字母系数的一元一次方程.

方程 $ax=b$ 对于 $a=0$ 和 $b=0$,可变形为 $0\cdot x=0$,这表明 x 有无数多个值满足此等式,即方程有无数多个解;对于 $a=0$,且 $b\neq 0$,方程变形为 $0\cdot x=b$,此等式不成立,这表明方程无解.

因此,方程 $ax=b$ 解的情形是:$a\neq 0$ 时方程有唯一解,为 $x=\dfrac{b}{a}$;$a=0$ 且 $b=0$ 时方程有无数多个解;$a=0$ 且 $b\neq 0$ 时方程无解.

利用上述结果可以方便地求解若干较为复杂的含字母系数的一元一次方程.

例 1 解关于 x 的方程:$4a^2-x=2ax+1$.

基本思路 移项转化为 $Ax=B$ 的形式,利用平方差公式分解 $4a^2-1$,然后讨论字母不同取值下方程的解的情况.

解 移项得 $$(2a+1)x=4a^2-1.$$

利用 $4a^2-1=(2a-1)(2a+1)$，方程又可变形为

$$(2a+1)x=(2a-1)(2a+1).$$

当 $2a+1\neq0$ 时，$x=2a-1$，即当 $a\neq-\dfrac{1}{2}$ 时方程的解为 $x=2a-1$；

当 $2a+1=0$ 时，$0x=0$，即 $a=-\dfrac{1}{2}$ 时方程有无数多个解.

故 $a\neq-\dfrac{1}{2}$ 时，方程有唯一解，为 $x=2a-1$；$a=-\dfrac{1}{2}$ 时，方程有无数多个解.

例 2 解关于 x 的方程 $\dfrac{x-a}{b}-\dfrac{x-b}{a}=\dfrac{b}{a}(a\neq0,\ b\neq0,\ a\neq b)$.

基本思路 去分母，简化方程.

解 去分母，在题中方程的两边同时乘以 ab，得

$$a(x-a)-b(x-b)=b^2,$$

即

$$(a-b)x=a^2,$$

所以

$$x=\frac{a^2}{a-b}.$$

例 3 19 个糖果盒排成一列，正中间的盒子放 a 个糖果. 从这里向右，每个盒子比前一个多 m 个糖果；从这里向左，每个盒子依次比前一个多 n 个糖果(a，m，n 都是正整数). 如果糖果的总数是 2033 个，且 $a\geqslant36$. 求 a 的值.

基本思路 按题设得到糖果总数为 $19a+45m+45n$，然后利用因数分解及整除性，求得结果.

解 由题设得糖果总数为

$$\begin{aligned}&a+(a+m)+(a+2m)+\cdots+(a+9m)+(a+n)+\\&(a+2n)+\cdots+(a+9n)\\=\ &19a+\frac{m+9m}{2}\times9+\frac{n+9n}{2}\times9\\=\ &19a+45(m+n).\end{aligned}$$

又 $19a+45(m+n)=2033$，则有

$$19a=19\times107-45(m+n),$$

$$a=107-\frac{45\times(m+n)}{19}.$$

因为 a, m, n 均为正整数,19 是质数,所以 $m+n$ 一定是 19 的倍数,但 $\frac{45\times(m+n)}{19}$ 须小于 107,从而有 $m+n=19$ 或 2×19.

由 $m+n=19$,得 $a=62$;

由 $m+n=19\times2$,得 $a=17$.

又题设中 $a\geqslant36$,所以 a 为 62.

关于 x 的方程 $ax=b$, 逆向思考,我们可以有如下结论:

若方程有唯一解,则 $a\neq0$;若方程有无数多个解,则 $a=0$,且 $b=0$;若方程无解,则 $a=0$,且 $b\neq0$.

例 4 若 $abc=1$,解方程

$$\frac{2ax}{ab+a+1}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2cx}{ca+c+1}=1.$$

基本思路 注意到 $ab+a$ 中每项含有 a,则尝试将 1 代换为 abc,这样可以简化式子 $\frac{2ax}{ab+a+abc}=\frac{2x}{b+1+bc}$;同样地,将 abc 代换为 1,可变形式子 $\frac{2cx}{ca+c+1}=\frac{2bcx}{abc+bc+b}=\frac{2bcx}{bc+b+1}$,从而简化方程形式求得结果.

解 利用 $abc=1$, 可将原方程变形为

$$\frac{2ax}{ab+a+abc}+\frac{2bx}{bc+b+1}+\frac{2bcx}{abc+bc+b}=1,$$

$$\frac{2(1+b+bc)x}{bc+b+1}=1,$$

$$2x=1,$$

得

$$x=\frac{1}{2}.$$

故方程的解为 $x=\frac{1}{2}$.

