数学奥林匹克小丛书

第三版

初中卷 7

Mathematical Olympiad Series

组合趣题

周建新 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意. 这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版. 这套书,规模大、专题细. 据我所知,这样的丛书还不多见. 这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队. 他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动. 华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血. 我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1 计数问题

计数方法种类繁多，本章旨在介绍一些基本方法.

一、枚举计数

枚举计数就是把要计数的对象一一列举出来，最后计算总数的方法. 枚举计数的过程中，必须注意不重复也不遗漏，力求有序、有规律、逐一地进行.

例 1 把 22 分成两个质数之和共有几种不同分法?

分析 设 $a+b=22$，其中 a、b 都是质数. 不妨设 $a\leqslant b$，则 a 可能取 2、3、5、7 和 11，对每一个 a 值，若 b 也是质数，则得到一种分法.

解 设质数 a、b 满足 $a\leqslant b$，$a+b=22$，则 a 可取 2、3、5、7 和 11. 当 $a=2$ 时，$b=20$，不为质数；当 $a=3$ 时，$b=19$，为质数；当 $a=5$ 时，$b=17$，为质数；当 $a=7$ 时，$b=15$，不为质数；当 $a=11$ 时，$b=11$，为质数. 故不同分法有 3 组，即 $22=3+19=5+17=11+11$.

例 2 如图 1－1，沿着边或对角线不重复地从 A 走到 D，一共有多少种走法(这里不重复指走过的点和线段都不重复)?

解 不同走法有：$A\to D$，$A\to E\to D$，$A\to E\to C\to D$，$A\to B\to C\to D$，$A\to B\to C\to E\to D$. 一共有 5 种走法.

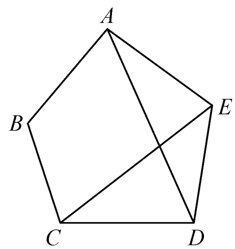
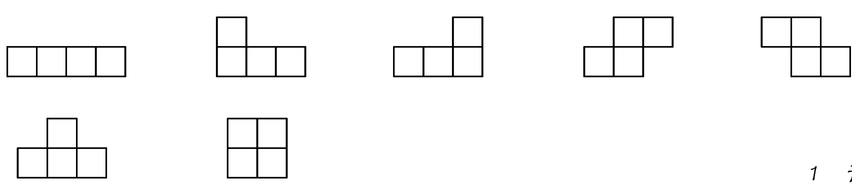


图 1－1

例 3 在一个网格纸(每个小方格都是边长为 1 的小正方形)中找出 4 个方格，使得任一个选出的方格都可以通过所选方格的公共边到达另外三个方格，则共有多少种不同选法(通过平移和旋转可以重合的图形认为是相同的)?

解 依题意可以画出不同选法如下. 故一共有 7 种不同选法.



例 4 在中国古代，有五行相克之说. 五行即金、木、水、火、土，而相克是金克木、木克土、土克水、水克火、火克金，从五行中找出互不相克的两行，共有几种不同选法?

分析 我们可以用“金→木”来表示金克木，从而有金→木→土→水→火→金，于是可以枚举出所有的选法.

解 可以选择的两行可以是：(金，土)，(金，水)，(木，水)，(木，火)，(土，火). 一共五种.

在后面的例题中，我们可能会用到两个符号：P_n^m 及 C_n^m($m\leqslant n$，m、n 均为自然数)，下面介绍这两个符号表示的意思.

(1) P_n^m 表示从 n 个元素中任取 m 个元素的排列数. 从 n 个不同的元素中取 m 个不同的元素按照一定次序排成一列，称为从 n 个元素中取 m 个元素的一个排列，所有这样不同排列的个数即为 P_n^m，且

$$P_n^m=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}\ (m\leqslant n),$$

其中 $n!=n(n-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$，并规定 $0!=1$.

证明如下：设 n 个元素为 $\{a_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$，而取的 m 个元素的排列为 b_1，b_2，$\cdots$，b_m，则 b_1 可以是任一 $a_j(1\leqslant j\leqslant n)$，故 b_1 有 n 种取法；而 b_1 取定后，b_2 只能取$\{a_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 中除去 b_1 后的任一元素，有 $n-1$ 种取法；类似地，b_3 有 $n-2$ 种取法，$\cdots$，b_m 有 $n-m+1$ 种取法，故 b_1，b_2，$\cdots$，b_m 的取法有 $n(n-1)\cdots(n-m+1)$ 种取法.

(2) C_n^m 表示从 n 个元素中任取 m 个元素的组合数. 从 n 个不同元素中取 m 个元素，不论顺序如何并成一组，称为从 n 个元素中取 m 个元素的一个组合，所有这样不同组合的个数即为 C_n^m，且

$$C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{1\times 2\times\cdots\times m}.$$

证明如下：首先从 n 个元素 $\{a_i\mid 1\leqslant i\leqslant n\}$ 中选 m 个元素的排列有 P_n^m 种，而对其中取定的 m 个元素$\{b_i\mid 1\leqslant i\leqslant m\}$ 的排列数有 $P_m^m=m!$种，对于这 $m!$种不同的排列，它们的 m 个元素都是相同，故属于同一个组合，所以从 n 个元素中取 m 个元素的组合个数有$\dfrac{P_n^m}{m!}$ 种.

例 5 求满足下列条件的所有五位数的个数：任意两个数位上的数字之差的绝对值不小于 2.

分析 首先应该求出满足条件的五个数字，然后对每一组数字进行排列，即可求出所有满足条件的五位数的个数.

解 设五位数为$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$，设

$$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\} = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},$$

且 $b_1 < b_2 < b_3 < b_4 < b_5$. 由条件要求 b_1 只能取 1 或 0.

若 $b_1 = 1$，则必有 $b_2 = 3$，$b_3 = 5$，$b_4 = 7$，$b_5 = 9$，此时满足条件五位数 $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$ 个数为 $P_5^5 = 5! = 120$.

若 $b_1 = 0$ 时，则$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$可以为$\{0, 3, 5, 7, 9\}$、$\{0, 2, 5, 7, 9\}$、$\{0, 2, 4, 7, 9\}$、$\{0, 2, 4, 6, 9\}$、$\{0, 2, 4, 6, 8\}$共 5 组. 对于每一组$\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$，由于 0 不能排在首位，$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5}$的个数为

$$P_5^5 - P_4^4 = 120 - 24 = 96,$$

从而共有 $96 \times 5 = 480$ 个.

所以满足条件的五位数的个数为 $(120 + 480 =)600$ 个.

例 6 在 1～2004 中，有多少个整数可以表示为$[2x]+[4x]+[6x]$的形式，这里 x 为实数. 注：$[x]$是实数 x 的高斯函数.

分析 设 $f(x)=[2x]+[4x]+[6x]$，则一个很重要的结论是

$$\begin{aligned} f\left(x+\frac{1}{2}\right) &= \left[2\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+\left[4\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]+\left[6\left(x+\frac{1}{2}\right)\right] \\ &= [2x+1]+[4x+2]+[6x+3] \\ &= f(x)+6, \end{aligned}$$

即某一整数可用 $f(x)$表示，则这个数加上 6 也可由 $f(x)$的形式表示，于是我们只需求出 1～6 中，有几个数可表示为 $f(x)$的形式.

解 设 $f(x) = [2x]+[4x]+[6x]$，则 $f\left(x+\dfrac{1}{2}\right) = f(x)+6$，故若整数 a 可表示为 $f(x)$形式，则 $a+6k$ $(k \in \mathbf{N})$ 也可表示为 $f(x)$形式，所以只需求得 1～6 中有几个数可表示成 $f(x)$形式.

当 $x \in \left[0, \dfrac{1}{6}\right)$时，$f(x) = 0$；

当 $x \in \left[\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{4}\right)$时，$f(x) = 1$；

当 $x \in \left[\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{3}\right)$时，$f(x) = 2$；

当 $x \in \left[\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$时，$f(x) = 3$；

又 $f\left(\frac{1}{2}\right)=6$，因此 1～6 中，有 1、2、3、6 可表示为 $f(x)$的形式，故 1～2004 中有 $2004\div6\times4=1336$ 个数可表示为 $f(x)$的形式.

例 7 设正整数 a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 满足条件：

(1) $1\leqslant a_1<a_2<a_3<a_4<a_5\leqslant20$；

(2) 任意两个数之差不小于 3.

求这样的数组$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$的组数.

分析 依题意有 $a_5>a_4+2$，$a_4>a_3+2$，$a_3>a_2+2$，$a_2>a_1+2$，即 $a_5>a_4+2>a_3+4>a_2+6>a_1+8\geqslant9$，故 $\{a_5, a_4+2, a_3+4, a_2+6, a_4+8\}$ 为 9 ～ 20 内不同的 5 个数，而相应的，由 9 ～ 20 内 5 个不同数也可以对应于 a_5，a_4+2，a_3+4，a_2+6，a_1+8.

