数学奥林匹克小丛书

第三版

初中卷 3

Mathematical Olympiad Series

一次函数与二次函数

李惟峰 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

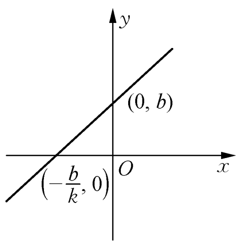
1	一次函数的图象与性质	001
2	二次函数的图象与性质	016
3	函数与一元二次方程	033
4	函数与二次不等式	046
5	函数的最值	059
6	有关整数根问题	073
7	函数的应用	087
	习题解答	099

1 一次函数的图象与性质

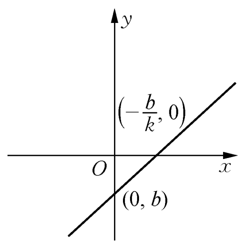
函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 称为一次函数，若 $b=0$，则称为正比例函数.

一次函数的图象是过 $(0,b)$、$\left(-\dfrac{b}{k},0\right)$ 两点的直线. 正比例函数 $y=kx$ $(k\neq 0)$ 的图象则是过原点的一条直线. 根据 k 和 b 的符号，可确定直线经过的象限，如下图所示.

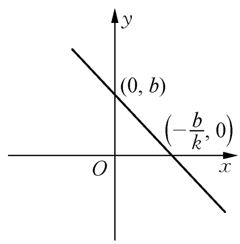
(1) $k>0$ 且 $b>0$ 时



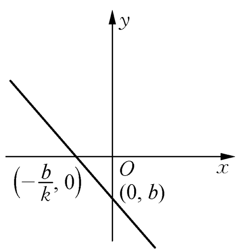
(2) $k>0$ 且 $b<0$ 时



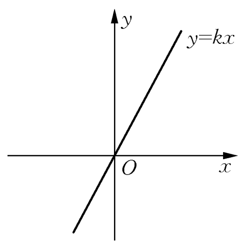
(3) $k<0$ 且 $b>0$ 时



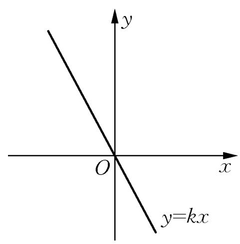
(4) $k<0$ 且 $b<0$ 时



(5) $k>0$ 且 $b=0$ 时



(6) $k<0$ 且 $b=0$ 时



由函数的单调性可知，在一次函数 $y=kx+b(k\neq 0)$ 中，当 $k>0$ 时，y 随着 x 的增大而增大，即单调递增；当 $k<0$ 时，y 随着 x 的增大而减小，即单调递减.

另外，正比例函数 $y=kx(k\neq 0)$ 的图象关于原点 O 成中心对称.

在解决有关一次函数的问题时，常运用分类讨论和数形结合的思想方法. 对分类讨论，在解题过程中，经常分 $k>0$ 或 $k<0$ 等情况进行分步解决. 而对于数形结合，一方面是由数定形，确定图象的大致位置；另一方面是

由形导数，即从给定的函数图象上获得信息，确定图象上点的坐标及解析式.

把一次函数解析式 $y=kx+b$ 中的 y 移到右边，就得到一个关于 x、y 的二元一次方程 $kx-y+b=0$，这时适合一次函数的一组 x、y 的值就是相应的二元一次方程的一组解. 因此“一次函数”、“二元一次方程”、“直线”这三个名词有时在不至于引起混淆的情况下通用.

例 1 把函数 $y=2x$ 的图象向右平行移动 3 个单位，求：

(1) 平移后得到的直线解析式；

(2) 平移后的直线上到两坐标轴距离相等的点的坐标.

解 (1) 因为直线 $y=2x$ 向右平移 3 个单位，则平移后经过点 $(3, 0)$.

设所求解析式为 $y=2x+b$，将 $(3, 0)$ 代入，得 $b=-6$.

所以所求直线解析式为 $y=2x-6$.

(2) 因为到两坐标轴距离相等的点在直线 $y=x$ 或 $y=-x$ 上，所以解方程组

$$\begin{cases} y=2x-6, \\ y=x, \end{cases} \text{和} \begin{cases} y=2x-6, \\ y=-x, \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} x=6, \\ y=6, \end{cases} \text{和} \begin{cases} x=2, \\ y=-2. \end{cases}$$

所以在直线 $y=2x-6$ 上到两坐标轴上的距离相等的点为 $(6, 6)$ 和 $(2, -2)$.

例 2 已知 $k=\dfrac{a+b-c}{c}=\dfrac{a-b+c}{b}=\dfrac{-a+b+c}{a}$，且 $\sqrt{m+5}+n^2+9=6n$. 问关于自变量 x 的一次函数 $y=kx+m+n$ 的图象一定经过哪几个象限？(黄冈初中数学竞赛)

解 由题意得

$$\begin{cases} a+b-c=ck, \\ a-b+c=bk, \\ -a+b+c=ak, \end{cases}$$

三式相加得

$$a+b+c=k(a+b+c).$$

当 $a+b+c\neq 0$ 时，$k=1$；

当 $a+b+c=0$ 时，$k=-2$.

又由 $$\sqrt{m+5}+n^2+9=6n,$$

整理得 $$\sqrt{m+5}+(n-3)^2=0,$$

所以 $$m=-5,\ n=3,$$

则一次函数为 $$y=-2x-2,$$

或 $$y=x-2.$$

因此,图象一定经过第三、四象限.

例 3 已知关于 x 的方程 $kx+3=|x+1|-2|x-1|+|x+2|$ 有三个解,求 k 的取值范围.

分析 (1) 本题可以看作一次函数 $y=kx+3$ 与函数 $y=|x+1|-2|x-1|+|x+2|$ 的图象有 3 个交点,求 k 的取值范围;

(2) 函数 $y=|x+1|-2|x-1|+|x+2|$ 利用零点分段法,把绝对值去掉,得出分段函数的解析式.

解 利用零点分段法,函数 $y=|x+1|-2|x-1|+|x+2|$ 可化为

$$y=\begin{cases}-5, & x\leqslant -2,\\ 2x-1, & -2<x\leqslant -1,\\ 4x+1, & -1<x\leqslant 1,\\ 5, & x>1.\end{cases}$$

则方程的解可以看作函数 $y=kx+3$ 与 $y=|x+1|-2|x-1|+|x+2|$ 的图象的交点横坐标.

在直角坐标系中,分别画出两函数的图象,如图 1-1.

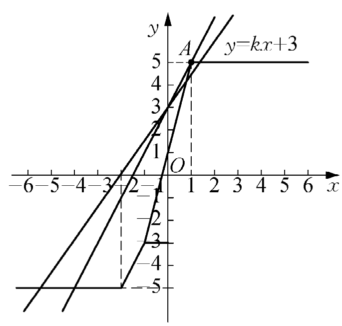


图 1-1

若函数 $y=kx+3$ 经过点 $A(1,\ 5)$,则两个函数的图象只有 2 个交点,易得此时 $k=2$;

当直线绕着点 $(0,\ 3)$ 顺时针旋转时,有 3 个交点,直到和 x 轴平行时才没有 3 个交点,所以 k 的取值范围为 $0<k<2$.