例 5 若一元一次方程 $ax=b$ 有两个不同的解 x_1 和 x_2,求证:这个方程必有无数多个解.

证明 由题设 x_1, x_2 都是方程 $ax=b$ 的解,得 $ax_1=b$, $ax_2=b$. 于是

$$ax_1=ax_2,$$

即 $$a(x_1-x_2)=0.$$

又因为 $x_1\neq x_2$,所以必有 $a=0$,从而

$$b=ax_1=0\cdot x_1=0.$$

由于 $a=0$ 且 $b=0$,所以方程 $ax=b$ 有无数多个解.

生长思考 (1) 例 5 告诉我们,如果一个一元一次方程,只要有两个不同的解,那么它必有无数多个解.

(2) 反过来,如果关于 x 的方程 $ax=b$ 有无数多个解,则必有 $a=0$,$b=0$. 经常利用这样的结论处理一些较为复杂的问题.

例 6 已知 a, b, c 是正数,解关于 x 的方程

$$\frac{x-a-b}{c}+\frac{x-b-c}{a}+\frac{x-c-a}{b}=3.$$

基本思路 方法一是将 x 的式子汇总列在等式的一边,将不含 x 的式子汇总列在等式的另一边;方法二是观察各分式特点,将每个分式减去 1;方法三是假设每个分式都等于 1,是否符合要求.

解法一 原方程化为

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3. \qquad ①$$

因为 $$\begin{aligned}&\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}+\frac{a+b}{c}+3\\ =&\left(\frac{b+c}{a}+1\right)+\left(\frac{c+a}{b}+1\right)+\left(\frac{a+b}{c}+1\right)\\ =&\frac{b+c+a}{a}+\frac{c+a+b}{b}+\frac{a+b+c}{c}\\ =&(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),\end{aligned}$$

所以方程①化为 $$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right). \qquad ②$$

因为 a, b, c 都是正数,所以 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>0$,从而可在方程②两边同时除以$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$,得 $x=a+b+c$.

故方程的解为 $x=a+b+c$.

解法二 原方程化为

$$\left(\frac{x-a-b}{c}-1\right)+\left(\frac{x-b-c}{a}-1\right)+\left(\frac{x-c-a}{b}-1\right)=0,$$

得 $$\frac{x-a-b-c}{c}+\frac{x-b-c-a}{a}+\frac{x-c-a-b}{b}=0,$$

提取公因式 $x-a-b-c$,得

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=0.$$

因为 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>0$,所以 $x-a-b-c=0$,即 $x=a+b+c$.

故方程的解为 $x=a+b+c$.

解法三 假设 $\frac{x-a-b}{c}=1$, $\frac{x-b-c}{a}=1$, $\frac{x-c-a}{b}=1$,则由每个分式都可以得到 $x=a+b+c$.

又题中方程是一次方程,它只有一个解.故方程的解是 $x=a+b+c$.

生长思考 平时追求解题的多个途径,一方面可以熟练所学知识方法,另一方面拓宽视野,活跃思维.

习 题 3

1 解关于 x 的方程 $ax+1=bx$.

2 已知关于 x 的方程 $3m(x+3)=9x+4$ 无解,求 m 的值.

3 解关于 x 的方程 $(ax-b)(a+b)=0$.

4 解关于 x 的方程 $m^2(1-x)=mx+1$.

5 解关于 x 的方程 $\frac{x}{a}+\frac{x}{b-a}=\frac{a}{a+b}$ $(a\neq 0, a^2\neq b^2)$.

6 设 a 为整数,已知关于 x 的方程 $|x|=ax+1$ 既有一个正根又有一个负根,求 a 的值.

心智体操

学会表达

从前,有个人财大气粗,自命不凡,认为有钱能使鬼推磨,从没有办不成的事.但他肚子里缺少墨水,说起话来随随便便,从不考虑,就轻易出口.为此他得罪了很多人,朋友越来越少.有一天,他设宴请客,桌上摆满了鸡鸭鱼肉,

山珍海味. 来宾倒也不少. 但他一看，却有几个重要的人物还没有到场，就不假思索，自言自语道：

“该来的怎么还不来呢?”

在座的客人们一听，心里凉了一大截，心想：照他这么说，我们是不该来的喽！于是有一半的人连招呼都不打就走了.

他一看，这么多人不辞而别，便着急地说：

“啊！不该走的都走了.”