解 依题意有 $9\leqslant a_1+8<a_2+6<a_3+4<a_4+2<a_5\leqslant20$，而对于 9～20 中五个数 $b_1<b_2<b_3<b_4<b_5$，则 b_1-8，b_2-6，b_3-4，b_4-2，b_5 满足条件(1)、(2)，即满足条件(1)、(2)的$\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$的个数为从 9～20 中取 5 数组的组数，也即 $C_{12}^5=792$.

例 8 设开始 $A=0$. 将一枚硬币掷出，若掷得正面，则 A 加上 1，否则 A 减去 1. 当 $A=3$ 或掷出次数达到 7 次时就不再掷了. 问当掷币停止时，不同掷币情况有多少种？

分析 当掷币停止了，要么 $A=3$，掷出次数不超；要么 $A\leqslant2$，且掷出次数已达到 7 次. 若 $A=3$，则最后一次必为正面，前面可以是 2 次正面或 3 次正面 1 次反面或 4 次正面 2 次反面；若 A 一直不大于 2，则当第 7 次掷出时，停止掷币.

解 若 $A=3$ 且仅掷了 3 次，此时 3 次全为正面，即仅有 1 种方法；

若 $A=3$ 且掷了 5 次，则前 4 次为 3 次正面、1 次反面. 但如果前 3 次已全部是正面，则 A 已达到了 3，故一次反面必出现在前 3 次中，所以有 3 种掷法；

若掷了 7 次才停止，则前 6 次掷后 A 不大于 2，此时有：

(i) 4 次正面、2 次反面. 此时不能前 3 次均为正面，也不能前 5 次为 4 次正面一次反面，故可能的掷法有($C_6^2-3-3=$)9 种；

(ii) 3 次正面、3 次反面. 此时不能前 3 次均为正面，故可能的掷法有($C_6^3-1=$)19 种；

(iii) 2 次正面、4 次反面或 1 次正面、5 次反面或全为反面，共有掷法($C_6^2+C_6^1+C_6^0=$)22 种.

但第 7 次掷出有正、反面两种，故共有(($9+19+22)\times2=$)100 种掷法.

综上，共有不同掷法($1+3+100=$)104 种.

例 9 有 3 个红球和 8 个蓝球排成一圈，任意两个红球之间至少有两个蓝球，问共有多少种不同排列方法（只要把圆旋转一下就重合的排法认为是同一种）？

分析 我们可以将红球和在它逆时针方向相邻的两个蓝球看成一个整体，例如当成一个白球，这样问题就转化为 3 个白球和两个蓝球的不同圆排列方法.

解 由于任意两个红球之间至少有两个蓝球，故每个红球的逆时针方向相邻的位置至少有两个蓝球，于是，将每个红球和它逆时针方向相邻的两个蓝球看成一个球，如白球，则满足条件的排列与三个白球、两个蓝球的圆排列是一一映射的.

而三个白球、两个蓝球的圆排列的不同排列方法有 2 种（枚举即可），故所求的不同排列种类为 2 种.

例 10 袋中装有红、白球各 3 个，从袋中拿出球，每次拿一个，要求拿出的白球个数不得多于红球，问有多少种不同拿法？

分析 由于要求拿出的白球个数不多于红球，故第一个球必是红球. 而若最后一球为红球，则拿出第 5 个球时白球数大于红球数，故第 6 个球必为白球. 其他 4 个球可以利用枚举法枚举.

解 依题意知，第 1 个球必为红球，第 6 个球必为白球，而其余 4 个球的不同拿法有：红红白白、红白红白、红白白红、白红红白、白红白红，一共有 5 种不同拿法.

例 11 求 100 以内仅能分解为两个素数之积的正整数的个数.

分析 可以对 1～100 进行因数分解，然后找出符合条件的数；也可以用两个素数相乘，将 100 以内的数挑出来. 显然，后一种方法简单一些.

解 50 以内素数有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47 共 15 个. 设分解素因数后为 $a \times b$，其中 $a \leqslant b$.

若 $a = 2$，则 b 可取这 15 个素数，即有 15 个数；

若 $a = 3$，则 b 可取 3～31 这 10 个素数，即有 10 个数；

若 $a = 5$，则 b 可取 5～19 这 6 个素数，即有 6 个数；

若 $a = 7$，则 b 可取 7、11、13 共 3 个素数，即有 3 个数；

若 $a \geqslant 11$，则 $a \times b \geqslant 11 \times 11 = 121 > 100$，不满足要求.

综上，满足条件的数有 $(15 + 10 + 6 + 3 =)34$ 个.

二、分类思想与加法原理

加法原理是指完成一件事情可以分为 m 类，第 1 类有 n_1 种方法，第 2 类

有 n_2 种方法……第 m 类有 n_m 种方法，则完成这件事情的不同方法的总数为

$$N=n_1+n_2+\cdots+n_m.$$

例 12 一位解放军打靶，他打了 3 枪，共 21 环，而每枪可以打 1～10 环，问他有多少种不同的打法(要求考虑打枪的次序)？

分析 设三枪分别为 a、b、c 环，则 $1\leqslant a,\ b,\ c\leqslant 10$，$a+b+c=21$，于是 $\max(a,\ b,\ c)\geqslant 7$. 将 $\{a,\ b,\ c\}$ 重排列为 $\{a',\ b',\ c'\}$ 且 $a'\leqslant b'\leqslant c'$. 对 $c'=7,\ 8,\ 9,\ 10$ 分类讨论即可得到总的打法数.

解 设三枪依次为 a、b、c 环，对 $\{a,\ b,\ c\}$ 重新排列为 $\{a',\ b',\ c'\}$ 且 $a'\leqslant b'\leqslant c'$.

若 $c'=7$，则 $a'=b'=7$，此时共有 1 种打法.

若 $c'=8$，则 $(a',\ b')$ 可取 $(5,\ 8)$、$(6,\ 7)$. 当 $(a',\ b')=(5,\ 8)$ 时，有 3 种打法；当 $(a',\ b')=(6,\ 7)$ 时，有 $(\mathrm{P}_3^3=)6$ 种打法. 即共有 9 种打法.

若 $c'=9$，则 $(a',\ b')$ 可取 $(3,\ 9)$、$(4,\ 8)$、$(5,\ 7)$、$(6,\ 6)$. 当 $(a',\ b')=(3,\ 9)$ 或 $(6,\ 6)$ 时，各有 3 种打法；当 $(a',\ b')=(4,\ 8)$ 或 $(5,\ 7)$ 时，各有 6 种打法. 即共有 18 种打法.

若 $c'=10$，则 $(a',\ b')$ 可取 $(1,\ 10)$、$(2,\ 9)$、$(3,\ 8)$、$(4,\ 7)$、$(5,\ 6)$. 当 $(a',\ b')=(1,\ 10)$ 时，有 3 种打法；当 $(a',\ b')$ 取其他值时，各有 6 种打法. 即共有 $(3+6\times 4=)27$ 种打法.

综上，由加法原理，一共有 $(1+9+18+27=)55$ 种不同打法.

例 13 由 1、2、3 这 3 个数组成六位数，要求相邻数位上的数字都不相同，有多少个满足条件的六位数？

分析 依题意知，不可能有一个数字出现在 4 个数位上，所以可能是两个数字分别出现 3 次，也可能是三个数字分别出现 1、2、3 次或者 2、2、2 次，再用加法原理对上述三种可能下的个数求和即可.

解 依题意知，不可能有某个数字出现在 4 个数位上，故每个数字至多出现 3 次.

若为两个数字各出现 3 次，那么两个数字必间隔排列，即有 2 个不同的六位数. 而这两个数字可以是 $(1,\ 2)$、$(1,\ 3)$ 或 $(2,\ 3)$，故有 $(2\times 3=)6$ 个不同的六位数.

若为三个数字且分别出现 1、2、3 次，首先各个数字出现次数不同的情况共有 $(\mathrm{P}_3^3=)6$ 种. 对于其中任一种，不妨设 1 出现 3 次，2 出现 2 次，3 出现 1 次，先将两个 2 与一个 3 排成一排(有 3 种排法)再与 3 个 1 间隔排列，可得 $(3\times 2=)6$ 个六位数；又将一个 2 和一个 3 组合，再和另一个 2 放在 3 个 1 的

三个数位之间，可得 121 231、121 321、123 121、132 121 等 4 个六位数. 故共有（$6\times(6+4)=$）60 个不同的六位数.

若为三个数字各出现 2 次，首先前两位是从 3 个数字中选 2 个排列，共有（$P_3^2=$）6 种排法；再设前两位为 12，则后四位可以为 1323、3123、3132、3213、3231 共 5 种，故不同的六位数共有（$6\times5=$）30 个.