例 4 设 x 是实数,求 $|x+1|+|x+2|+|x+3|+|x+4|+|x+5|$ 的最小值.(北京中学生数学竞赛)

解 根据绝对值的几何意义，在数轴上画出实数-1、-2、-3、-4、-5分别对应的点A、B、C、D、E，如图1-2，设x对应动点P，则根据绝对值的几何意义，得

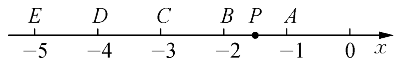


图1-2

$$\begin{aligned}&|PA|+|PB|+|PC|+|PD|+|PE|\\ \geqslant&|CB|+|CD|+|CA|+|CE|\\ =&2+4=6.\end{aligned}$$

因此，当$x=-3$时，取得最小值为6.

评注 本题也可利用分段函数的图象求解，但相对来说运算较繁琐.

一般地，本题还可推广为求$|x-1|+|x-2|+\cdots+|x-n|$（$n\in\mathbf{N}$）的最小值，则当n为偶数且$\frac{n}{2}\leqslant x\leqslant\frac{n}{2}+1$时，取得最小值为$\frac{n^2}{4}$；当$n$为奇数且$x=\frac{n+1}{2}$时，取得最小值为$\frac{n^2-1}{4}$.

例5 如图1-3，在平面直角坐标系xOy中，多边形$OABCDE$的顶点坐标分别是$O(0, 0)$、$A(0, 6)$、$B(4, 6)$、$C(4, 4)$、$D(6, 4)$、$E(6, 0)$. 若直线l经过点$M(2, 3)$，且将多边形$OABCDE$分割成面积相等的两部分，则直线l的函数表达式是____________.

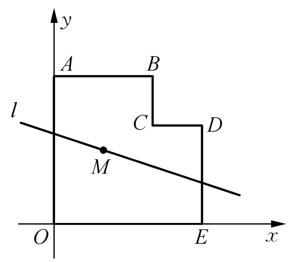


图1-3

解 如图1-4，延长BC交x轴于点F；连结OB、AF；连结CE、DF，且相交于点N. 由已知得点$M(2, 3)$是OB、AF的中点，即点M为矩形$ABFO$的中心，所以直线l把矩形$ABFO$分成面积相等的两部分. 又因为点$N(5, 2)$是矩形$CDEF$的中心，所以，过点$N(5, 2)$的直线把矩形$CDEF$分成面积相等的两部分.

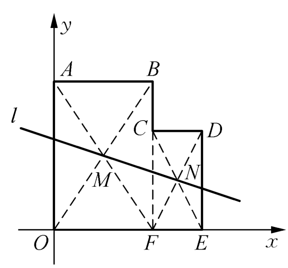


图1-4

于是，直线MN即为所求的直线l.

设直线l的函数表达式为$y=kx+b$，则

$$\begin{cases}2k+b=3,\\5k+b=2,\end{cases}$$

解得
$$\begin{cases}k=-\dfrac{1}{3},\\ b=\dfrac{11}{3}.\end{cases}$$

故所求直线l的函数表达式为$y=-\frac{1}{3}x+\frac{11}{3}$.

例 6 已知一次函数的图象经过点(2, 2),它与两坐标轴所围成的三角形的面积等于 1,求这个一次函数的解析式.

解 设一次函数为 $y=kx+b$,它的图象经过点(2, 2),则点坐标满足函数关系式,得 $2k+b=2$.

又因为直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交于 $\left(-\dfrac{b}{k},\ 0\right)$,与 y 轴交于点$(0,\ b)$,所以三角形面积为

$$S=\frac{1}{2}\mid b\mid\left|-\frac{b}{k}\right|=\frac{1}{2}\,\frac{b^2}{\mid k\mid}=1,$$

即
$$b^2=2|k|.$$

解方程组
$$\begin{cases}2k+b=2,\\ b^2=\pm 2k,\end{cases}$$

得
$$\begin{cases}k=2,\\ b=-2\end{cases}\text{或}\begin{cases}k=\dfrac{1}{2},\\ b=1.\end{cases}$$

所以函数关系式为

$$y=2x-2\ \text{或}\ y=\frac{1}{2}x+1.$$

例 7 如图 1-5,已知一次函数 $y=2x-4$ 的图象与 x 轴、y 轴分别相交于点 A、B,点 P 在该函数的图象上,P 到 x 轴、y 轴的距离分别为 d_1、d_2.

(1) 当 $d_1+d_2=3$ 时,求 P 点的坐标;

(2) 若在线段 AB 上存在无数个 P 点,使 $d_1+ad_2=4$(a 为常数),求 a 的值.

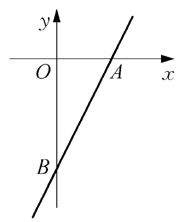


图 1-5

分析 (1) 我们设 $P(m,\ 2m-4)$,用 m 把 d_1+d_2 表示出来,通过对 m 的分类讨论求出坐标;

(2) 线段 AB 上存在无数个点 P,这个条件等价于关于 P 点的方程有无数个解,这是本题的关键.

解 (1) 设 $P(m,\ 2m-4)$,则 $d_1+d_2=\mid m\mid+\mid 2m-4\mid$.

当 $m<0$ 时,则 $d_1+d_2=\mid m\mid+\mid 2m-4\mid=4-3m=3\Rightarrow m=\dfrac{1}{3}$,不合题意,舍去;

当 $0 \leqslant m \leqslant 2$ 时,则 $d_1 + d_2 = |m| + |2m - 4| = 4 - m = 3 \Rightarrow m = 1$,得 $P(1, -2)$;

当 $m > 2$ 时,则 $d_1 + d_2 = |m| + |2m - 4| = 3m - 4 = 3 \Rightarrow m = \frac{7}{3}$,得 $P\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

所以 P 点坐标为 $(1, -2)$ 或 $\left(\frac{7}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

(2) 设 $P(m, 2m-4)$,因为 P 在线段 AB 上,得 $0 \leqslant m \leqslant 2$.

则 $d_1 + ad_2 = |2m - 4| + a|m| = 4 - 2m + am = 4$.

即 $(a-2)m = 0$,因为存在无数个点 P,所以 $a = 2$.

例 8 已知 x、y、z 都不小于 0,且满足 $3y + 2z = 3 - x$ 及 $3y + z = 4 - 3x$,求函数 $u = 3x - 2y + 4z$ 的最大值和最小值.

解 由题意得 $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

由
$$\begin{cases} 3y + 2z = 3 - x, \\ 3y + z = 4 - 3x, \end{cases}$$

可得
$$\begin{cases} y = \frac{5}{3}(1 - x), \\ z = 2x - 1. \end{cases}$$

因为要使 $y \geqslant 0$、$z \geqslant 0$,则可求得 $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$.