剩下的人听了，心里好不生气，“他这么说，是当着和尚骂秃贼. 这么说，我们是该走了!”于是，又有三分之二的人不告而别.

一看这阵势，这位东道主急得直拍大腿：

“这，这，我说的不是他们啊!”

剩下的三个客人听了，心里着实不是滋味，“不是说他们，那当然是说我们了.”于是，二话不说，也都气冲冲地打道回府了.

结果，宾客全都跑光了，只剩下主人一个人干着急.

你知道这位愣头愣脑的“马大哈”主人在说第一句话之前，已经到了多少客人吗?

4 一元一次方程的应用

如果没有数学的帮助和介入，对于大自然中的许多部分，我们既不能以足够的精细去阐明，也不能以足够的明晰去论证，还不能以足够的灵巧去应用.

——伽利略

现在，你已经会解一元一次方程了。你能否运用一元一次方程知识来处理一些实际问题呢？

事实上，我们是可以的.

因为处理实际问题时，我们只要多读题，善于用字母表示出实际问题中所涉及的对象和关系，并转化为一元一次方程，就变得易于解决了. 有时，为了尽快地理解思路，需借助图表揭示实际问题中的关系，而迅捷地转化为一元一次方程.

从学习数学语言的角度看，处理实际问题就是需要我们学会玩语言的"三角"转换，即实际文字语言、符号语言与图表语言之间的转化. 让我们从现在起努力学会玩"语言三角"吧！

例 1 某商店一种商品的进价降低了 8%，而售价保持不变，可使得商店的利润率提高十个百分点，问：原来的利润率是百分之几？

基本思路 慢读，逐句理解清楚. 回顾"进价"，就是商店购进商品时的价格，可以大胆地尝试用字母表示，这里可以用 a 表示原来的进价，"进价降低了 8%"就是现在的进价为 $a\times(1-8\%)$. "售价"就是实际销售的价格，"利润"是因销售商品而赚的钱，即利润＝售价－进价，"利润率"就是利润与进价的百分比值. 用 $x\%$ 表示原来利润率，则原来的售价为"利润＋进价"$=x\%\cdot a+a$，于是由"售价保持不变，可使商店的利润率提高 10%"，可得现在利润率为 $x\%+10\%$，从而有 $\dfrac{\text{利润}}{\text{现进价}}\times100\%=x\%+10\%$，而"售价－现进价"$=(a+a\cdot x\%)-a\times(1-8\%)$，所以就得到式子：

$$a+a\cdot x\%-a\times(1-8\%)=[a\times(1-8\%)]\cdot(x\%+10\%),$$

从而转化为含字母系数的一元一次方程了,求解此方程得结果.

解 设原来的进价为 a 元,原利润率为 $x\%$.

由题设知原售价为 $(1+x\%)a$ 元,现在进价为 $(1-8\%)a$ 元,利润率为 $x\%+10\%=(x+10)\%$,而现在的售价仍为 $(1+x\%)a$,所以现在利润 $=(1+x\%)a-(1-8\%)a$ 元,从而有

$$(1+x\%)a-(1-8\%)a=(1-8\%)a\cdot(x+10)\%,$$

可化为 $$(1+x\%)-(1-8\%)=(1-8\%)(x+10)\%,$$

$$(100+x)-(100-8)=(100-8)(x+10)\times\frac{1}{100},$$

$$x+8=(x+10)\times\frac{92}{100},$$

解得 $$x=15.$$

答:原来的利润率是 15%.

例 2 "妇人洗碗在河滨,路人问她客几人?答曰不知客数目,六十五碗自分明,二人共食一碗饭,三人共吃一碗羹,四人共肉无余数,请君细算客几人?"(摘自《孙子算经》)

基本思路 用 x 表示客人数,"二人共食一碗饭"知饭碗用了 $\frac{x}{2}$ 只,"三人共吃一碗羹"知羹碗用了 $\frac{x}{3}$ 只,"四人共肉无余数"知肉碗用了 $\frac{x}{4}$ 只,共有碗 65 只,则易于列出等式.

解 设客人有 x 人,则饭碗用了 $\frac{x}{2}$ 只,羹碗用了 $\frac{x}{3}$ 只,肉碗用了 $\frac{x}{4}$ 只. 于是,根据题设得方程

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}=65,$$

解得 $$x=60.$$

答:客人有 60 人.

例 3 10 个人围成一个圆圈做游戏. 游戏的规则是:每个人心里都想好一个数,并把自己想好的数如实地告诉他两旁的两个人,然后每个人将他两旁的两个人告诉他的数的平均数报出来. 若报出来的数如图 4-1 所示,则报 3 的人

心里想的数是________.