综上，由加法原理可知，一共有满足条件的六位数（$6+60+30=$）96 个.

简解：$3\times2^5=96$.

例 14 在一个五条边长各不相同的五边形的边上染色，每条边可以染红、黄、蓝三种颜色中的一种，但不允许相邻边有相同颜色，问有多少种不同染色法？

分析 不妨将边编号为 a、b、c、d、e，ab、bc、cd、de、ea 为相邻边，则先不妨设 a、b 分别为红、黄色，再对后面三条边染色，则可得到所有不同染色方法.

解 将五条边依次编号为 a、b、c、d、e. 先假定 a 为红色，b 为黄色，则：

若 c 为红色，则（d，e）可以为（黄，蓝）、（蓝，黄）；

若 c 为蓝色，则（d，e）可以为（红，黄）、（红，蓝）、（黄，蓝）.

由加法原理知，当（a，b）为（红，黄）时，共有（$2+3=$）5 种染色法.

而（a，b）还可以为（红，蓝）、（黄，蓝）、（黄，红）、（蓝，红）、（蓝，黄），而每一种情况下都是对称的，故不同染色法总共有（$5\times6=$）30 种.

例 15 某届运动会的十一天的比赛中，××队拿了 16 块金牌，其中每天至少有一枚金牌，则××队拿金牌的不同情况可能有多少种（假设金牌都是一样的）？

分析 由于每天至少有一块金牌，则先给每天分配一块金牌，剩下的五块金牌如何分配就决定了不同的情况.

解 设第 $i(1\leqslant i\leqslant11)$ 天取得 a_i+1 块金牌，则

$$a_i\geqslant0,\ \sum_{i=1}^{11}a_i=5.$$

若 $\{a_i\}$ 中有一个为 5，则有（$P_{11}^1=$）11 种方法；

若 $\{a_i\}$ 中有 4 和 1，或 3 和 2，则各有（$P_{11}^2=$）110 种，于是共有（$110\times2=$）220 种；

若 $\{a_i\}$ 中有 3、1、1，或 2、2、1，则各有$\left(\frac{P_{11}^3}{2!}=\right)$495 种，于是共有（$495\times2=$）990 种方法；

若$\{a_i\}$中有 2、1、1、1,则有$\left(\dfrac{P_{11}^4}{3!}=\right)$1320 种;

若$\{a_i\}$中有 1、1、1、1、1,则有($C_{11}^5=$)462 种.

综上,由加法原理知,××队拿金牌的不同可能情况有 $11+220+990+1320+462=3003$ 种.

简解:挡板原理:n 个正整数和为 m ($m\geqslant n$),不同选法种类数为 C_{m-1}^{n-1}. 本题中 $m=16$, $n=11$,所以 $C_{16-1}^{11-1}=C_{15}^{10}$.

例 16 工厂需要 3 名钳工和 3 名车工,现有 12 人可供挑选,其中 5 人会钳工,5 人会车工,还有 2 人既会钳工也会车工,问工厂有多少种不同的挑选方法?

分析 解决问题的关键是确定两个既会钳工又会车工的工人是做钳工还是做车工,或是不被挑选,然后运用加法原理即可求出所有不同的挑选方法.

解 设既会钳工又会车工的两人为 a、b.

若 a、b 均未被挑选,则不同方法有($C_5^3\cdot C_5^3=$)100 种;

若 a、b 有一人做钳工,则不同方法有($C_2^1\cdot C_5^2\cdot C_5^3=$)200 种;

若 a、b 有一人做车工,也有不同方法 200 种;

若 a、b 两人均做钳工,则不同方法有($C_5^1\cdot C_5^3=$)50 种;

若 a、b 两人均做车工,则不同方法也有 50 种;

若 a、b 一人做钳工,一人做车工,则不同方法有($P_2^2\cdot C_5^2\cdot C_5^2=$)200 种.

综上,由加法原理知,工厂不同的挑选方法有($100+200+200+50+50+200=$)800 种.

例 17 形如"313","72 427"的正整数称为回文数,即这个数的各个数位前后颠倒过来后仍是这个数,求 1 亿内的回文数的个数.

分析 设回文数有 k 位,则前$\left[\dfrac{k+1}{2}\right]$位确定后,则后$\left[\dfrac{k}{2}\right]$位也随之确定,即 k 位回文数对应于$\left[\dfrac{k+1}{2}\right]$位的所有数,再利用加法原理,对 $k(=1, 2, \cdots, 8)$位回文数的个数求和即得所求回文数的个数.

解 设回文数有 k 位($1\leqslant k\leqslant 8$),则该 k 位回文数与它的前$\left[\dfrac{k+1}{2}\right]$位组成的数一一对应.

若 $k=1$, 则有 9 个回文数;

若 $k=2$,则$\left[\dfrac{k+1}{2}\right]=1$, 即可取 9 个回文数;

若 $k=3$，则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=2$，即可取 90 个回文数；

若 $k=4$，则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=2$，即可取 90 个回文数；

若 $k=5$，则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=3$，即可取 900 个回文数；

若 $k=6$，则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=3$，即可取 900 个回文数；

若 $k=7$，则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=4$，即可取 9000 个回文数；

若 $k=8$，则 $\left[\frac{k+1}{2}\right]=4$，即可取 9000 个回文数.

综上，由加法原理知，1 亿内共有回文数 $(9+9+90+90+900+900+9000+9000=)19\,998$ 个.

例 18 某足球队参加足球比赛，现在该队有 11 名队员在场上踢比赛，在场下还有 7 名替补队员. 比赛规定，比赛中，可以从替补队员中挑队员与场上队员交换替补上场，但至多可以换 3 名队员，而且已经换下的队员不能再替补上场. 如果整场比赛中没有队员被罚下，则比赛结束时，场上的 11 名队员的不同情况有多少种？

分析 依题意知，有可能留在场上的替补队员个数为 0、1、2、3.

解 若没有替补队员被替换上场，则有 1 种情况；

若有 1 名队员被替换上场，则有 $(C_7^1\times C_{11}^1=)77$ 种情况；

若有 2 名队员被替换上场，则有 $(C_{11}^2\times C_7^2=)1155$ 种；

若有 3 名队员被替换上场，则有 $(C_{11}^3\times C_7^3=)5775$ 种.

综上，由加法原理知共有不同情况 $(1+77+1155+5775=)7008$ 种.

三、分步处理与乘法原理

乘法原理是指完成一件事情要分 m 步，第 1 步有 n_1 种方法，第 2 步有 n_2 种方法……第 m 步有 n_m 种方法，则完成这件事情的不同方法的总数为

$$N=n_1\times n_2\times\cdots\times n_m.$$

例 19 所有含有数字 2 和 6 的六位数中，2 和 6 都仅含有一个的数有多少个？

分析 由于 2 和 6 出现且仅出现一次，其他 4 位可以是数字 0、1、3、4、5、7、8、9，而第一个数位不能为 0，利用乘法原理和加法原理即可求出所有满足条件的六位数的个数.

解 若2和6不出现在首位，则首位可取7个数，其他不为2和6的三位各可取8个数，故有($P_5^2\times 8^3\times 7=$)71 680个；

若2和6出现在首位，则首位可以是2或6，故有($2\times C_5^1\times 8^4=$)40 960个.

综上，所求六位数共有(71 680+40 960=)112 640个.

例20 在10×10的棋盘上放红、黄、蓝各一子，若黄子与红子不能同列，蓝子与黄子不能同行，则共有多少种不同的摆法(任两子均不能重叠放置)?

分析 依次将三个棋子分别放到棋盘上，分别计算放的方法，利用乘法原理即得所求结果. 其中，先放红子和蓝子，再放黄子，计算较为方便.

解 先放红子，有100种放置方法；再放蓝子，由于不能重叠放置，所以有红子位置以外的99种放置方法；最后放黄子，由于黄子与红子不同列，与蓝子不同行，故可在其余9行、9列中放置，有81种放置方法. 根据分步处理的乘法原理，总的摆法有(100×99×81=)801 900种.

例21 求满足下列两条件的所有八位数个数：

(1) 每个数位的数字为1～9中某一个；

(2) 任意连续三个数位组成的三位数能被3整除.

分析 一个数能被3整除的充要条件是该数各个数位上的数字之和能被3整除，从这个事实出发并利用乘法原理我们即可求出所有满足条件的八位数个数.

解 首先说明一个事实，即三位数仅由数字1～9组成，且能被3整除，若前两数位已确定，则这个三位数的第3位有且仅有3个可能值. 事实上，设前两个数位之和为a，则当$a\equiv 0 \pmod 3$时，第3位可取3、6、9；当$a\equiv 1 \pmod 3$时，第3位可取2、5、8；当$a\equiv 2 \pmod 3$时，第3位可取1、4、7.