又因为
$$\begin{aligned} u &= 3x - 2y + 4z \\ &= 3x - 2\left[\frac{5}{3}(1 - x)\right] + 4(2x - 1) \\ &= \frac{1}{3}(43x - 22), \end{aligned}$$

所以,当 $x = \frac{1}{2}$ 时,u 取最小值 $-\frac{1}{6}$;当 $x = 1$ 时,u 取最大值 7.

例 9 如图 1-6,直线 $y = -x + b(b > 0)$ 与双曲线 $y = \frac{k}{x}(k > 0)$ 在第一象限的一支分别交于 A、B 两点,与坐标轴交于 C、D 两点,P 是双曲线上的点,且 $PO = PD$.

(1) 试用 k、b 来表示 C、P 两点的坐标;

(2) 若△POD 的面积等于 1,试求双曲线在第

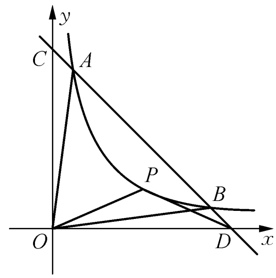


图 1-6

一象限的一支函数解析式；

(3) 在第(2)小题的结论下，若 $b=4$，求$\triangle AOB$ 的面积.

解 (1) 由已知得 C 点坐标为$(0, b)$，D 点坐标为$(b, 0)$.

又因为 $PO=PD$，P 点在双曲线 $y=\dfrac{k}{x}$ 上，所以 P 点的坐标为

$$\left(\frac{b}{2}, \frac{2k}{b}\right).$$

(2) 因为 $$S_{\triangle POD}=1,$$

即 $$S_{\triangle POD}=\frac{1}{2}b\cdot\frac{2k}{b}=1,$$

故 $$k=1,$$

所以所求函数解析式为 $y=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$.

(3) 由题意得 $$\begin{cases} y=-x+4, \\ y=\dfrac{1}{x}, \end{cases}$$

解得 $$\begin{cases} x=2+\sqrt{3}, \\ y=2-\sqrt{3} \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=2-\sqrt{3}, \\ y=2+\sqrt{3}, \end{cases}$$

即交点坐标为 $A(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$，$B(2+\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$，所以

$$\begin{aligned} S_{\triangle AOB} &= S_{\triangle AOD}-S_{\triangle BOD} \\ &= \frac{1}{2}\times 4\times(2+\sqrt{3})-\frac{1}{2}\times 4\times(2-\sqrt{3}) \\ &= 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

例 10 设 a 是整数，关于 x 的方程

$$||x-1|-2|=a$$

只有三个不同的整数解，求这三个解.

解 先作出 $|x-1|$ 的图象，然后向下平移 2 个单位，得到 $|x-1|-2$ 的图象. 再把 x 轴下方的图象关于 x 轴翻上去，便得到 $y=||x-1|-2|$ 的图象，如图 1-7.

要使方程只有三个不同的整数解，只有当 $a=2$ 时成立，即原方程的三个整数解分别为

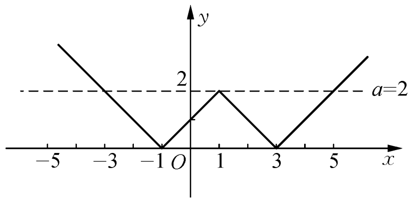


图 1－7

$$x=-3,\ x=1,\ x=5.$$

评注 本题也可以分区间把函数 $y=||x-1|-2|$ 改写成分段函数，再通过讨论来求解，但有一定的运算量.

例 11 已知曲线由方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 确定.

(1) 判别曲线所围成的图形的形状；

(2) 求所围成的图形的面积.

解 (1) 根据题意，当 $x\geqslant 1$ 且 $y\geqslant 1$ 时，有

$$x-1+y-1=1,$$

即
$$y=-x+3;$$

当 $x\geqslant 1$，$y<1$ 时，有

$$x-1+(1-y)=1,$$

即
$$y=x-1;$$

当 $x<1$，$y\geqslant 1$ 时，有

$$(1-x)+(y-1)=1,$$

即
$$y=x+1;$$

当 $x<1$，$y<1$ 时，有

$$(1-x)+(1-y)=1,$$

即
$$y=-x+1.$$

所以，由方程 $|x-1|+|y-1|=1$ 确定的曲线所围成的图形如图 1－8 所示，构成四边形 $ABCD$.

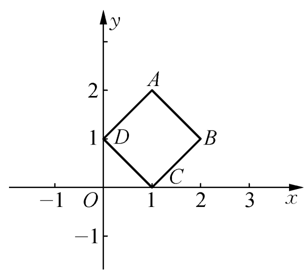


图 1－8

(2) 要求四边形的面积，关键是判定四边形的形状. 如图 1－8，设直线 $y=-x+3$ 和 $y=x+1$ 交于 A 点，则 A 点坐标满足

$$\begin{cases} y=-x+3, \\ y=x+1, \end{cases}$$

从而求出 A 点坐标为$(1,2)$.

同理可求得 $B(2,1)$, $C(1,0)$, $D(0,1)$.

因为 $$AD=\sqrt{(1-0)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2},$$

$$AB=CD=CB=\sqrt{2},$$

且 $$DB=2,$$

所以 $$AD^2+AB^2=DB^2,$$

所以四边形 $ABCD$ 为正方形,面积为

$$S_{ABCD}=2.$$

评注 从本题可以看出,我们在处理有关一次绝对值问题的时候,基本的方法是:(1)分区间进行讨论,把绝对值去掉,然后再分步解决;(2)通过数形结合,画出函数的图象,往往对解题能起到事半功倍的效果.

例 12 如图 1-9,直线 $y=2x+m(m>0)$ 与 x 轴交于点 A,直线 $y=-x+n(n>0)$ 与 x 轴、y 轴分别交于点 B、D,并与直线 $y=2x+m$ 相交于点 C,若 $AB=4$,四边形 $CAOD$ 的面积为$\dfrac{10}{3}$,求 m、n 的值.

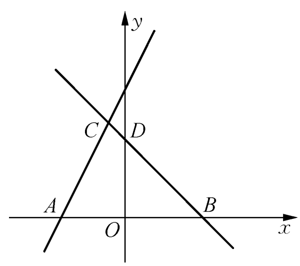


图 1-9

分析 要求 m、n 两个值,关键找两个关于 m、n 的方程.一个是利用 $AB=4$ 这个条件,另一个方程利用四边形 $ODCA$ 的面积为$\dfrac{10}{3}$这个条件.

解 直线 $y=2x+m$ 与 x 轴的交点 $A\left(-\dfrac{m}{2},0\right)$,直线 $y=-x+n$ 与 x 轴的交点为 $B(n,0)$,与 y 轴的交点 $D(0,n)$,则

$$AB=n+\frac{m}{2}=4. \quad ①$$

解方程组 $$\begin{cases} y=2x+m, \\ y=-x+n, \end{cases}$$

得 $$\begin{cases} x=\dfrac{n-m}{3}, \\ y=\dfrac{m+2n}{3}, \end{cases}$$

即 C 点坐标为 $\left(\frac{n-m}{3}, \frac{m+2n}{3}\right)$.