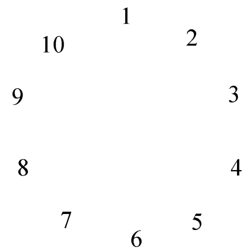


图 4-1

基本思路 设报 3 的人心里想的数是 x，报 5 的心里想的数是 a，那么报 4 的结果是 a 与 x 的平均数，即 $\dfrac{a+x}{2}=4$，得 $a=4\times2-x=8-x$. 这样就可以知道报 5 的人心里想的数为 $8-x$. 同样的道理，报 7 的人心里想的数是 $6\times2-(8-x)=x+4$，报 9 的人心里想的数为 $8\times2-(x+4)=12-x$，报 1 的人心里想的数为 $2\times10-(12-x)=x+8$，报 3 的人心里想的数为 $2\times2-(x+8)=-x-4$，而这等于 x，得到方程.

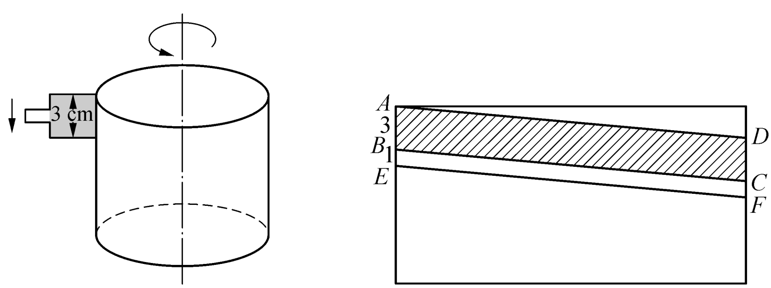
解 设报 3 的人心里想的数是 x，则报 5 的人心里想的数应是 $4\times2-x=8-x$. 同理可知报 7 的人心里想的数是 $x+4$，报 9 的人心里想的数是 $12-x$，报 1 的人心里想的数是 $x+8$，报 3 的人心里想的数是 $-4-x$. 于是得

$$x=-4-x,$$

解得

$$x=-2.$$

例 4 如图，一个高为 10 cm、半径为 6 cm 的圆柱，以每分钟转一圈的速度旋转. 一个宽为 3 cm 的刷子从圆柱侧面的顶端以每分钟移动 1 cm 的速度垂直向下移动. 那么刷子刷过圆柱侧面 50%的面积所花的时间是________分钟.



图(1) 图(2)

图 4-2

基本思路 刷子第一圈刷过的侧面展开图如图(2). 圆柱侧面展开图为矩形，圆柱高 10 cm 为矩形的宽，长为 $2\pi\times6=12\pi$(cm). 第一圈刷子刷过侧面展开图为平行四边形 $ABCD$. 第 2 圈刷子垂直向下移动 1 cm，得到一个小平行四边形带 $BCFE$，其面积为 $1\times2\pi\times6=12\pi(\text{cm}^2)$. 如此继续下去，每圈多刷出 $12\pi\ \text{cm}^2$. 这样，设经过 t 分钟后刷子共刷过圆柱侧面的面积为 $3\times12\pi+(t-$

1）$\times 12\pi$，当它是圆柱侧面的 50% 时，就可以得到等式即方程.

解 设刷子经过 t 分钟刷过圆柱侧面 50%的面积.

圆柱侧面积为 $2\pi \times 6 \times 10 = 120\pi(\text{cm}^2)$，圆柱侧面展开图中矩形的长为 $2\pi \times 6 = 12\pi(\text{cm})$，宽为 10 cm.

由题设知第一圈刷过的面积为 $3\times 12\pi = 36\pi(\text{cm}^2)$，从第 2 圈开始每圈多刷出 $1\times 12\pi = 12\pi(\text{cm}^2)$. 于是有

$$36\pi + 12\pi(t-1) = 50\% \times 120\pi,$$

解得

$$t = 3.$$

答：刷子刷过圆柱侧面 50%的面积所花的时间为 3 分钟.

生长思考 画一个草图如图(2)易于发现面积增加的规律. 画一个示意图，常是便捷解决实际问题的有益建议.

例 5 一辆客车、一辆货车和一辆小轿车在一条笔直的公路上朝同一方向匀速行驶. 在某一时刻，客车在前，小轿车在后，货车在客车与小轿车的正中间. 过了 10 分钟，小轿车追上了货车；又过了 5 分钟，小轿车追上了客车；再过 t 分钟，货车追上了客车，则 $t=$________.