于是，满足条件的八位数的首位可以取9个值，而第2位可取9个值，当前两位已确定后，由前面提到的事实知，后面6位上每个数位上的可能值均为3个，从而由乘法原理知，满足条件的八位数有($9\times 9\times 3^6=$)59 049个.

例22 小兔有12棵萝卜，它每天至少要吃一棵，则当萝卜吃完时，不同的吃萝卜的情形有多少种?

分析 由于不能确定几天吃完，而且前几天吃萝卜的个数对后几天又有影响，所以用枚举是不太现实的. 我们可以用递归加上数学归纳法求，也可以将问题转化为另一个问题，用一一映射来求.

解法 1 若将题设中 12 改为 n，所求吃萝卜的情形有 $F(n)$ 种，则 $F(1)=1$，$F(2)=2$，$F(3)=4$. 我们猜想：$F(n)=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

当 $n\leqslant 3$ 时，$F(n)=2^{n-1}$ 成立；

若当 $n\leqslant k$ 时均成立，则当 $n=k+1$ 时，若第一天吃 $i(1\leqslant i\leqslant k+1)$，则此时不同吃法为 $F(k+1-i)$（记 $F(0)=1$），于是所有不同吃法为

$$F(n)=\sum_{i=1}^{k+1}F(k+1-i)=\sum_{i=0}^{k}F(i)=1+\sum_{i=1}^{k}2^{i-1}=2^{k+1},$$

即对 $n=k+1$ 也成立，由数学归纳法知，$F(n)=2^{n-1}(n\in\mathbf{N}^*)$.

对于本题，$n=12$，则所求为 $F(12)=2^{11}=2048$.

解法 2 将 12 棵萝卜一字排开，编号为 1～12 号，小兔吃萝卜从 1 号开始依次吃，若某天最后吃完的是第 k 棵萝卜，则在第 k 棵萝卜后放一根筷子（其中 $1\leqslant k\leqslant 11$）. 因此对于每一种吃法，对应有若干根筷子在若干棵萝卜后，而对于筷子的每一种放法，对应一种吃萝卜的方法，即这种对应为一一映射. 于是问题转化为在 11 个位置上放筷子（每个位置至多放一根筷子），有多少种放法而每个位置，可以放筷子，也可以不放筷子，根据乘法原理知，不同的放筷子的方法有（$2^{11}=$）2048 种，即不同的吃萝卜的方法有 2048 种.

例 23 甲地到乙地有 5 条不同的路，某人从甲地到乙地，然后从乙地返回，再又去乙地，再又返回甲地，要求返回时不能走任何一次去乙地的路，问此人有多少种不同走法？

分析 运用乘法原理可解此题，但要考虑第二次从甲地到乙地的路是否与第一次从甲地到乙地的路重叠.

解 第一次从甲地到乙地有 5 种选择，从乙地回到甲地有 4 种选择，此时若第二次到乙地的路与第一次重叠，则返回时有 4 种选择. 若第二次到乙地不与第一次重叠，则有 4 种不同选择，而此时返回时有 3 种选择.

于是，由乘法原理和加法原理有 $5\times 4\times(4+4\times 3)=320$ 种不同走法.

例 24 在 $1\times n$ 的方格内写数字 $1\sim n$，要求 2 和 1 相邻，当 $1\sim k$ $(2\leqslant k\leqslant n-1)$ 填好后，$k+1$ 必须与已写好的数相邻，问有多少种不同填数方法.

解 依题意知 n 必定在最前或最后的方格中，故 n 可能有两种填法，而当 n 写好后，$n-1$ 也有两种填法……直到 2 也有两种填法，最后一个格子填上 1. 而这样的填法也包含所有的不同填法，故由乘法原理知，必有 2^{n-1} 种不同填法.

例 25 12 个元素的集合中选出 4 个 3 元子集,任两个 3 元子集均无交集,则不同取法有多少种?

解 第一步取出一个 3 元子集有 C_{12}^3 种取法,第二步从剩下 9 个数中取 3 个,有 C_9^3 种取法,第三步取出一个 3 元子集有 C_6^3 种取法,最后剩下一个 3 元子集. 由于不考虑顺序,故由乘法原理知共有 $\left(\frac{1}{4!}\cdot C_{12}^3\cdot C_9^3\cdot C_6^3=\right)$15 400 种不同取法.

例 26 在如图 1－2 所示的 8×8 的国际象棋盘中,有多少种方法从中选出 56 个格,满足:所有的黑格被选出,且每行与每列恰有七个格被选出?

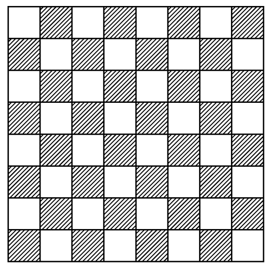


图 1－2

解 问题等价于在 8×8 棋盘中,选出 8 个白格,每行与每列中恰有一个格被选出.

棋盘上的所有白格是第 1、3、5、7 行与第 1、3、5、7 列交叉所得的 4×4 子式;以及第 2、4、6、8 行与第 2、4、6、8 列交叉所得的 4×4 子式. 由于每个子式中选择四个不同行不同列的白格有 4! 种方式,从而,总选法数为 $(4!)^2=576$.

例 27 NBA 常规赛有 30 支球队参加. 问:可否将这 30 支球队分为两个联盟:东部和西部,及适当指定任意两队间比赛的场数,使得每支队伍都恰好参加 82 场比赛,且东部队和西部队之间比赛的场数恰好是总比赛场数的一半?

解 答案为否. 用反证法,假设存在这样的方案. 设东部有 a 支球队,西部有 b 支球队,东部队间的比赛共有 x 场,西部队间的比赛共 y 场. 由已知,$a+b=30$,东部队与西部队间的比赛共 $(x+y)$ 场.

考虑东部所有队伍所参加比赛的次数之和. 一方面,每支队伍各参加了 82 场比赛,总次数为 $82a$;另一方面,东部队间的队内比赛会使东部队伍比赛次数总和增加 2,而东西两部队间的比赛会使东部队伍比赛次数总和增加 1. 从而,$82a=2x+(x+y)$.

同理,$82b=2y+(x+y)$.

两式相加,且 $a+b=30$,知:$x+y=41\times15$. 而 $x+y=82a-2x$ 是偶数,矛盾!故答案为否.

习 题 1

1 3 个红球和 3 个蓝球围成一圈，不同的排列方式有几种(旋转后可重合的算同一种)？

2 将数 1～5 排成一排，使任意 3 个相邻的数都不单调的不同排列个数有多少个？

3 1 个红球、2 个黄球和 3 个蓝球排成一列，没有两个同色球排在相邻位置上的不同排列有多少个？

4 将 1～5 排成一排，每个数均不大于它两侧(如果两侧都有数的话)的两个数的平均数，问这样的排列有多少个？

5 四个数 1、2、3、4 的排列 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 中，使任一个 $i(1 \leqslant i \leqslant 4)$ 都有 $a_i \neq i$ 的不同排列的个数有多少个？

6 在 1～12 中找出 3 个数，使得这 3 个数是某个公差大于 2 的等差数列中 3 项，则不同的取法有多少项？

7 在 10×10 的方格纸中选出若干个方格，组成一个正方形方格块，则不同的取法有多少种？

8 用 4 种给定颜色中的若干种染一个正方体，如果每个面涂一个颜色，而且相邻的面涂不同颜色，问有多少种不同涂法(若正方体经若干次翻转后相同视为同一种染法)？

9 长与宽是互质的正整数，面积是 20！的矩形有多少个？

10 设 a、b、c 是 0～9 的数字，将循环小数 $0.\dot{a}b\dot{c}$ 化成最简分数后，分子有多少种不同情况？

2 抽屉原理

抽屉原理的最简单形式如下：

若把 $n+1$ 个苹果放入 n 个不同的盒子中，则至少有一个盒子里有两个或两个以上的苹果.

上述抽屉原理首先由狄利克雷(Dirichlet，1805—1859)提出并在数论问题中使用.随后，更进一步地归纳为下述三种形式：

抽屉原理Ⅰ 把 $n+1$ 个元素按照任意确定的方式划分成 n 个集合，那么一定存在某个集合含有两个或两个以上的元素.

抽屉原理Ⅱ 把 m 个元素按照任意确定的方式划分成 n 个集合(m、n 为正整数)，那么一定存在某个集合含有 $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ 个或 $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ 个以上的元素.

抽屉原理Ⅲ 把无穷多个元素按照任意确定的方式划分成有限个集合，那么一定存在某个集合含有无穷多个元素.

抽屉原理Ⅱ的证明 用反证法.假设每个集合中至多含有 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 个元素，则 n 个集合中至多含有 $n\cdot\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 个元素.又

$$n\cdot\left[\frac{m-1}{n}\right]\leqslant n\cdot\frac{m-1}{n}=m-1,$$

即 n 个集合中至多含有 $m-1$ 个元素，这与已知条件有 m 个元素放入 n 个集合中，矛盾！假设不成立，故结论成立.