因为

$$\begin{aligned} S_{四边形ODCA} &= S_{\triangle ACB} - S_{\triangle DOB} \\ &= \frac{1}{2}\times 4\times\frac{m+2n}{3}-\frac{1}{2}\times n\times n \\ &= \frac{10}{3}, \end{aligned}$$

化简后得 $$3n^2-8n-4m+20=0, \quad ②$$

联立方程①、②,解得

$$\begin{cases} m=4, \\ n=2. \end{cases}$$

例 13 为加强公民的节水意识,合理利用水资源.某市对居民用水实行阶梯水价,居民家庭每月用水量划分为三个阶梯,一、二、三级阶梯用水的单价之比等于 1∶1.5∶2.如图 1-10 折线表示实行阶梯水价后每月水费 y(元)与用水量 x(m^3)之间的函数关系.其中线段 AB 表示第二级阶梯时 y 与 x 之间的函数关系.

(1) 求线段 AB 所在直线的表达式;

(2) 某户 5 月份按照阶梯水价应缴水费 102 元,其相应用水量为多少立方米?

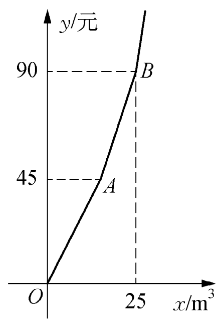


图 1-10

分析 要求 AB 所在直线的表达式,关键求 A 点坐标,所以设 $A(a, 45)$,下面根据图象来列出方程.

解 (1) 设第一阶梯用水单价为每立方米 x 元,则第二阶梯用水单价为每立方米 $1.5x$ 元.

设 $A(a, 45)$,则 $\begin{cases} ax=45, \\ ax+1.5x(25-a)=90, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=15, \\ x=3. \end{cases}$

则 $A(15, 45)$, $B(25, 90)$.

设线段 AB 所在的直线表达式为 $y=kx+b$,则有 $\begin{cases} 45=15k+b, \\ 90=25k+b, \end{cases}$ 解得

$$\begin{cases} k=\frac{9}{2}, \\ b=-\frac{45}{2}. \end{cases}$$

所以线段 AB 所在的直线表达式为 $y=\frac{9}{2}x-\frac{45}{2}$.

(2) 设该户 5 月份用水量为 $x(\mathrm{m}^3)(x>90)$,由题意知第二阶梯用水单价为每立方米 4.5 元,第三阶梯用水单价为每立方米 6 元,则根据题意得 $90+6(x-25)=102$,解得 $x=27$.

即该用户 5 月份用水量为 27 m^3.

例 14 已知直线 $y=\frac{m}{3}x+5$ 在第一象限中有且仅有一个整点(横、纵坐标均为整数),求整数 m 的所有可能取值.

分析 如 $m>0$,则当 $x=3n$(n 为正整数),易得直线 $y=\frac{m}{3}x+5$ 在第一象限内有无数个整点,所以 $m<0$,再根据题意缩小 m 的范围,分类讨论即可.

解 根据题意得 $m<0$,且 m 为整数,x、y 为正整数,有 $\frac{mx}{3}+5>0$,得 $mx>-15$,则 $-15<mx\leqslant-1$,且 $3\mid mx$,即 m、x 中至少有一个是 3 的倍数.

下面对 m 进行分类讨论,

当 $m=-1$ 时,得 $x=3,6,9,12$,共 4 个整点;

当 $m=-2$ 时,得 $x=3,6$,共 2 个整点;

当 $m=-3$ 时,得 $x=1,2,3,4$,共 4 个整点;

当 $m=-4$ 时,得 $x=3$,一个整点;

当 $m=-6$ 时,得 $x=1,2$,两个整点;

当 $m=-9$ 时,得 $x=1$,一个整点;

当 $m=-12$ 时,得 $x=1$,一个整点.

所以整数 m 的所有可能值为:-4,-9,-12 共 3 个.

例 15 已知以 $A(0,2)$、$B(2,0)$、$O(0,0)$三点为顶点的三角形被直线 $y=ax-a$ 分成两部分,设靠近原点 O 一侧那部分的面积为 S,试写出用 a 表示的 S 的解析式.

分析 如图 1-11,直线 $y=ax-a$ 是通过定点 $C(1,0)$的,在绕着定点$C(1,0)$动的过程中,可能和线段 OA 相交,也可能和线段 AB 相交,则靠近原点 O 一侧的图形可能是三角形,也可能是四边形,故分两种情况讨论.

解 易知直线 AB 的方程为 $y=-x+2(0\leqslant$

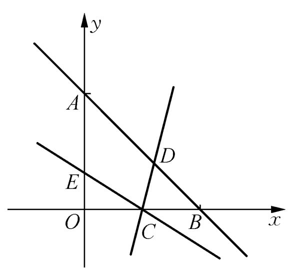


图 1-11

$x \leqslant 2$)，直线 $y=ax-a$ 过定点 $C(1,0)$. 下面分两种情况讨论.

(1) 直线 $y=ax-a$ 与线段 OA 相交，设交点为 E，则靠近原点 O 一侧的图形是三角形.

在方程 $y=ax-a$ 中，令 $x=0$，得 $y=-a>0$，所以

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\times OE\times OC \\ &= \frac{1}{2}\times(-a)\times 1 \\ &= -\frac{a}{2}. \end{aligned}$$

因为 $0<OE\leqslant 2$，所以 $-2\leqslant a<0$，得

$$S=-\frac{a}{2}(-2\leqslant a<0).$$

(2) 直线 $y=ax-a$ 与线段 AB 相交，设交点为 D，则靠近原点 O 一侧的图形是四边形. 由

$$\begin{cases} y=ax-a, \\ y=-x+2, \end{cases}$$

解得 D 点的坐标为 $\left(\frac{2+a}{1+a}, \frac{a}{1+a}\right)$.

所以要求的四边形面积为

$$S=S_{\triangle OAB}-S_{\triangle DCB},$$

即
$$S=2-\frac{1}{2}\times 1\times\frac{a}{1+a}=\frac{4+3a}{2(1+a)}.$$

由于点 D 在 AB 上，所以它的坐标要适合

$$\begin{cases} 0\leqslant\frac{2+a}{1+a}<2, \\ 0<\frac{a}{1+a}\leqslant 2, \end{cases}$$

解得
$$a\leqslant -2 \text{ 或 } a>0,$$

所以
$$S=\frac{4+3a}{2(1+a)}(a\leqslant -2 \text{ 或 } a>0).$$

综合(1)、(2),得

$$S=\begin{cases}-\dfrac{a}{2},\ -2\leqslant a<0,\\ \dfrac{4+3a}{2(1+a)},\ a\leqslant -2 \text{ 或 } a>0.\end{cases}$$

习 题 1

1 有 10 条不同的直线 $y=k_nx+b_n(n=1,2,3,\cdots,10)$,其中 $k_3=k_6=k_9$,$b_4=b_7=b_{10}=0$,则这 10 条直线的交点个数最多有(   ).