基本思路 解这些较复杂的题，建议大胆用字母表示若干对象及其之间的数量关系，并借助于直观图理清它们之间的关系. 读第一遍，知道了题的基本意思. 读第二遍大胆设之，逐句列式，“在某一时刻，客车与货车，货车与小轿车之间的距离为 s 千米，小轿车、货车、客车的速度分别为 a，b，c 千米/分，货车经过 x 分钟后追上客车. “过了 10 分钟，小轿车追上了货车”可以列式为 $10(a-b)=s$；“又过了 5 分钟，小轿车追上了客车”，表明小轿车用 $10+5=15$（分钟）追上了客车，即 $(10+5)(a-c)=2s$；“货车经过 x 分钟追上客车”即 $x(b-c)=s$. 上述三个式子联立，消去 a，b，c 后可以得到所求结果.

解 设在某一时刻，货车与客车、小轿车的距离均为 s 千米，小轿车、货车、客车的速度分别为 a，b，c 千米/分，并设货车经过 x 分钟追上客车，则由题意得

$$10(a-b) = s,$$

$$15(a-c) = 2s,$$

$$x(b-c) = s.$$

由 $10(a-b) = s$ 及 $15(a-c) = 2s$，得 $a-b = \frac{s}{10}$，$a-c = \frac{2s}{15}$，则

$$b-c=(b-a)+(a-c)=\frac{2s}{15}-\frac{s}{10}=\frac{s}{30}.$$

于是有

$$\frac{s}{30}\cdot x=s,$$

得
$$x=30.$$

所以
$$t=30-10-5=15.$$

答：$t=15$.

例 6 一队旅客乘坐汽车，要求每辆汽车的乘客人数相等，起初，每辆汽车乘了 22 人，结果剩下一人未上车；如果有一辆汽车空车开走，那么所有旅客正好能平均分乘到其他各车上. 已知每辆汽车最多只能容纳 32 人，求起初有多少辆汽车？有多少名旅客？

基本思路 多读，大胆设元，转化为数学式子. 设总人数为 S，起初有 x 辆汽车，“起初每辆乘 22 人，结果剩下一人未上车”，得 $22x=S-1$；“开走一辆空车，乘客正好平均分到车上”，得 $(x-1)k=S$，这里 k 为正整数；又“每辆车最多只能容纳 32 人”，即 $k\leqslant 32$. 这样消去 S，并结合 x，k 为正整数且 $k\leqslant 32$ 可得所求结果.

解 设起初有汽车 x 辆，开走一辆空车后平均每辆车所乘的旅客为 k 名.

由题意知 $22x+1=k(x-1)$，$x\geqslant 2$，$k\leqslant 32$，所以

$$k=\frac{22x+1}{x-1}=22+\frac{23}{x-1}.$$

因为 k 为正整数，所以$\frac{23}{x-1}$为整数. 而 23 为素数，那么 $x-1=1$，或 $x-1=23$，得 $x=2$，或 $x=24$.

当 $x=2$ 时，$k=45$ 不合题意；

当 $x=24$ 时，$k=23$ 合题意，这时旅客人数为 $k(x-1)=529$.

答：起初有 24 辆汽车，529 名旅客.

习 题 4

1 已知一个多边形的内角和等于其外角和的 3 倍，求此多边形的边数.

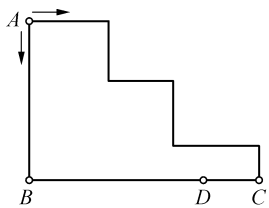
2 0～9 这 10 个数字每个恰用一次，组成若干个数，它们的和为 100. 问有多

少种方法?

3 甲、乙两个机器人同时从起点出发,沿跑道匀速向终点行进.电子记录仪表明:当甲距离终点 1 米时,乙距离终点 2 米;当甲到达终点时,乙距离终点 1.01 米.那么,跑道的长度为________米.

4 旅行者从下午 3 时步行到晚上 8 时,他先走平路,然后上山,到达山顶后就按原路下山,再走平路返回出发地.若他走平路每小时行 4 千米,上山每小时行 3 千米,下山每小时行 6 千米,问旅行者一共行多少千米?

5 如图为一个阶梯的纵截面,一只老鼠沿长方形的两边 $A\to B\to D$ 的路线逃跑,一只猫同时沿阶梯(折线)$A\to C\to D$ 的路线去捉,结果在距离点 C 1.5 米的 D 处,猫捉住了老鼠.已知老鼠的速度是猫的 $\frac{10}{13}$,问:阶梯 $A\to C$ 的长度是多少米?