抽屉原理Ⅰ和Ⅲ的证明仿上可用反证法给出证明.

用抽屉原理解答数学问题的策略是：分析题意，构造“苹果”和“抽屉”，应用抽屉原理中某种形式.而应用抽屉原理解决问题的关键是恰到好处地构造“苹果”或“抽屉”.构造“抽屉”的方式有很多，如：剩余类、区间、几何图形、染色类等.

例 1 任给 12 个整数，证明：其中必存在 8 个数，将它们用适当的运算符号连起来后运算的结果是 3465 的倍数.

分析 注意到 $3465=11\times9\times7\times5$，由此可以联想到利用余数构造抽屉.

证明 一个整数被 11 除后的余数分别是 0，1，2，…，10，即剩余类构成 11 个抽屉. 由抽屉原理，12 个整数中必有两个数在同一剩余类，记为 a_1、a_2，则 $11\mid(a_1-a_2)$.

12 个整数中去掉 a_1、a_2 后，剩下 10 个整数. 这 10 个整数分入 9 的剩余类(共九个抽屉)中，由抽屉原理，必有两个数在同一剩余类，记为 a_3、a_4，则 $9\mid(a_3-a_4)$.

剩下的 8 个整数分入 7 的剩余类，由抽屉原理，必有两个数在同一剩余类，记为 a_5、a_6，则 $7\mid(a_5-a_6)$.

最后余下的 6 个整数分入 5 的剩余类，由抽屉原理，必有两个数在同一剩余类，记为 a_7、a_8，则 $5\mid(a_7-a_8)$.

因此，$(a_1-a_2)(a_3-a_4)(a_5-a_6)(a_7-a_8)$ 能被 3465 整除，即存在 8 个数，将它们用适当的运算符号连起来后，运算的结果是 3465 的倍数.

注 这里构造的“抽屉”是“剩余类”.

例 2 从 1 至 138 共 138 个正整数中任取 11 个互异的数，证明：在取定的 11 个数中一定有两个互异的正整数，它们的比值 k 满足 $\frac{2}{3}\leqslant k\leqslant\frac{3}{2}$.

分析 将 1～138 的正整数分组(即构造抽屉)，满足同一组中任意两数的比值介于$\frac{2}{3}$至$\frac{3}{2}$之间，且组数不多于 10 个.

证明 将 1 至 138 共 138 个正整数分成 10 组，即

$$\begin{aligned}&A_1=\{1\},\ A_2=\{2,3\},\ A_3=\{4,5,6\},\ A_4=\{7,8,9,10\},\\&A_5=\{11,12,\cdots,16\},\ A_6=\{17,18,\cdots,25\},\\&A_7=\{26,27,\cdots,39\},\ A_8=\{40,41,\cdots,60\},\\&A_9=\{61,62,\cdots,91\},\ A_{10}=\{92,93,\cdots,138\},\end{aligned}$$

其中同一组中任意两数比值介于$\frac{2}{3}$至$\frac{3}{2}$之间(事实上，只须证明每组中最大数与最小数之比不超过$\frac{3}{2}$，即 $\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$，$\frac{10}{7}<\frac{3}{2}$，$\frac{16}{11}<\frac{3}{2}$，$\frac{25}{17}<\frac{3}{2}$，$\frac{39}{26}=\frac{3}{2}$，$\frac{60}{40}=\frac{3}{2}$，$\frac{91}{61}<\frac{3}{2}$，$\frac{138}{92}=\frac{3}{2}$).

由抽屉原理知，任取 11 个数中至少有两个数属于同一组，从而这两个数之比介于$\frac{2}{3}$至$\frac{3}{2}$之间.

注　这里构造的“抽屉”是“区间”.

例 3　在 3×4 的长方形中，任意放置 6 个点. 证明：可以找到两个点，它们的距离不大于$\sqrt{5}$.

分析　若简单地设计抽屉为 1×2 的长方形，这时每个区域内两点距离不超过其对角线之长$\sqrt{5}$. 但此时共有 6 个抽屉，还不能用抽屉原理. 因此，必须改变抽屉形状，一共只构造五个抽屉，且使每个抽屉内任意两点间的距离不大于$\sqrt{5}$.

证明　如图 2－1，把长方形划分为 5 个区域：五边形 $AA_1A_2D_2D_1$、五边形 $A_1BB_1B_2A_2$、五边形 $A_2B_2C_1C_2D_2$、四边形 $D_1D_2C_2D$、四边形 $B_1CC_1B_2$. 这五个区域形状有两类，而每个区域中任意两点之间的距离都不超过它们的最长对角线之长$\sqrt{5}$. 因此 6 个点放入此长方形内，必有两点在同一区域，从而它们的距离不大于$\sqrt{5}$.

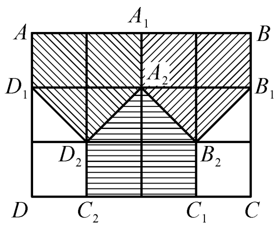


图 2－1

注　这里构造的“抽屉”是“几何图形”.

例 4　在 5 列 33 行的方格棋盘上染色，每格或染黑色或染白色，证明：至少有两行染的颜色完全一样.

分析　由于所证为至少有两行染的颜色一样，故抽屉应为一行方格的不同染法. 由于一行有 5 格，故有($2^5=$)32 种不同染法.

证明　对某一行，此行由 5 格组成，每格可染黑色或白色，故有($2^5=$)32 种不同染法.

但现有 33 行，故由抽屉原理知，必存在两行，它们染的颜色是一样的.

注　这里构造的“抽屉”是“染色类”.

构造“抽屉”的形式是多样的，再通过下面的例子提高我们构造“抽屉”解决问题的能力.

例 5　某班有 60 人，任意两人要么相互认识，要么相互不认识，证明：必有两个人，他们认识的人的个数是一样的.

分析　由于证明存在两人认识的人数一样，我们可以将认识人的不同的

个数设为抽屉，而 60 人中每人认识的人数可以是 0，1，…，59，60 个抽屉 60 个人，还不能运用抽屉原理.

证明 班上 60 个人，班上的人可以认识 0 人，1 人，…，59 人，但若某人只认识 0 人，则必无人认识 59 人，若认识 59 人，则每人至少认识 1 人，故不管何种情况，60 人认识的不同人数至多为 59 种，而现在有 60 人，由抽屉原理知，必有两人认识的人数是一样的.

注 本题是根据每个人认识人的个数不同构造抽屉. 而在上述抽屉中有两个抽屉不同时存在，即两种极端情形的抽屉不同时存在. 仿照本题思路有更一般的结论：在任何一次聚会中，必有两个人，他们所认识的人一样多.

例 6 证明：任意 50 个整数中，或可找到两个数，它们的和或差是 100 的倍数，或可找到一个数，它的两倍是 100 的倍数.

分析 先对这 50 个数对 100 取模，则若有两个数之和或差或一个数的两倍为 100 倍数，则取模后也满足条件. 关键是如何构造抽屉. 由于两个数可以求和，也可以求差，故不妨将 $50+i$ 和 $50-i$ $(1\leqslant i\leqslant 49)$ 放在同一抽屉中，而 0 和 50 也放在同一抽屉中，从而有 50 个抽屉 (0，50)，(1，99)，(2，98)，(3，97)，…，(49，51). 此时有 50 个抽屉，但若 (0，50) 中有一个数，则它的两倍是 100 的倍数.

证明 对这 50 个数对 100 取模，则这 50 个数取模后都为 0～99 中某一个. 现构造抽屉 (0，50)，(1，99)，(2，98)，…，(49，51).

若 50 个数中有一个取模后在 (0，50) 中，则它的两倍是 100 的倍数；

若 50 个数取模后均不在 (0，50) 中，则必有两个数取模后在某一个 $(50-i,\ 50+i)$ (其中 $1\leqslant i\leqslant 49$) 中，如果这两个数取模后相同，那么它们之差为 100 的倍数，如果这两个数取模后不同，那么它们之和为 100 的倍数.

综上，证明了命题.

例 7 某次竞赛共有 122 名队员参赛，证明：这 122 人要么有 12 人来自不同学校，要么有一所学校至少有 12 名队员.

分析 可以利用抽屉原理，也可以运用反证法来证明.

证明 1 若有 12 人来自不同学校，已证明命题；

若仅有 11 所学校派队员参赛，由于 $\frac{122}{11}>11$，由抽屉原理知，必存在一所学校，队员至少有 12 人.

证明 2 用反证法. 假设命题不成立，即至多有 11 所学校派队员参赛，而每所学校至多有 11 人，则一共至多有 $(11\times 11=)$ 121 名队员参赛，而现在有 122 名队员参赛，矛盾！故假设不成立，命题得证.

