数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 16

Mathematical Olympiad Series

组合数学

张 垚 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

组合数学历史悠久,早在几千年前,我国的《河图》、《洛书》中就已经涉及一些简单有趣的组合问题.近20年来,由于计算机科学、编码理论、规划论、数字通讯、试验设计等学科的迅猛发展,提出了一系列需要离散数学解决的理论和实际问题,加上组合数学自身的逻辑要求提出的问题以及其他数学分支向组合数学提出的问题,使得组合数学的研究十分活跃而富有成果.解决问题的方法和技巧更是千变万化,使这一门古老的数学分支成为一门充满了活力的数学学科.

数学竞赛中出现的组合问题往往表达形式简单明了,而求解这些问题却需要敏锐的观察力、丰富的想象力和必要的技巧,通常没有一个固定的解题模式可遵循,而且各种难易程度的问题都非常丰富,所以各种程度的智力训练和数学竞赛中,大多离不开组合问题.

本书主要按照全国高中数学联赛对组合问题的要求而编写,全书由三部分组成,第一部分为知识篇,着重介绍了全国高中联赛中涉及到的组合数学的有关知识.第二部分为方法篇,主要介绍了全国高中联赛中解组合问题的一些常用的思想方法.第三部分为问题篇,主要对全国高中联赛中出现得最多的几类问题,从解题思想方法上进行了初步的归纳和小结.

在例题和习题的选择方面,我们尽可能选编一些较新颖的,尤其是近几年国内外数学竞赛中相当于我国高中联赛水平的组合数学的试题,也包括了作者自己编拟的部分问题,还有个别中国数学奥林匹克(CMO)和国际中学生数学奥林匹克(IMO)中较易的问题.在本书中我们特别注意引导读者对解决问题的思想方法进行探索、分析和总结.希望通过这部分内容的学习,能使读者的数学修养以及解决有关数学竞赛中组合问题的能力有所提高.

编者

2004年8月

第二版前言

第二版与第一版比较,主要作了如下的一些修改:

(1) 删去了一些陈旧的例题与习题,其中一部分更换为近几年国内外数学竞赛中出现的一些有代表性的试题,从而使得全书在内容上更加新颖、实用,而篇幅略有减少;

(2) 改正了原书中出现的一些错误.

本书出版以来.很多参加数学竞赛培训的老师和学生热心地提出了一些宝贵的建议和意见,这对提高本书的质量有极大的帮助.借此机会向他(她)们致以深深的谢意,并热诚欢迎广大读者继续给本书提出批评和指正.

编者

2011 年 8 月

第三版前言

这次修订在保留原有章节编排体系的基础上，主要作了如下的一些修订：

(1) 将一些年代较远的例题与习题更换为近几年国内外数学竞赛中出现的有代表性的、新颖的组合数学试题，其难度相当于我国高中数学联赛的水平，也有个别的例题和习题选自中国数学奥林匹克(CMO)和国际数学奥林匹克(IMO)中较容易且有启发性的试题，此外还提供了编者在数学竞赛培训中编拟的少量有启发性的题目供读者参考. 在更换例题与习题的同时也注意删去一些较偏、较难的例题和习题. 在这次修订中，编者特别注意对例题和习题的解法进行加工和整理，望能有助于读者更方便地进行阅读，并且对有些例题与习题还给出了多种不同的解法，以帮助读者加深对问题的理解、开拓读者的思维能力.

(2) 改正了原书出现的一些错误.

本书第二版以来一直得到广大参加数学竞赛培训的老师和学生的关心与爱护，他们热心地对本书的编写提出一些宝贵的意见和建议，在此编者深深地表示感谢！并希望广大读者对本书继续提出批评和指正！

编者

2019 年 5 月

目　录

问 题 篇

知识篇

1 计数原理和计数公式

一、加法原理和乘法原理

加法原理 如果做一件事,完成它有 m 类不同的方法,在第 1 类方法中有 n_1 种不同的方法,在第 2 类方法中有 n_2 种不同的方法……在第 m 类方法中有 n_m 种不同的方法,那么完成这件事共有 $n_1+n_2+\cdots+n_m$ 种不同的方法.

乘法原理 如果做一件事,完成它需要 m 个步骤,做第 1 步有 n_1 种不同的方法,做第 2 步有 n_2 种不同的方法……做第 m 步有 n_m 种不同的方法,那么完成这件事共有 $n_1n_2\cdots n_m$ 种不同的方法.