A. 45 个　　B. 40 个　　C. 39 个　　D. 31 个

2 对于实数 a、b,定义符号 $\min\{a,b\}$,其意义为:当 $a\geqslant b$ 时,$\min\{a,b)=b$;当 $a<b$ 时,$\min\{a,b\}=a$. 例如:$\min=\{2,-1\}=-1$,若关于 x 的函数 $y=\min\{2x-1,-x+3\}$,则该函数的最大值为(   ).

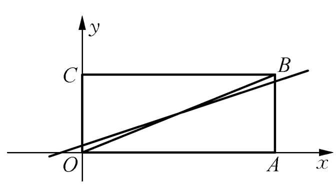
A. $\dfrac{2}{3}$　　B. 1　　C. $\dfrac{4}{3}$　　D. $\dfrac{5}{3}$

3 设 x、y 满足 $x+3y+|3x-y|=19$,$2x+y=6$,求 x、y.

4 已知 $|a|=a+1$,$|x|=2ax$,求 $|x-1|-|x+1|+2$ 的最大值和最小值.

5 在平面直角坐标系中,已知直线 $5x+3y-15=0$ 分别交 x 轴、y 轴于 D、A,直线 $3x+5y-15=0$ 分别交 x 轴、y 轴于 B、C,且 AD 与 BC 相交于点 E,求△ABE 的面积.

6 如图,在直角坐标系中,矩形 $OABC$ 的顶点 B 的坐标为(15, 6),直线 $y=\dfrac{1}{3}x+b$ 恰好将矩形 $OABC$ 分成面积相等的两部分,求 b 的值.



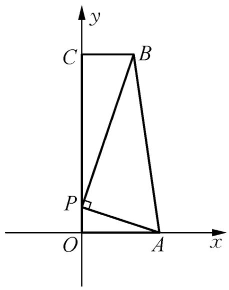
(第 6 题)

7 设关于 x 的一次函数 $y=a_1x+b_1$ 与 $y=a_2x+b_2$,则称函数 $y=m(a_1x+b_1)+n(a_2x+b_2)$(其中 $m+n=1$)为此两个函数的生成函数.

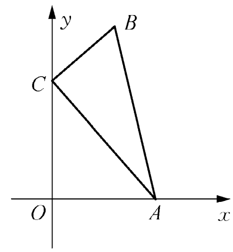
(1) 当 $x=1$ 时,求函数 $y=x+1$ 与 $y=2x$ 的生成函数的值;

(2) 若函数 $y=a_1x+b_1$ 与 $y=a_2x+b_2$ 的图象的交点为 P,判断点 P 是否在此两个函数的生成函数的图象上,并说明理由.

8 如图所示,在直角坐标系中,已知直角梯形 $OABC$ 的顶点 O 为坐标原点,$A(3,0)$,$B(2,7)$,$C(0,7)$. P 为线段 OC 上一点,若过 B、P 两点的直线为 $y_1=k_1x+b_1$,过 A、P 两点的直线为 $y_2=k_2x+b_2$,且 $PB\perp PA$,求 $k_1k_2(k_1+k_2)$ 的值.



(第 8 题)



(第 9 题)

9 如图,在平面直角坐标系中,$\triangle ABC$ 满足:$\angle C=90^\circ$,$AC=2$,$BC=1$,点 A、C 分别在 x 轴、y 轴上,当点 A 从原点开始在 x 轴的正半轴上运动时,点 C 随着在 y 轴上运动.

(1) 当 $OA=OC$ 时,求 OB;

(2) 求 OB 的最大值,并确定此时图形应满足什么条件?

10 在直角坐标系中,已知四个点为 $A(-8,3)$、$B(-4,5)$、$C(0,n)$、$D(m,0)$,当四边形 $ABCD$ 的周长最短时,求 $m:n$ 的值.

11 点 A、B 分别在一次函数 $y=x$、$y=8x$ 的图象上,其横坐标分别为 a、$b(a>0,b>0)$. 若直线 AB 为一次函数 $y=kx+m$ 的图象,求当 $\frac{a}{b}$ 是整数时,满足条件的整数 k 的值.

12 A 市、B 市分别有某种库存机器 12 台、6 台,现决定支援给 C 市 10 台、D 市 8 台. 已知从 A 市调运一台机器到 C 市、D 市的运费分别为 400 元、800 元;从 B 市调运一台机器到 C 市、D 市的运费分别为 300 元、500 元.

(1) 设 B 市运往 C 市的机器为 x 台,求总运费 w 关于 x 的函数关系式;

(2) 若要求总运费不超过 9000 元,问共有几种调运方案?

(3) 求出总运费最低的调运方案及最低运费是多少元?

13 反比例函数 $y=\frac{5}{x}$ 图象在第一象限的一支上有一点 $C(1,5)$,过点 C 的直线 $y=-kx+b(k>0)$ 与 x 轴交于点 $A(a,0)$.

(1) 求点 A 的横坐标 a 与 k 之间的函数关系式；

(2) 当该直线与反比例函数图象在第一象限的另一交点 D 的横坐标为 9 时，求△COA 的面积.

14 在平面直角坐标系中，直线 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 与 x 轴、y 轴分别交于 A、B 两点，把直线 $y=-\frac{4}{3}x+8$ 沿过点 A 的直线翻折，使点 B 与 x 轴上的点 C 重合，折痕与 y 轴交于点 D，求直线 CD 的解析式.

15 已知一次函数 $y=mx+4$ 具有性质：y 随 x 的增大而减小，又直线 $y=mx+4$ 与直线 $x=1$、$x=4$ 分别相交于点 A、D，且点 A 在第一象限内，直线 $x=1$、$x=4$ 分别与 x 轴交于点 B、C.

(1) 要使四边形 $ABCD$ 为凸四边形，试求 m 的取值范围；

(2) 已知四边形 $ABCD$ 为凸四边形，直线 $y=mx+4$ 与 x 轴相交于 E，且 $\frac{ED}{EA}=\frac{4}{7}$ 时，求一次函数的解析式；

(3) 在(2)的条件下，直线 $y=mx+4$ 与 y 轴交于点 F，求证：点 D 是△EOF 的外心.

2 二次函数的图象与性质

一、二次函数的解析式

形如 $y=f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的函数叫做二次函数. 上述解析式称为二次函数的一般形式.

二次函数的标准式(即顶点式)为

$$y=f(x)=a(x-h)^2+k(a\neq 0),$$

其中 h、k 满足 $h=-\dfrac{b}{2a}$, $k=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

当二次函数的图象与 x 轴有两个交点 $A(x_1, 0)$、$B(x_2, 0)$时,由多项式因式分解可知,二次函数的解析式又可写为

$$y=f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0),$$

其中的对称轴方程为 $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$,顶点坐标为$\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{-a(x_1-x_2)^2}{4}\right)$.

当已知二次函数图象上三点的坐标为 $A(x_1, f(x_1))$、$B(x_2, f(x_2))$、$C(x_3, f(x_3))$时,二次函数的解析式为

$$\begin{aligned} f(x)=&\frac{f(x_1)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}(x-x_2)(x-x_3)\\ &+\frac{f(x_2)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}(x-x_1)(x-x_3)\\ &+\frac{f(x_3)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)}(x-x_1)(x-x_2). \end{aligned}$$

在解题时,可根据条件选择不同的函数形式来解题.