例 8 有 17 座城市，每两座城市间要么有陆路、要么有水路、要么有飞机航线连接着，而且每两座城市间只有一条线路连接，证明：必存三座城市，它们之间的交通路线是一样的.

分析 对命题进行抽象化，命题可以改为 17 个点，每两点间有一条边相连，每条边染红、黄、蓝色中一色，现要证明存在一个同色三角形.

证明 将 17 座城市看成 17 个点，陆路、水路和飞机航线分别用红、黄和蓝三种颜色的边表示，则问题转化为证明存在同色三角形.

取一个点 B，则与该点相连的 16 条边中，由抽屉原理，必有一种颜色的边出现了 6 次. 设这 6 条边为红色，由它们相连的 6 个点为 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6.

若存在 $A_iA_j(1\leqslant i<j\leqslant 6)$ 为红色，则已有同色三角形 BA_iA_j；

若不存在 $A_iA_j(1\leqslant i<j\leqslant 6)$ 为红色，则 A_1、A_2、A_3、A_4、A_5、A_6 之间只有黄色和蓝色边. 由我们熟知的定理易证，必存在一个同色三角形.

综上，即证明了命题.

例 9 设 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 25\}$，若某个集合由 A 中 5 个不同元素组成，则称之为 A 的一个"五元集"，证明：至多可以有 A 的 30 个"五元集"，使其中任意两个"五元集"的交集至多有一个数.

分析 我们要证明的是"至多可以有 30 个"，所以比较好的方法是用反证法，再利用抽屉原理来导出矛盾.

证明 用反证法. 设有 A 的 31 个"五元集"，使其中任意两个"五元集"的交集至多有一个数. 因为 31 个"五元集"共有$(31\times 5=)155$ 个数，由$\frac{155}{25}>6$知，必有某一个数 $i(1\leqslant i\leqslant 25)$在这 31 个"五元集"中至少出现了 7 次，对于含有 i 的这 7 个"五元集"，除 i 外其他数应该都不相同，于是 A 至少有$(4\times 7=)$ 28 个不同的数，而 A 中仅有 25 个元素，即得到矛盾！

故假设不成立，命题得证.

例 10 袋中有 109 个球，每次从袋中拿若干个(至少 1 个)，分 20 次拿完，证明：必定存在 3 次，这 3 次拿的球数相同.

分析 此问题不太易入手. 不妨用反证法. 假设拿相同数量的次数至多为 2 次，则 20 次拿球的个数至少为 $2\sum\limits_{i=1}^{10} i=110>109$，即可导出矛盾.

证明 假设拿相同数量的次数至多为 2 次，则 20 次后拿球的个数最少的情况为 1 个，2 个，…，10 个均拿 2 次，此时拿球个数为

$$2\sum_{i=1}^{10} i = 110 > 109.$$

这与题设矛盾!

故假设不成立,命题得证.

例 11 某次聚会共有 $4m+2$(m 为正整数)个同学,其中男生和女生各占一半.他们围成一圈,席地而坐,开篝火晚会.求证:必能找到一位同学两旁都是女生.

证明 若有一男生两旁都是女生,则结论成立.否则,没有一个男生的两旁都是女生,于是每一个男生至少与一个男生相邻,而男生有$\left(\frac{1}{2}(4m+2)=\right)2m+1$个,围成一圈后,至多只有 m 个间隔供 $2m+1$ 个女生插位而坐.由抽屉原理,至少有 3 位女生坐在同一间隔中,从而这 3 位女生中有一位女生的两旁都是女生.

例 12 有 8 个点,每两个点之间连一条有向线段(单向的),证明:必存在 4 个点 A、B、C、D,其中 A 指向 B,B 指向 C,C 指向 D.

证明 8 个点之间共有($C_8^2=$)28 条线段,即 28 条有向线段从 8 个点射出,由于 $28=3\times8+4$,故必有一个点 A,从 A 至少射出 4 条有向线段,射向 4 个点.在这 4 个点中,同上分析知,必有一个点 B,从 B 至少射出 2 条有向线段,射向 2 个点.在这 2 个点之间的有向线段设为 C 到 D.那么所得 A、B、C、D 四点满足 A 到 B,B 到 C,C 到 D.

例 13 证明:17 个整数中必可找到 5 个数,这 5 个数之和为 5 的倍数.

证明 这 17 个数可以按除以 5 所得余数分为 5 类,分别为 $5k$、$5k+1$、$5k+2$、$5k+3$、$5k+4$ 的形式.

若 5 类数中每类都至少有一个数,那么每类任取一个数相加为 5 的倍数.

否则至多有 4 类,由抽屉原理,必有一类至少有 5 个数,取此类中 5 个数,则这 5 个数之和为 5 的倍数.

故总能找到 5 个数,它们之和为 5 的倍数.

例 14 是否存在 5 个不同的正整数,使得它们中的任何三个数之和是一个质数?

解 不存在.

设 a_1, a, …, a_5 是 5 个互异的正整数,易知其中任意 3 个不同的正整数之和均大于 3.

按模 3 将这 5 个数分成剩余类:余数为 0、1、2.

若这 5 个数中有三个数分别属于三个不同的剩余类，不妨设 $a_1 \equiv 0 \pmod 3$，$a_2 \equiv 1 \pmod 3$，$a_3 \equiv 2 \pmod 3$，则

$$a_1 + a_2 + a_3 \equiv 0 \pmod 3,$$

即

$$3 \mid (a_1 + a_2 + a_3).$$

又 $a_1 + a_2 + a_3 > 3$，因此，$a_1 + a_2 + a_3$ 是合数.

若这 5 个数中只能分成两个剩余类. 由于 $5 = 2 \times 2 + 1$，结合抽屉原则，必有三个数在同一个剩余类中，不妨设 $a_1 \equiv a_2 \equiv a_3 \pmod 3$，同理可知，$a_1 + a_2 + a_3$ 是合数.

综上述两种情况，总有三个数之和不是一个质数. 即不存在 5 个不同的正整数，使得它们中的任何三个数之和是一个质数.

例 15 在 $2k \times 2k$ 的格子棋盘上，将其中 $3k$ 个格子涂黑，证明：可以去掉 k 行及 k 列，使得剩下的所有格子均为白格.

证明 $3k$ 个黑格在 $2k$ 行上，依次取黑格个数最多的 k 行，那么这 k 行中至少有 $2k$ 个黑格. 因为若所选 k 行中黑格数少于 $2k$，那么必有一行，其中黑格至多只有 1 个，而其余 k 行中黑格多于 k 个，从而必有一行其中黑格多于 1 个，这与选取的方法矛盾.

将所选取的 k 行去掉后，至多只有 k 个黑格了，故至多再去掉含这 k 个黑格的 k 列，必能去掉所有黑格. 从而去掉 k 行 k 列必将所有 $3k$ 个黑格去掉了.

例 16 $n+1$ 个不超过 $2n$ 的正整数中，必有两个数，其中一个数是另一个数的倍数.

证明 每个正整数 S 都可以写成 $S = (2k+1) \cdot 2^t$ 形式，其中 $k \geqslant 0$ 为整数，$t \geqslant 0$ 也为整数. 将 $1, 2, \cdots, 2n$ 分在 n 个抽屉中，这 n 个抽屉为 $S_k = \{(2k+1) \cdot 2^t \mid t \geqslant 0\}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$，那么每一个抽屉中的任意两个数，其中必有一个数为另一个数的倍数. 而现在有 $n+1$ 个数，必有两个数在同一抽屉内，故必有一个数是另一个数的倍数.

例 17 由 $n(n \geqslant 1)$ 个已给素数的积(每个素数可以出现任意多次)组成 $n+1$ 个正整数，证明：这 $n+1$ 个正整数中必可取出若干个数，这些数的乘积是完全平方数.

证明 设这 n 个素数为 $p_1, p_2, \cdots, p_n$，而 $n+1$ 个正整数为 $m_j = p_1^{\alpha_{1j}} p_2^{\alpha_{2j}} \cdots p_n^{\alpha_{nj}}$ $(1 \leqslant j \leqslant n+1)$，则从 $n+1$ 个数中挑若干个数组成乘积的不同方式有 $2^{n+1}-1$ 种. 设这 $2^{n+1}-1$ 个不同乘积为 $S_i = p_1^{\beta_{1i}} p_2^{\beta_{2i}} \cdots p_n^{\beta_{ni}}$，由于

$\{\beta_{1i}, \beta_{2i}, \cdots, \beta_{ni}\}$中按各$\beta_{li}(1\leqslant l\leqslant n)$的不同奇偶性分类有$2^n$种，故可按奇偶性将$S_i$分到$2^n$个抽屉中，而$2^{n+1}-1>2^n$，故必有某个抽屉中至少有两个数，设为$S_i$和$S_k$，即

$$S_i = p_1^{\beta_{1i}} p_2^{\beta_{2i}} \cdots p_n^{\beta_{ni}},$$
$$S_k = p_1^{\beta_{1k}} p_2^{\beta_{2k}} \cdots p_n^{\beta_{nk}},$$

其中β_{li}和β_{lk} $(1\leqslant l\leqslant n)$奇偶性都相同，故$S_i \cdot S_k$为完全平方数，而$S_i$、$S_k$均由若干个$m_j$相乘，除去$S_i$、$S_k$中共有的$m_j$，余下的$m_j$的积仍然为完全平方数.