例 1 从 1, 2, 3, …, 100 中任取 3 个数,使这 3 个数恰好成等差数列的不同取法有________种.(2014 年希望杯数学邀请赛(高二)试题. 原题为选择题)

解法一 设取出的 3 个数是首项为 a,公差为 d 的等差数列:a, $a+d$, $a+2d$,(a, d 均为正整数),则 $a+2d\leqslant 100$,于是 $1\leqslant d\leqslant\left[\frac{100-a}{2}\right]\leqslant\left[\frac{100-1}{2}\right]=49$. 对每一个确定的 d, a 有 $100-2d$ 种取法. 由加法原理得满足条件的 3 个数的不同取法共有

$$\sum_{d=1}^{49}(100-2d)=49\times 100-2\times\frac{49(49+1)}{2}=2450 \text{ 种}.$$

解法二 设取出的 3 个数分别是 a_1, a_2, a_3,它们构成公差为 d 的等差数列,于是 $a_2=\frac{a_1+a_3}{2}$ 可被 a_1 与 a_3 唯一确定,且 a_1 与 a_3 的奇偶性相同.

(1) 若 a_1 与 a_3 同为偶数,则有 C_{50}^2 种取法.

(2) 若 a_1 与 a_3 同为奇数,则也有 C_{50}^2 种取法.

由加法原理得满足条件的 3 个数的不同取法共有 $2C_{50}^2=2450$ 种.

例 2 已知集合 $A=\{x \mid 5x-a\leqslant 0\}$，$B=\{x \mid 6x-b>0\}$，$a$，$b\in\mathbf{N}$，且 $A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2, 3, 4\}$，则整数对$(a, b)$的个数为 （　　）

(A) 20　　(B) 25　　(C) 30　　(D) 42

（2006 年全国高中数学联赛试题）

解 $5x-a\leqslant 0\Rightarrow x\leqslant\frac{a}{5}$；$6x-b>0\Rightarrow x>\frac{b}{6}$. 要使 $A\cap B\cap\mathbf{N}=\{2, 3, 4\}$，其充要条件是 $\begin{cases}1\leqslant\frac{b}{6}<2,\\4\leqslant\frac{a}{5}<5.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}6\leqslant b<12,\\20\leqslant a<25,\end{cases}$ 故 b 有 C_6^1 种取法，a 有 C_5^1 种取法，由乘法原理得数对(a, b)的个数为 $C_5^1C_6^1=30$ 个，所以选 C.

二、无重复的排列与组合

排列 从 n 个不同元素中取 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素，按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列. 因为这个排列中无重复元素，故又叫做无重复的排列. 从 n 个不同元素中取 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素的排列的个数记为 A_n^m 或 P_n^m，则

$$A_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!},$$

其中 $m\leqslant n$，并约定 $0!=1$.

特别地，当 $m=n$ 时，从 n 个不同元素中取 n 个不同元素的排列，叫做 n 个不同元素的全排列. n 个不同元素的全排列的个数为

$$A_n^n=n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1=n!.$$

组合 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个不同元素并成一组，叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合. 因为这个组合中无重复元素，故又叫做无重复的组合. 从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的组合的个数记为 C_n^m 或 $\binom{n}{m}$，则

$$C_n^m=\frac{A_n^m}{A_m^m}=\frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

例 3 现安排 7 名同学参加 5 个运动项目，要求甲、乙两同学不能参加同一项目，每个项目都有人参加，每人只参加一个项目，则满足上述要求的不同的安排方案数为________（用数字作答）.（2011 年全国高中数学联赛第一试

试题）

解法一　由题设条件，满足条件的方案有 2 种情形：

(1) 有一个项目有 3 人参加时，则由乘法原理知，若不考虑甲、乙两人是否参加同一项目，则以 $C_7^3 \cdot 5!$ 种方案，且其中甲、乙两人都参加 3 人项目时有 $C_5^1 \cdot 5!$ 种方案，故由加法原理知，在这种情形下满足条件的方案数为 $C_7^3 \cdot 5! - C_5^1 \cdot 5! = (35-5) \cdot 120 = 3600$ 种.

(2) 有两个项目各有 2 人参加时，则由乘法原理知，若不考虑甲、乙两人是否参加同一项目，则有 $\frac{1}{2}C_7^2C_5^2 \cdot 5!$ 种（这里要乘 $\frac{1}{2}$ 的理由是先选出 A、B 两人，后再选出 C、D 两人与先选出 C、D 两人，后再选出 A、B 两人是同一种方案，被重复计数了），且其中甲、乙参加同一项目时，有 $C_5^2 \cdot 5!$ 种方案，故由加法原理知，在这种情形下，满足条件的方案数为 $\frac{1}{2}C_7^2C_5^2 \cdot 5! - C_5^2 \cdot 5! = (105-10) \times 120 = 11\,400$ 种.