二、二次函数的图象与性质

二次函数 $y=f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象是一条抛物线.

当 $a>0$ 时，抛物线的开口向上，图象在区间 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上 y 随着 x 的增大而减小（单调递减）；图象在区间 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上 y 随着 x 的增大而增大（单调递增）. 因此，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$f(x)$ 有最小值 $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

当 $a<0$ 时，抛物线的开口向下，图象在区间 $\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right]$ 上 y 随着 x 的增大而增大（单调递增）；图象在区间 $\left[-\frac{b}{2a},+\infty\right)$ 上 y 随着 x 的增大而减小（单调递减）. 因此，当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$f(x)$ 有最大值 $f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

解题时，若画抛物线的草图，则要体现抛物线的下列特征：对称轴、顶点位置、开口方向、与坐标轴的交点等.

例 1 （1）设抛物线 $y=2x^2$，把它向右平移 p 个单位，或向下平移 q 个单位，都能使抛物线与直线 $y=x-4$ 恰好有一个交点，求 p、q 的值.

（2）把抛物线 $y=2x^2$ 向左平移 p 个单位，向上平移 q 个单位，则得到的抛物线经过点 $(1,3)$ 和 $(4,9)$，求 p、q 的值.

（3）把抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 向左平移 3 个单位，向下平移 2 个单位后，所得抛物线为 $y=ax^2$，其图象经过点 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，求原解析式.

解 （1）抛物线 $y=2x^2$ 向右平移 p 个单位后，得到 $y=2(x-p)^2$. 由

$$\begin{cases} y=2(x-p)^2, \\ y=x-4, \end{cases}$$

得方程 $$2(x-p)^2=x-4,$$

即 $$2x^2-(4p+1)x+2p^2+4=0.$$

因为抛物线与直线恰好有一个交点，所以上述方程有两个相同的实数根，故判别式

$$\Delta=(4p+1)^2-4\times2\times(2p^2+4)=0,$$

得 $$p=\frac{31}{8},$$

这时的交点为 $\left(\frac{33}{8},\frac{1}{8}\right)$.

抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 q 个单位，得到抛物线 $y=2x^2-q$，于是得方程

$$2x^2 - q = x - 4,$$

即 $$2x^2 - x + (4 - q) = 0,$$

该方程有两个相同的实数根，故判别式

$$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (4 - q) = 0,$$

得 $q = \frac{31}{8}$，这时的交点为 $\left(\frac{1}{4}, -\frac{15}{4}\right)$.

(2) 把 $y = 2x^2$ 向左平移 p 个单位，向上平移 q 个单位，得到的抛物线为 $y = 2(x + p)^2 + q$. 于是，由题设得

$$\begin{cases} 3 = 2(1 + p)^2 + q, \\ 9 = 2(4 + p)^2 + q, \end{cases}$$

解得 $$\begin{cases} p = -2, \\ q = 1, \end{cases}$$

即抛物线向右平移了两个单位，向上平移了一个单位.

(3) 首先，抛物线 $y = ax^2$ 经过点 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$，可求得 $a = -\frac{1}{2}$，设原来的二次函数为

$$y = -\frac{1}{2}(x - h)^2 + k,$$

可得 $$\begin{cases} -h + 3 = 0, \\ k - 2 = 0, \end{cases}$$

解得 $$\begin{cases} h = 3, \\ k = 2, \end{cases}$$

所以原二次函数为

$$y = -\frac{1}{2}(x - 3)^2 + 2,$$

即 $$y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{5}{2}.$$

说明 将抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 向右平移 p 个单位，得到的抛物线是 $y = a(x - p)^2 + b(x - p) + c$；向左平移 p 个单位得到 $y = a(x + p)^2 + b(x + p) + c$；向上平移 q 个单位，得到 $y = ax^2 + bx + c + q$；向下平移 q 个单位得到 $y = ax^2 + bx + c - q$.

例 2 若抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴只有一个公共点，且过点 $A(m, n)$，$B(m-8, n)$，则 $n=($　　$)$.（全国初中数学竞赛）

A．8　　　　B．12　　　　C．16　　　　D．24

分析 根据抛物线过点 A、B，且 A、B 纵坐标相等，并且抛物线与 x 轴只有一个公共点，可以用 m 来表示 b、c.

解 依题意，有 $n=m^2+bm+c=(m-8)^2+b(m-8)+c$，于是可得 $b=8-2m$.

因为抛物线 $y=x^2+bx+c$ 与 x 轴只有一个公共点，所以 $b^2-4c=0$，所以

$$c=\frac{1}{4}b^2=(4-m)^2.$$

因此 $n=m^2+bm+c=m^2+(8-2m)m+(4-m)^2=16$.

例 3 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c$ 满足条件：$f(0)=2$，$f(1)=-1$，且其图象在 x 轴上所截得的线段长为 $2\sqrt{2}$. 求这个二次函数的解析式.

解 由 $f(0)=2$，$f(1)=-1$，得

$$\begin{cases} c=2, \\ a+b+c=-1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} c=2, \\ b=-(a+3), \end{cases}$$

因此

$$f(x)=ax^2-(a+3)x+2.$$

设图象与 x 轴的交点坐标为 $(x_1, 0)$，$(x_2, 0)$，则

$$\begin{aligned} 2\sqrt{2} &= |x_1-x_2| \\ &= \sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+3}{a}\right)^2-4\times\frac{2}{a}}, \end{aligned}$$

整理得

$$7a^2+2a-9=0,$$

则

$$a=1 \text{ 或 } a=-\frac{9}{7}.$$

所以

$$f(x)=x^2-4x+2,$$

或者

$$f(x)=-\frac{9}{7}x^2-\frac{12}{7}x+2.$$

例 4　已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的一段图象如图 2-1 所示.

(1) 确定 a、b、c 的符号;

(2) 求 $a+b+c$ 的取值范围.

解　(1) 由抛物线开口向上,所以 $a>0$. 又抛物线经过点 $(0, -1)$,所以 $c=-1<0$. 因为抛物线的对称轴在 y 轴的右侧,从而 $-\dfrac{b}{2a}>0$,结合 $a>0$ 便可知 $b<0$.

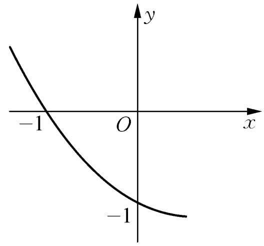


图 2-1

所以 $a>0$, $b<0$, $c<0$.