例 18 将平面上每一点都染黑、白两种颜色之一. 证明：存在这样两个相似三角形，它们相似比为 1∶1995，而且每个三角形的三个顶点是同色的.

证明 1 如图 2-2，在平面上作两个以O为圆心的同心圆，其半径之比为 1∶1995.

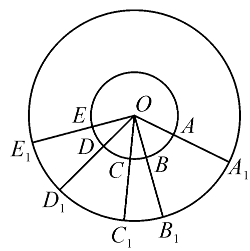


图 2-2

在小圆上任取 9 个点，每点都染黑白两色之一，由抽屉原理知，其中必有 5 个点同色，不妨设小圆上同色五点为A、B、C、D、E. 作射线OA、OB、OC、OD、OE交大圆于A_1、B_1、C_1、D_1、E_1. 这五个点亦染黑白两色之一，由抽屉原理知，其中必有 3 个点同色，设为A_1、B_1、C_1. 这时$\triangle ABC$与$\triangle A_1B_1C_1$相似，相似比为 1∶1995，且$\triangle ABC$及$\triangle A_1B_1C_1$分别是顶点同色的两个三角形.

证明 2 首先证明：在两染色的平面上，存在边长分别为a、$\sqrt{3}a$、$2a$(a为任意正实数)的三个顶点同色的直角三角形.

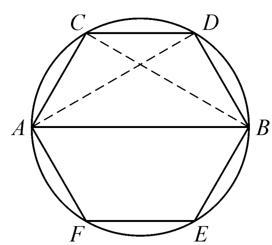


图 2-3

事实上，在两染色的平面上，存在长为$2a$(a为任意正实数)且两端点同色的线段，这是因为取一个边长为$2a$的正三角形ABC，对三个顶点A、B、C而言，一定有两个顶点同色，设点A和B同为黑色，故线段AB为所求. 现以此线段AB为直径作圆，并把圆周六等分，六个等分点依次为A、C、D、B、E、F，如图 2-3.

若点C、D、E、F中有一个点为黑色，不妨设点C为黑色，则$AC=a$，$BC=\sqrt{3}a$，$BA=2a$，Rt$\triangle ABC$即为所求. 否则，点C、D、E、F均为白色点，且$FE=a$，$ED=\sqrt{3}a$，$DF=2a$，则 Rt$\triangle DEF$即为所求.

其次，令$a=1$及$a=1995$，由上述引理知，存在两个直角$\triangle ABC$和$\triangle A_1B_1C_1$，它们的三个顶点分别同色，其边长分别为 1、$\sqrt{3}$、2 及 1995、

$1995\sqrt{3}$、1995×2，且 $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$.

注 这里 1995 可以是任意正实数. 证法 2 中得到更强结论：这两个顶点同色的三角形是直角三角形.

例 19 已知一个国际社团的成员来自六个国家，共有 1957 人，分别用数 1，2，3，…，1957 将这些成员编号. 试证此社团中必有一名成员，他的顺序号码数是他的两个同胞（来自同一国家称为同胞）的顺序号码数之和或是他的一个同胞的顺序号码数的二倍.

证明 用反证法. 假设结论不成立，则在六个国家的任一国家中，任一成员的顺序号码数都不等于同国另外两个成员的号码数之和，也不等于另一个成员的号码的 2 倍. 即任一国家中任两个成员的号码数之差一定不是该国中某成员的号码.

用 A、B、C、D、E、F 表示六个国家. 由于

$$1957=6\times 326+1,$$

故由抽屉原理知有一个国家（不妨设为 A 国）的成员至少有 327 人，其号码依次为

$$a_1>a_2>a_3>\cdots>a_{327}.$$

考察下列差数

$$a_1-a_2,\ a_1-a_3,\ \cdots,\ a_1-a_{327}. \tag{①}$$

由假设知号码为 $a_1-a_i(i=2,3,\cdots,327)$ 的成员不是 A 国人，只能是 B、C、D、E、F 五个国家的人. 因为 $326=5\times 65+1$，故由抽屉原理知，有一个国家（不妨设为 B 国）的成员至少有 66 人，其号码是①中形式，并设他们的号码依次为

$$b_1>b_2>\cdots>b_{66}.$$

考察下列差数

$$b_1-b_2,\ b_1-b_3,\ \cdots,\ b_1-b_{66}. \tag{②}$$

由假设知号码为 $b_1-b_i(i=2,3,\cdots,66)$ 的成员不是 B 国人，也不是 A 国人（因为差 b_1-b_i 也是 a_1，…，a_{327} 中两数之差），只能是 C、D、E、F 四个国家的人. 因为 $65=4\times 16+1$，故由抽屉原理知，有一个国家（不妨设为 C 国）的成员至少有 17 人，其号码是②中形式，并设他们的号码依次为

$$c_1>c_2>\cdots>c_{17}.$$

考察下列差数

$$c_1 - c_2,\ c_1 - c_3,\ \cdots,\ c_1 - c_{17}. \tag{③}$$

由假设知号码为 $c_1 - c_i (i = 2, 3, \cdots, 17)$ 的成员不是 C 国人，也不是 B 国人，也不是 A 国人（因为差 $c_1 - c_i$ 仍是 $a_1, \cdots, a_{327}$ 中两数之差），只能是 D、E、F 三个国家的人. 因为 $16 = 3 \times 5 + 1$，故由抽屉原理知，有一个国家（不妨设为 D 国）的成员至少有 6 人，其号码是③中形式，并设他们的号码依次为

$$d_1 > d_2 > \cdots > d_6.$$

考察下列差数

$$d_1 - d_2,\ d_1 - d_3,\ \cdots,\ d_1 - d_6. \tag{④}$$

由假设知号码为 $d_1 - d_i (i = 2, 3, \cdots, 6)$ 的成员不是 A、B、C、D 国人（因为差 $d_1 - d_i$ 仍是 D、C、B、A 国中两同胞号码数之差），只能是 E、F 两国的人. 不妨设其中至少 3 人是 E 国人，他们的号码依次是 $e_1 > e_2 > e_3$.

同理可知 $e_1 - e_2$，$e_1 - e_3$ 为号码的成员必是 F 国人，同时 $e_2 - e_3$ 为号码的人也只能是 F 国人. 而此时

$$(e_1 - e_2) + (e_2 - e_3) = e_1 - e_3,$$

这与假设相违！

故假设不成立，结论成立.

例 20　能否在 $n \times n (n \geqslant 3)$ 棋盘的每个方格填上数字 1、2、3，使得该棋盘的每行、每列和两条对角线上的数字之和互不相同.

解　不能.

用 W_n 表示已填上数字 1、2、3 的 $n \times n$ 的棋盘，设 a_i、$b_j (i, j = 1, 2, \cdots, n)$ 分别表示棋盘 W_n 的第 i 行以及第 j 列的 n 个数字的和，$c_k (k = 1, 2)$ 分别表示两条对角线上的 n 个数字之和. 易知对棋盘 W_n 而言，a_i、b_j、c_k 共有 $2n+2$ 个值，且 a_i、b_j、c_k 的值至少是 n，至多是 $3n$，不同的取值至多是 $2n+1$ 个（即从 n 至 $3n$）. 利用抽屉原理知，a_i、b_j、c_k 中至少有两个值是相同的. 因此，问题是否定的.

例 21　在正 2008 边形 $A_1A_2\cdots A_{2008}$ 的各顶点上随意填上 $1, 2, \cdots, 502$ 中的一个数，证明：一定存在矩形，其相对两顶点所填数之和相等.

证明　设正 2008 边形 $A_1A_2\cdots A_{2008}$ 的顶点 A_i 上所填的数为 $a_i (i = 1, 2, \cdots, 2008)$.

由于 $1 \leqslant a_i \leqslant 502 \ (i = 1, 2, \cdots, 2008)$，则

$$2 \leqslant a_i + a_{1004+i} \leqslant 502 \times 2 = 1004\ (i = 1, 2, \cdots, 1004).$$

由抽屉原理知，存在 $k \neq j$，使

$$a_k + a_{1004+k} = a_j + a_{1004+j}.$$

又因为 A_i 与 A_{1004+i}(i=1，2，…，1004)关于正 2008 边形 $A_1A_2\cdots A_{2008}$ 的中心成中心对称，且 A_iA_{1004+i} 为定值. 因此，顺次连结 A_k、A_j、A_{1004+k}、A_{1004+j} 四个顶点，得到的四边形对角线相等且互相平分；即存在矩形其相对两顶点所填数之和相等.