综上，得满足条件的方案数为 $3600 + 11\,400 = 15\,000$ 种.

解法二　由题设条件知，满足条件的方案有两种情形：

(1) 有一个项目有 3 人参加，则由乘法原理知，这时甲、乙两人都没有参加 3 人项目的方案数为 $C_5^3 \cdot 5!$ 种且甲、乙两人恰有 1 人参加 3 人项目的方案数为 $C_2^1C_5^2 \cdot 5!$. 在这种情况下，由加法原理知，满足条件的方案数为 $C_5^3 \cdot 5! + C_2^1 \cdot C_5^2 \cdot 5! = (10+20) \times 120 = 3600$ 种.

(2) 有两个项目各有 2 人参加. 则由乘法原理知，这时甲、乙两人都没有参加 2 人项目的方案数为 $\frac{1}{2}C_5^2C_3^2 \cdot 5!$ 种，且甲、乙两人中恰有 1 人参加一个 2 人项目的方案数为 $C_2^1C_5^1C_4^2 \cdot 5!$ 种，甲、乙两人分别各加一个不同的 2 人项目的方案有 $C_5^1C_4^1 \cdot 5!$ 种，在这种情况下，由加法原理知，满足条件的方案数为 $\frac{1}{2}C_5^2C_3^2 \cdot 5! + C_2^1C_5^1C_4^2 \cdot 5! + C_5^1C_4^1 \cdot 5! = (15+60+20) \times 120 = 11\,400$ 种.

综上得满足条件的方案数为 $3600 + 11\,400 = 15\,000$ 种.

三、可重复的排列与组合

可重复的排列　从 n 个不同元素中取 m 个元素（同一元素允许重复取出），按照一定的顺序排成一列，叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复排列，这种排列的个数为 n^m.

这个结论不难用乘法原理证明.

可重复的组合 从 n 个不同元素中取 m 个元素(同一元素允许重复取出)并成一组,叫做从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复组合,这种组合的个数为 C_{n+m-1}^{m}.

证明 用 1, 2, …, n 表示 n 个不同元素,这时从这 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复组合具有下列形式:

$$\{i_1, i_2, \cdots, i_m\}\ (1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \cdots \leqslant i_m \leqslant n).$$

因为允许重复选取,其中等号可以成立.

将上述每个组合自左向右逐个分别加上:0, 1, 2, …, $(m-1)$, 得到 $\{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$,其中 $j_1 = i_1$, $j_2 = i_2 + 1$, …, $j_m = i_m + (m-1)$, 满足 $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_m \leqslant n+m-1$. 而$\{j_1, j_2, \cdots, j_m\}$恰是从 $n+m-1$ 个不同元素 1, 2, 3, …, $n+m-1$ 中取 m 个不同元素的组合. 所以从 n 个不同元素中取 m 个元素的可重复的组合数为 C_{n+m-1}^{m}.

不全相异元素的全排列 如果 n 个元素中,分别有 n_1, n_2, …, n_k 个元素相同,且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$,则这 n 个元素的全排列称为不全相异元素的全排列,其不同的排列个数记为$\begin{pmatrix} & n & \\ n_1 \quad n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix}$,则 $\begin{pmatrix} & n & \\ n_1 \quad n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

证明 设符合条件的排列数为 f,因为每类相同元素交换排列顺序,仍属于同一种排列,如果每类元素都换成互不相同的元素,则有 $n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!$ 种变化,于是由乘法原理得 n 个不同元素的排列数为 $f \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k!$,而实际上,$n$ 个不同元素的排列数应为 $n!$,于是得 $f \cdot n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots \cdot n_k! = n!$, 故有 $f = \begin{pmatrix} & n & \\ n_1 \quad n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

多组组合 把 n 个相异元素分为 $k(k \leqslant n)$ 个按照一定顺序排列的组,其中第 i 组有 n_i 个元素 ($i = 1, 2, \cdots, k$, $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$), 则不同的分组方法的种数为 $\begin{pmatrix} & n & \\ n_1 \quad n_2 & \cdots & n_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}$.