(2) 设 $f(x)=ax^2+bx+c$,由图象及(1)可知

$$\begin{cases} f(-1)=a-b+c=0, \\ a>0, \\ b<0, \\ c=-1, \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} a-b=1, \\ b<a<1, \\ -1<b<0, \\ c=-1. \end{cases}$$

因为
$$a+b+c=(b+1)+b-1=2b,$$

所以
$$-2<a+b+c<0.$$

例 5　已知二次函数 $y=x^2+2mx-3m+1$ 的自变量 x 及实数 p、q 满足 $4p^2+9q^2=2$, $\frac{1}{2}x+3pq=1$,且 y 的最小值为 1,求 m 的值.(全国初中数学竞赛)

分析　本题的关键是利用 $4p^2+9q^2=2$, $\frac{1}{2}x+3pq=1$ 这两个条件,构造出关于 $2p$、$3q$ 为根的一元二次方程,从而求出自变量 x 的范围,再通过自变量的取值范围和对称轴的位置关系,求出 m 的值.

解　由条件 $(2p+3q)^2=2+12pq$, $6pq=2-x$,得

$$2p\times 3q=2-x,\ 2p+3q=\pm\sqrt{6-2x},$$

则 $2p$、$3q$ 为关于 t 的方程 $t^2\mp\sqrt{6-2x}\cdot t+2-x=0$ 的两个实根.

故 $\Delta=(6-2x)-4(2-x)=2x-2\geqslant 0\Rightarrow x\geqslant 1$.

又 $6-2x\geqslant 0\Rightarrow x\leqslant 3$,所以 $1\leqslant x\leqslant 3$.

等价于当 $1\leqslant x\leqslant 3$ 时,二次函数 $y=x^2+2mx-3m+1$ 的最小值为 1,求 m 的值.

(1) 当 $m\leqslant -3$ 时,则 $x=3$ 时 y 取最小值,即

$$9+6m-3m+1=1\Rightarrow m=-3;$$

(2) 当 $-3<m<-1$,即 $-m^2-3m+1=1$,无解;

(3) 当 $m\geqslant -1$ 时,则 $x=1$ 时 y 取最小值,即

$$1+2m-3m+1=1\Rightarrow m=1.$$

综上,$m=-3$ 或 $m=1$.

例 6 证明:无论 a 取何实数值,抛物线 $y=x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4}$ 恒过定点,而且这些抛物线的顶点都在一条确定的抛物线上.

证明 由

$$\begin{aligned} y &= x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4} \\ &= x^2+x+\frac{1}{4}+a\left(x+\frac{1}{2}\right) \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+a\left(x+\frac{1}{2}\right), \end{aligned}$$

可知,当 $x=-\frac{1}{2}$ 时,$y=0$,即抛物线恒过定点 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$.

下面求抛物线的顶点:

因为

$$\begin{aligned} y &= x^2+(a+1)x+\frac{1}{2}a+\frac{1}{4} \\ &= \left(x+\frac{a+1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}a^2, \end{aligned}$$

所以抛物线的顶点坐标为 $\left(-\frac{a+1}{2},-\frac{1}{4}a^2\right)$,即有

$$\begin{cases} x=-\dfrac{a+1}{2}, \\ y=-\dfrac{1}{4}a^2, \end{cases}$$

消去变量 a,就得到 $y=-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=-x^2-x-\frac{1}{4}$,

这说明原抛物线的顶点都在一条确定的抛物线 $y=-x^2-x-\frac{1}{4}$ 上.

例 7 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$(b 为整数)图象上任意点均不在 x 轴下方,该图象与 y 轴的交点为 C,顶点为 E,对称轴在直线 $x=c-\frac{1}{12}$ 的右侧,记 $t=\frac{a+2b+12c}{a}$.

(1) 求 t 的最小值;

(2) 当 t 取得最小值,且 $CE>\frac{5}{24}$,求二次函数的解析式.(天津市未来之星数学邀请赛)

分析 (1) t 的表达式中有 3 个字母,一般求最小值是把表达式转化为单变量,所以解题的关键是如何消元和转化;

(2) 利用第一小题的结论,再通过 b 为整数,先求出 b 的值,最后利用 $CE>\frac{5}{24}$ 来检验.

解 (1) 根据题意得:$a>0$, $b^2-4ac\leqslant 0$,则 $c\geqslant\frac{b^2}{4a}$.

故

$$\begin{aligned}t=\frac{a+2b+12c}{a}&\geqslant\frac{a+2b+12\,\frac{b^2}{4a}}{a}\\&=1+2\left(\frac{b}{a}\right)+3\left(\frac{b}{a}\right)^2\\&=3\left(\frac{b}{a}+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

当 $a=-3b$ 时,且 $c=\frac{b^2}{4a}=-\frac{b}{12}$ 时,t 取最小值$\frac{2}{3}$.

(2) 由二次函数图象的对称轴在直线 $x=c-\frac{1}{12}$ 的右侧,知

$$-\frac{b}{2a}>c-\frac{1}{12},$$

把 $a=-3b$, $c=-\frac{b}{12}$ 代入,得$\frac{1}{6}>-\frac{1}{12}b-\frac{1}{12}$,可知 $b>-3$.

又 $a=-3b$, $a>0$,得 $b<0$,所以 $b=-1$ 或 -2.

当 $b=-1$ 时,得 $a=3$, $c=\frac{1}{12}$.

故 $y=3x^2-x+\frac{1}{12}$,所以 $C\left(0,\ \frac{1}{12}\right)$, $E\left(\frac{1}{6},\ 0\right)$,因此 $CE=\frac{\sqrt{5}}{12}<\frac{5}{24}$;(舍去)

当 $b=-2$ 时,得 $a=6$, $c=\frac{1}{6}$,故 $y=6x^2-2x+\frac{1}{6}$,所以 $C\left(0, \frac{1}{6}\right)$, $E\left(\frac{1}{6}, 0\right)$,因此 $CE=\frac{\sqrt{2}}{6}>\frac{5}{24}$.

故所求二次函数的解析式为 $y=6x^2-2x+\frac{1}{6}$.

例 8 当二次函数 $f(x)=a(x-m)^2+n(a\neq 0)$ 与 x 轴的两交点和函数图象的顶点所围成的三角形为顶角是 $120°$ 的等腰三角形时,求 a、n 应满足的关系式.

解 设二次函数 $f(x)=a(x-m)^2+n$ 与 x 轴的两交点分别为 A、B,顶点为 C,过 C 作 x 轴的垂线交于点 D,要使所围成的 $\triangle ABC$ 为有一个角为 $120°$ 的等腰三角形,则 $\angle A=30°$, $AC=2CD$, $AB=2\sqrt{3}CD$, $AD=\sqrt{3}CD$,且 $an<0$.

又因为 C 点纵坐标为 n,所以 $f(x)$ 与 x 轴交于点 $(m\pm\sqrt{3}n, 0)$,因而

$$a(m\pm\sqrt{3}n-m)^2+n=0,$$

则

$$3an^2+n=0.$$

当 $n=0$ 时,不符合题意,所以 $3an=-1$.

故当 $3an=-1$ 时,二次函数 $f(x)=a(x-m)^2+n$ 与 x 轴的两交点和顶点所围成的三角形为有一个角为 $120°$ 的等腰三角形.

例 9 在平面直角坐标系 xOy 中,对称轴为直线 $x=1$ 的抛物线 $y=ax^2+bx+8$ 过点$(-2, 0)$.