(第 5 题)

6 游泳者在河中逆流而上,所带水壶于桥 A 下被水冲走.继续向前游了 20 分钟后他发现水壶遗失,于是立即返回,在桥 A 下游距桥 A 2 千米的桥 B 下追到水壶.求该河水流的速度.

7 梅林中学租用两辆小汽车(设速度相同)同时送 1 名带队老师及 7 名九年级的学生到县城参加数学竞赛,每辆限坐 4 人(不包括司机).其中一辆小汽车在距离考场 15 km 的地方出现故障,此时离截止进考场的时刻还有 42 分钟,这时唯一可利用的交通工具是另一辆小汽车,且这辆车的平均速度是 60 km/h,人步行的速度是 5 km/h(上、下车时间忽略不计).

(1) 若小汽车送 4 人到达考场,然后再回到出故障处接其他人,请你通过计算说明他们能否在截止进考场的时刻前到达考场;

(2) 假如你是带队的老师,请你设计一种运送方案,使他们能在截止进考场的时刻前到达考场,并通过计算说明方案的可行性.

心智体操

巧作"代换"

从前有座山,山上有座庙,庙里有个老和尚和小和尚,老和尚喜欢算术,小和尚也很聪明.有一天,老和尚要求小和尚两天内把圆周率 π 的值背到小数点后 20 位.小和尚看到师傅写给他的一串枯燥无味而又杂乱无序的数字,很是头疼.背了两天才能背出"3.1 415 926 535",再往后的数字就乱了.两天后,

老和尚来检查时,小和尚没有能完成任务.老和尚罚他面壁思过,并再给他一天的时间,否则重罚.小和尚饥寒交迫地跪在佛像前,盯着这一串杂乱无序的数字发呆,第三天的中午,小和尚看着师傅一个人在自由自在地喝酒,突然灵机一动,头脑中闪过一首诗,他在自己的头脑中理顺后,立刻跑到师傅的桌边说:“师傅,师傅,我背出来了.”老和尚道:“背来听听.”小和尚:“山顶一寺一壶酒,尔乐,苦杀吾,把酒吃,酒杀尔,杀不死,乐而乐”.老和尚大吃一惊,立即叫他与自己一起吃饭.此后逢人便夸小和尚聪明.小朋友,你知道为什么吗?

原来小和尚的那首诗正好与圆周率 π 的值有关.

山顶一寺一壶酒,尔乐,苦杀吾,把酒吃,酒杀尔,杀不死,乐而乐.

3.14159　26　535　897　932　384　626

5 二(多)元一次方程组

落霞与孤鹜齐飞，秋水共长天一色.

——王勃(摘自《滕王阁序》)

解二(多)元一次方程组的基本思想就是“消元”，将二(多)元一次方程组转化为一元一次方程. 恰似秋水共长天一色. 常用的消元法有“加减消元法”和“代入消元法”. 处理较为复杂的一次方程组时还需灵活运用等式的基本性质，以及“整体换元”等基本技巧.

例 1　解方程组 $\begin{cases} x+3y=-1, \\ 3x-y=7. \end{cases}$

基本思路　用代入消元法，将 $x=-1-3y$ 代入另一方程 $3x-y=7$，或将 $y=3x-7$ 代入方程 $x+3y=-1$；或用加减消元法，将方程式 $3x-y=7$ 两边同乘以 3 后，与方程式 $x+3y=-1$ 相加，消去 y 元.

解法 1　由方程 $3x-y=7$ 得 $y=3x-7$，代入方程 $x+3y=-1$，得

$$x+3(3x-7)=-1,$$

$$10x=20,$$

解得 $x=2$，代入方程 $y=3x-7$ 得 $y=-1$.

故原方程组的解为 $\begin{cases} x=2, \\ y=-1. \end{cases}$

解法 2　将方程 $3x-y=7$ 两边同乘以 3，得

$$9x-3y=7\times 3,$$

与方程 $$x+3y=-1$$

相加得 $$9x+x=21-1,$$

解得 $$x=2.$$

将 $x=2$ 代入方程 $x+3y=-1$，得 $2+3y=-1$，解得 $y=-1$.

故方程组的解为 $\begin{cases}x=2,\\y=-1.\end{cases}$

生长思考 (1) 当方程组中有一个元的系数为 1，常用代入法使算术运算简便. 当方程组中有一个元在两个方程中的系数或相等，或符号相反，常用加减消元法易于运算.