注　这里既构造了“苹果”又构造了“抽屉”. 后面两例也是如此.

例 22　将一个圆周分为 36 段，分别用 1，2，…，36 中的数对此 36 段圆弧标号，证明：不论如何标号，总存在相继的 3 段圆弧，其上标号之和至少是 56.

证明　设第 1 段弧，第 2 段弧，…，第 36 段弧上标的数分别是 a_1，a_2，…，a_{36}，那么

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_{36} = 1 + 2 + \cdots + 36 = 18 \times 37.$$

考察相继的 3 段圆弧上的标号之和，即 $a_1 + a_2 + a_3$，$a_2 + a_3 + a_4$，$a_3 + a_4 + a_5$，…，$a_{34} + a_{35} + a_{36}$，$a_{35} + a_{36} + a_1$，$a_{36} + a_1 + a_2$，共 36 个和(即 36 个抽屉). 又由于 $(a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + \cdots + (a_{35} + a_{36} + a_1) + (a_{36} + a_1 + a_2) = 3(a_1 + a_2 + \cdots + a_{36}) = 3 \times 18 \times 37 = 36 \times 55 + 18$，由抽屉原理，这 36 个和中必有一个和至少是 56. 即总存在相继的 3 段圆弧，其上标号之和至少是 56.

例 23　一个大学生在去年暑假用了 37 天学习高等数学，并遵循如下规则：

(1) 每天至少学习 1 小时，每天按整小时学习；

(2) 全部学习时间不超过 60 小时.

证明：此期间存在连续的若干天，该生学习时间总和为 13 小时.

证明　设 a_n($1 \leqslant n \leqslant 37$)表示前 n 天学习高等数学的总小时数，那么由规则知，a_n 是正整数，且

$$1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{37} \leqslant 60.$$

考察序列 a_1，a_2，…，a_{37} 以及 $a_1 + 13$，$a_2 + 13$，…，$a_{37} + 13$，共计 74 个数(即 74 个苹果)，又这 74 个数中最大数为 $a_{37} + 13 \leqslant 73$(即 73 个抽屉). 由抽屉原理知，必有两个数相等(由于 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{37}$，且 $a_1 + 13 < a_2 + 13 < \cdots <$

$a_{37}+13)$，从而存在 $i>j$，使得 $a_i=a_j+13$，即 $a_i-a_j=13$，这说明了第 $j+1$，$j+2$，…，i 天相继的日子里，该生学习时间总和为 13 小时.

例 24 n 个给定的正整数中，存在若干个数之和能被 n 整除.

证明 设 n 个正整数为 a_1，a_2，…，a_n. 考虑和 $\sum\limits_{i=1}^{m}a_i(m=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 被 n 除的余数是 1，2，…，$n-1$（若是余数为 0，结论成立）. 有 n 个和数（视为 n 个苹果），$n-1$ 个不同余数（视为 $n-1$ 个抽屉），由抽屉原理，有两个不同的和式（不妨设 $\sum\limits_{i=1}^{l}a_i$，$\sum\limits_{i=1}^{k}a_i(1\leqslant l<k\leqslant n)$）被 n 除的余数相同，从而

$$\sum_{i=l+1}^{k}a_i=\sum_{i=1}^{k}a_i-\sum_{i=1}^{l}a_i\equiv 0(\mathrm{mod}\ n).$$

例 25 已知半径为 1 的圆的内部共有 130 个互不相同的点，任意两点间有直线段连结. 证明：这些直线段中至少有 2019 条长度小于 $\sqrt{2}$.

证明 将一个圆平均分成四个扇形，如图 2 - 4. 每个扇形内部的任意两点距离小于 $\sqrt{2}$. 事实上，不妨设在第一象限扇形内部两点 A、B，$A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$，其中 x_1，y_1，x_2，$y_2\in[0,\ 1)$，则

$$AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}<\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

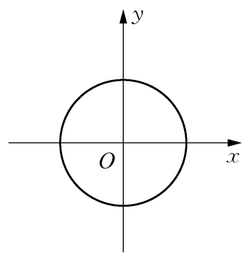


图 2 - 4

设每个扇形内部分别有 a、b、c、d 个点，且 $a+b+c+d=130$，则满足要求的点对个数至少为：

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_a^2+\mathrm{C}_b^2+\mathrm{C}_c^2+\mathrm{C}_d^2&=\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2+d^2)-\frac{1}{2}(a+b+c+d)\\&\geqslant\frac{1}{8}(a+b+c+d)^2-\frac{1}{2}(a+b+c+d)(\text{柯西不等式})\\&=2047.5>2019.\end{aligned}$$

例 26 已知平面上有六个半径不小于 1 的圆，它们两两不相交. 证明：若某个圆与这六个圆均相交，则该圆的半径不小于 1.

证明 设题中六个圆的圆心为 O_1，O_2，…，O_6，半径为 r_1，r_2，…，r_6. 再设与这六个圆均相交的圆 O 的半径为 r. 由抽屉原则，存在下标 i、j，使得 $\angle O_iOO_j\leqslant 60^\circ$.

由已知知，$O_iO_j\geqslant r_i+r_j$，$OO_i<r_i+r$，$OO_j<r_j+r$.

用反证法，假设 $r<1$，则

$$O_iO_j \geqslant r_i + r_j \geqslant r_i + 1 > r_i + r > OO_i,$$
$$O_iO_j \geqslant r_i + r_j \geqslant 1 + r_j > r + r_j > OO_j,$$

则 O_iO_j 是 $\triangle O_iOO_j$ 中唯一最长边. 故 $\angle O_iOO_j > 60°$,与假设矛盾. 因此, $r \geqslant 1$.

习 题 2

1 在任何凸 $2n(n\geqslant 2)$ 边形中,总有一条对角线不与任意一条边平行.

2 把正方形分成两个四边形,且小四边形面积与大四边形面积之比为 $2:3$ 的九条直线中,总有三条直线共点.

3 凸四边形 $ABCD$ 的每边长都小于 24,设点 P 是凸四边形 $ABCD$ 内的任一点,证明:总有一个顶点与 P 的距离小于 17.

4 平面上的任意点都染上红色或蓝色两色之一(称平面二染色). 证明:必有四个顶点同色的矩形.

5 平面上给定 25 个点,其中任意三点中至少有两点距离小于 1. 证明:总可以找出 13 个点,它们位于某一半径为 1 的圆内.

6 在 15×15 的方格纸中的每一个小方格内任意地写上 $1, 2, \cdots, 55, 56$ 中的一个数,求证:一定能找到 4 个小方格,它们的中心是一个平行四边形(包括退化的)的四个顶点,且平行四边形对角线两端的两个小正方形中数字之和相等.

7 有 40 个学生,每个学生在黑板上写上两个数,且任两个学生写的数中至少有一个数是相同的,证明:至少有一个数在黑板上至少出现过 27 次.

8 8 个学生分别解答 8 个同样的问题,结果发现,每个问题被 5 个学生解出,求证:其中必有 2 个学生,他们解出了所有 8 个问题.

9 在任意给出的 101 个互异的正整数中,可选出 11 个互异的正整数,使得它们的和能被 11 整除.

10 设整数 a 与 2、5 均互质,即 $2\nmid a$, $5\nmid a$. 证明:对任意正整数 n,总存在 a 的一个方幂以 $\underbrace{00\cdots 01}_{n\text{个数码}}$ 结尾.

11 平面上有两个点 A 和 B,过 A、B 的直线为 l,在 l 的一侧有 n 个点,证明:这 n 个点到 A、B 的距离至少有 $\sqrt{n}$ 个不同的数值.

12 在边长为 1 的正方形内放 7 个点,证明:必有两点之间的距离不大于 $\frac{\sqrt{13}}{6}$.

图书在版编目(CIP)数据

组合趣题/周建新编著. —3 版. —上海：华东师范大学出版社，2019
(数学奥林匹克小丛书. 初中卷)
ISBN 978 - 7 - 5675 - 9808 - 9

Ⅰ. ①组…　Ⅱ. ①周…　Ⅲ. ①组合数学－初中－题解
Ⅳ. ①G634. 625

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 228583 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·初中卷
组合趣题(第三版)

编　　著　周建新
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　周　俊
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021 - 60821666　行政传真 021 - 62572105
客服电话　021 - 62865537　门市(邮购)电话 021 - 62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787 × 1092　16 开
插　　页　1
印　　张　6.5
字　　数　113 千字
版　　次　2020 年 4 月第三版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—35 100
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5675 - 9808 - 9
定　　价　20.00 元

出 版 人　王　焰

(如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021 - 62865537 联系)

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206

2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422

3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244

4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349

5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454

6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。