(1) 求抛物线的表达式,并写出其顶点坐标;

(2) 现将此抛物线沿 y 轴方向平移若干个单位,所得抛物线的顶点为 D,与 y 轴的交点为 B,与 x 轴的负半轴交于点 A,过 B 作 x 轴的平行线交所得抛物线于点 C,若 $AC\parallel BD$,试求平移后所得抛物线的表达式.

解 (1) 因为点$(-2, 0)$关于直线 $x=1$ 的对称点为$(4, 0)$,所以抛物线的表达式可以表示为

$$y=a(x+2)(x-4).$$

根据常数项相等,得 $-8a=8\Rightarrow a=-1$.

所以 $y=-(x+2)(x-4)=-x^2+2x+8=-(x-1)^2+9$,顶点坐标为$(1, 9)$.

(2) 抛物线在上下平移过程中,对称轴保持不变,不妨设抛物线沿 y 轴向

上平移了 m 个单位，则得 $B(0, 8+m)$，$D(1, 9+m)$，则平移后的抛物线表达式为 $y=-(x-1)^2+9+m$.

因为 $BC \parallel x$ 轴，得 $C(2, 8+m)$.

由于 $B(0, 8+m)$、$D(1, 9+m)$ 两点间的水平距离和竖直距离都是 1，所以直线 BD 与 x 轴正半轴的夹角为 $45°$，又因为 $AC \parallel BD$，所以，直线 AC 与 x 轴正半轴的夹角也为 $45°$.

作 $CH \perp x$ 轴于点 H，由 $CH = AH$，得 $8+m=2-x_A$，所以 $A(-6-m, 0)$.

把点 A 的横坐标代入 $y=-(x-1)^2+9+m$，得

$$-(-6-m-1)^2+9+m=0,$$

整理得 $m^2+13m+40=0$，解得 $m=-5$ 或 $m=-8$.

① 当 $m=-5$ 时，平移后抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3$；

② 当 $m=-8$ 时，即抛物线向下平移了 8 个单位，此时 $B(0, 0)$，这和抛物线与 x 轴的负半轴相交矛盾，所以舍去.

故平移后所得抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+3$.

例 10 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$（其中 a 是正整数）的图象经过点 $A(-1, 4)$ 和 $B(2, 1)$，且与 x 轴有两个不同的交点，求 $b+c$ 的最大值.

解 由函数经过点 $A(-1, 4)$、$B(2, 1)$，则有

$$\begin{cases} a-b+c=4, \\ 4a+2b+c=1, \end{cases}$$

解得
$$\begin{cases} b=-a-1, \\ c=3-2a. \end{cases}$$

因为二次函数与 x 轴有两个不同交点，则

$$\Delta=b^2-4ac>0,$$

即
$$(-a-1)^2-4a(3-2a)>0,$$

整理为
$$(9a-1)(a-1)>0,$$

解得
$$a<\frac{1}{9} \text{ 或 } a>1.$$

由于 a 为正整数，所以 $a \geqslant 2$.

又因为 $b+c=-3a+2 \leqslant -4$，且当 $a=2$、$b=-3$、$c=-1$ 时，满足题意，故 $b+c$ 的最大值为 -4.

例 11 某学生为了通过描点作出函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象,先取自变量 x 的 7 个值满足 $x_1<x_2<\cdots<x_7$,且 $x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=x_7-x_6$,再分别算出对应的 y 值,列出表 1.

表 1

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
y	51	107	185	285	407	549	717

但由于粗心算错了其中的一个 y 值,请指出算错的是哪一个值?正确的值是多少?并说明理由.(上海初中数学竞赛)

解 设 $x_2-x_1=x_3-x_2=\cdots=x_7-x_6=d$,且 x_i 对应的函数值为 y_i,则

$$\begin{aligned}\Delta_k&=y_{k+1}-y_k\\&=(ax_{k+1}^2+bx_{k+1}+c)-(ax_k^2+bx_k+c)\\&=a[(x_k+d)^2-x_k^2]+b[(x_k+d)-x_k]\\&=2adx_k+ad^2+bd,\end{aligned}$$

故 $$\Delta_{k+1}-\Delta_k=2ad(x_{k+1}-x_k)=2ad^2(\text{常数}).$$

由给出的数据,可得

y_k:	51		107		185		285		407		549		717
Δ_k:		56		78		100		122		142		168	
$\Delta_{k+1}-\Delta_k$:			22		22		22		20		26		

由此可见,549 是被算错的 y 值,其正确值应为 551.

例 12 设二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a>0)$,方程 $f(x)=x$ 的根为 x_1、x_2,且 $x_2-x_1>\dfrac{1}{a}$,当 $0<t<x_1$ 时,试比较 $f(t)$ 与 x_1 的大小关系.

解法一 已知方程 $f(x)=x$,整理为

$$ax^2+(b-1)x+c=0.$$

由韦达定理得

$$\begin{cases}x_1+x_2=-\dfrac{b-1}{a},\\[2mm]x_1x_2=\dfrac{c}{a},\end{cases}$$

根据题意 $a>0$，则

$$x_2-x_1>\frac{1}{a}>0,$$

所以 $$x_2-x_1=\frac{\sqrt{(b-1)^2-4ac}}{a}>\frac{1}{a},$$

得到 $$\sqrt{(b-1)^2-4ac}>1. \tag{*}$$

又 x_1 是方程 $f(x)=x$ 的根，则

$$x_1=\frac{-(b-1)-\sqrt{(1-b)^2-4ac}}{2a},$$

由(*)可知 $$x_1<\frac{-(b-1)-1}{2a}=-\frac{b}{2a}.$$

又因为 $f(x)$ 开口向上，在 $\left(-\infty,-\dfrac{b}{2a}\right]$ 是单调递减的，且由题意

$$0<t<x_1<-\frac{b}{2a},$$

因此 $$f(t)>f(x_1)=x_1.$$

解法二 由已知方程 $f(x)=x$ 的两根为 x_1、x_2，则有

$$f(x)-x=a(x-x_1)(x-x_2),$$

即 $$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)+x.$$

因为

$$\begin{aligned}f(t)-x_1&=a(t-x_1)(t-x_2)+t-x_1\\&=(t-x_1)[a(t-x_2)+1],\end{aligned}$$

由题意 $$0<t<x_1,$$

得 $$t-x_1<0, \tag{1}$$

又由 $$x_2-x_1>\frac{1}{a},$$

可得 $$x_2-t>\frac{1}{a},$$

$$a(x_2-t)>1,$$

图书在版编目(CIP)数据

一次函数与二次函数/李惟峰编著. —3 版. —上海：华东师范大学出版社，2019
(数学奥林匹克小丛书：第三版. 初中卷)
ISBN 978-7-5675-9540-8

Ⅰ. ①一…　Ⅱ. ①李…　Ⅲ. ①函数—初中—教学参考资料　Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 213921 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·初中卷
一次函数与二次函数(第三版)

编　　著　李惟峰
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　石　岩
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　8.25
字　　数　144 千字
版　　次　2020 年 4 月第三版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—35 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9540-8
定　　价　22.00 元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。