(2) 学会一般化. 由例 1 解法，总结求解过程，你能求解方程组 $\begin{cases}a_1x+b_1y=1,\\a_2x+b_2y=2\end{cases}$ 吗?这里 a_1，a_2，b_1，b_2 为已知数.

(3) 你能更一般化的求解吗?

一般地，对于二元一次方程组

$$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2,\end{cases}$$

这里 a_1，a_2，b_1，b_2 为已知数，a_1 与 b_1，a_2 与 b_2 中都至少有一个不为零.

(1) 当 $\dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ 时，方程组有唯一一组解

$$\begin{cases}x=\dfrac{b_2c_1-b_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1},\\[2ex]y=\dfrac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1};\end{cases}$$

(2) 当 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ 时，方程组有无穷多组解；

(3) 当 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ 时，方程组无解.

例 2 已知关于 x 的方程 $2a(3x+2)-1=(2b+1)x$ 有无数多个解，求 a 与 b 的值.

基本思路 根据第 3 讲例 5 的结论，即由一元一次方程 $Ax=B$ 有无数多解的条件是 $A=0$ 且 $B=0$，列出二元一次方程组，解这个方程组，得结果.

解 由题设关于 x 的方程可变形为

$$(6a-2b-1)x=1-4a.$$

那么由此方程有无数多个解，得

$$\begin{cases}6a-2b-1=0,\\1-4a=0.\end{cases}$$

解得 $$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{4}.$$

故 $$a=\frac{1}{4},\ b=\frac{1}{4}.$$

例 3 已知关于 x，y 的方程组

$$\begin{cases}ax+2y=1+a, & ①\\2x+2(a-1)y=3. & ②\end{cases}$$

分别求出当 a 为何值时，方程组有唯一一组解；无解；有无穷多组解.

基本思路 用代入消元法. 对于含字母的式子去乘或除方程的两边时，式子的值需不等于零.

解 由方程①得 $2y=1+a-ax$，代入 ② 得

$$2x+(a-1)(1+a-ax)=3,$$

$$(a-2)(a+1)x=(a-2)(a+2). \qquad ③$$

当 $(a-2)(a+1)\neq 0$，即 $a\neq 2$ 且 $a\neq -1$ 时，方程 ③ 有唯一解 $x=\dfrac{a+2}{a+1}$. 代入 $2y=1+a-ax$，得 $y=\dfrac{1}{2(a+1)}$. 因此原方程组有唯一一组解.

当 $(a-2)(a+1)=0$，且 $(a-2)(a+2)\neq 0$，即 $a=-1$ 时，方程 ③ 无解. 因此原方程组无解.

当 $(a-2)(a+1)=0$，且 $(a-2)(a+2)=0$，即 $a=2$ 时，方程 ③ 有无穷多个解. 因此原方程组有无穷多组解.

例 4 解方程组 $$\begin{cases}x+y=6, & ①\\y+z=10, & ②\\z+x=12. & ③\end{cases}$$

基本思路 观察方程①、②、③的特点，若三个式子相加，就可以得到 $x+y+z$ 的值，从而简捷求得 x、y、z；还可以用代入消元(或加减消元) 法，由 ①、② 可以得到 $x-z=-4$，从而与 ③ 联立，化为二元一次方程组.

解法一 由 ①＋②＋③，得

$$2(x+y+z)=28,$$

即
$$x+y+z=14. \quad ④$$

由 ④ − ① 得 $z=8$.

同样,用④分别减去②、③,得 $x=4$, $y=2$.

故方程组的解为 $\begin{cases} x=4, \\ y=2, \\ z=8. \end{cases}$

解法二 由 ① − ②,得 $x-z=-4$. ⑤

由 ③ − ⑤ 得
$$2z=16,$$

即
$$z=8. \quad ⑥$$

把⑥分别代入②、③,得 $y=2$, $x=4$.

故方程组的解为 $\begin{cases} x=4, \\ y=2, \\ z=8. \end{cases}$

生长思考 用代入消元法求解.

例 5 解方程组 $\begin{cases} 2x-y=-4, & ① \\ 3y-2z=6, & ② \\ z+x=-3. & ③ \end{cases}$

基本思路 观察各方程,考虑加减消元.

解 ③ × 2 + ②,得 $2x+3y=0$. ④

④ − ①,得 $4y=4$, 即
$$y=1. \quad ⑤$$

将⑤分别代入①、②,得 $x=-\frac{3}{2}$, $z=-\frac{3}{2}$.

故方程组的解为 $\begin{cases} x=-\frac{3}{2}, \\ y=1, \\ z=-\frac{3}{2}. \end{cases}$

生长思考 你还有怎样的求解思路?与上述解法比较,从中体悟各个算法的特点,注意养成寻求简捷运算的意识.

例 6　求方程组 $\begin{cases}|x|+y=12,\\ x+|y|=6\end{cases}$ 的解的组数.

基本思路　根据绝对值的意义分情形转化为二元一次方程，要注意检验.

解　若 $x\geqslant 0$，则题设方程组转化为 $\begin{cases}x+y=12,\\ x+|y|=6,\end{cases}$ 得 $|y|-y=-6$，而 $|y|-y\geqslant 0$，所以不存在 y 使得 $|y|-y=-6$，从而推知 $x\geqslant 0$ 时原方程组无解.

若 $x<0$，则题设方程组转化为 $\begin{cases}-x+y=12,\\ x+|y|=6.\end{cases}$

于是有 $|y|+y=18$，解得 $y=9$，从而求得 $x=-3$.

所以，原方程组的解为 $\begin{cases}x=-3,\\ y=9,\end{cases}$ 只有 1 组解.

习　题　5

1 解方程组：(1) $\begin{cases}\dfrac{2x-1}{5}+\dfrac{3y-2}{4}=2,\\ \dfrac{3x+1}{5}-\dfrac{3y+2}{4}=0.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}\dfrac{x+y}{6}+\dfrac{x-y}{10}=3,\\ \dfrac{x+y}{6}-\dfrac{x-y}{10}=-1.\end{cases}$

2 解方程组：

(1) $\begin{cases}x+y=a,\\ x-y=b;\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x=ay,\\ x+y=b;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}x=ay+b,\\ x=cy-d;\end{cases}(a\neq c)$

(4) $\begin{cases}x+y=a,\\ 2x+4y=b;\end{cases}$

并分别举例说明上述四个方程组可以用来处理哪四类生活中的实际问题.

3 关于 x，y 的两个方程组 $\begin{cases} ax-2by=2, \\ 2x-y=7 \end{cases}$ 和 $\begin{cases} 3ax-5by=9, \\ 3x-y=11 \end{cases}$ 具有相同的解，求 a，b 的值.

4 已知关于 x，y 的方程组 $\begin{cases} 2x+3y=6, \\ ax+6y=12. \end{cases}$ 问 a 为何值时，方程组有无数多组解？a 为何值时，只有一组解？

5 对于任意的数 a，b，关于 x，y 的二元一次方程 $(a-b)x-(a+b)y=a-b$ 都有一组公共解，这组公共解为________.

6 甲、乙两人解二元一次方程组

$$\begin{cases} ax+5y=13, & ① \\ 4x-by=-2. & ② \end{cases}$$

由于甲看错了方程①中的 a 而得到方程组的解为 $\begin{cases} x=-3, \\ y=-1; \end{cases}$ 乙看错了方程②中的 b 而得到的解为 $\begin{cases} x=5, \\ y=4. \end{cases}$ 求正确的 a，b 值，并求出原方程组的解.

7 设非零实数 a，b，c 满足 $\begin{cases} a-3b-2c=0, \\ 4a-2b+c=0, \end{cases}$ 求 $\dfrac{a+c}{b}$ 的值.

8 解方程组 $\begin{cases} \dfrac{x}{4}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z}{6}, \\ 2x+3y-4z=-3. \end{cases}$

9 解方程组 $\begin{cases} 2x+y+z=2, \\ x+2y+z=4, \\ x+y+2z=6. \end{cases}$

10 解方程组 $\begin{cases} |x-y|=x+y-2, \\ |x+y|=x+2. \end{cases}$

11 若 x_1，x_2，x_3，x_4 和 x_5 满足方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=6, \\ x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=12, \\ x_1+x_2+2x_3+x_4+x_5=24, \\ x_1+x_2+x_3+2x_4+x_5=48, \\ x_1+x_2+x_3+x_4+2x_5=96. \end{cases}$$

试确定 $3x_4+2x_5$ 的值.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 初中卷. 方程与方程组 / 葛军编著. —3版. —上海:华东师范大学出版社,2019
ISBN 978-7-5675-9838-6

Ⅰ.①数… Ⅱ.①葛… Ⅲ.①中学数学课-初中-教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第281481号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·初中卷
方程与方程组(第三版)

编　　著　葛　军
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　徐惟简
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　11.25
字　　数　191千字
版　　次　2020年4月第三版
印　　次　2020年4月第一次
印　　数　1—35 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9838-6
定　　价　27.00元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的QQ群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练2群，群号：689181206
2. 华师—初中数学教师2群，群号：112892422
3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。