证明 从 n 个元素中取出 n_1 个元素有 $C_n^{n_1}$ 种方法,从剩下 $n-n_1$ 个元素中取出 n_2 个元素有 $C_{n-n_1}^{n_2}$ 种方法,再依次选出 n_3, …, n_k 个元素,分别有 $C_{n-n_1-n_2}^{n_3}$, …, $C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k}$ 种方法,故由乘法原理得不同的分组方法的种数是

$$\begin{aligned} & C_n^{n_1} \cdot C_{n-n_1}^{n_2} \cdot \cdots \cdot C_{n-n_1-\cdots-n_{k-1}}^{n_k} \\ = & \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!} \cdot \frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} \cdot \cdots \cdot \frac{(n-n_1-\cdots-n_{k-1})!}{n_k!(n-n_1-\cdots-n_{k-1}-n_k)!} \\ = & \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!}. \end{aligned}$$

注意 多组组合与不全相异元素的全排列的计数公式完全相同，但它们的组合意义是不相同的. 我们也可用前面在证明不全相异元素的全排列公式的方法来证明多组组合公式，我们把这个证明留给读者自己去完成.

例 4 从银行中取出伍角、壹元、贰元、伍元、拾元、伍拾元、壹百元的纸币共 10 张，共有多少种不同的取法？

解 本题为从 7 种不同的纸币中取 10 种纸币可重复的组合数，依可重复的组合数公式得不同的取法数目为

$$C_{7+10-1}^{10}=C_{16}^{6}=\frac{16\times15\times14\times13\times12\times11}{1\times2\times3\times4\times5\times6}=8008.$$

例 5 将 3 面红旗、4 面蓝旗、2 面黄旗依次悬挂在旗杆上，问可以组成多少种不同的标志？

解 由不全相异元素的全排列公式得所求标志数目为

$$\binom{9}{3\quad 4\quad 2}=\frac{9!}{3!4!2!}=1260.$$

例 6 从 $n(n\geqslant6)$ 名乒乓球选手中选拔出 3 对选手准备参加双打比赛，问共有多少种不同的方法？

解法一 从 n 名选手中选出 6 名选手有 C_n^6 种方法，将这 6 名选手分成 3 个不同的组，每组 2 名有 $\binom{6}{2\quad 2\quad 2}$ 种方法，但 3 对选手是不计顺序的，故所求的方法数应为

$$\frac{C_n^6\binom{6}{2\quad 2\quad 2}}{3!}=\frac{n!}{6!(n-6)!}\cdot\frac{6!}{2!2!2!}\cdot\frac{1}{3!}=\frac{n!}{48\cdot(n-6)!}.$$

解法二 从 n 名选手中选出 6 人有 C_n^6 种方法，选出的 6 人中选出 2 人配成一对有 C_6^2 种方法，剩下 4 人中选 2 人配成一对有 C_4^2 种方法，最后剩下的 2 人配成一对有 C_2^2 种方法. 但因选出的 3 对是不计顺序的，故所求方法数为

$$\frac{C_n^6C_6^2C_4^2C_2^2}{3!}=\frac{n!}{48(n-6)!}.$$

注意 本题若改为从 n 名选手中选出 3 对选手分别列为第 1、2、3 号种子选手，则其不同的选法数目为

$$C_n^6C_6^2C_4^2C_2^2=\frac{n!}{8(n-6)!}.$$

这是因为选出的 3 对选手是排了序的，故不要除以 $3!$.

四、相异元素的圆排列和项链数

圆排列 将 n 个不同元素不分首尾排成一圈，称为 n 个相异元素的圆排列，其排列种数为 $(n-1)!$.

证明 因为 n 个不同的直线排列 $A_1A_2\cdots A_{n-1}A_n$，$A_2A_3\cdots A_nA_1$，$A_3A_4\cdots A_1A_2$，$\cdots$，$A_nA_1\cdots A_{n-2}A_{n-1}$，分别将其首尾相连排成一圈得到的是同一种圆排列，而 n 个相异元素的全排列有 $n!$ 个，故 n 个相异元素的圆排列个数为 $\dfrac{n!}{n}=(n-1)!$.

项链数 将 n 粒不同的珠子用线串成一副项链，则得到的不同项链数当 $n=1$ 或 2 时为 1，当 $n\geqslant 3$ 时为 $\dfrac{1}{2}(n-1)!$.

证明 若 $n=1$ 或 2，则项链数显然为 1. 当 $n\geqslant 3$ 时，若 n 粒不同珠子的两个圆排列仅有顺时针与逆时针方向上的区别，则这两个圆排列对应的是同一副项链. 故当 $n\geqslant 3$ 时，项链数应为对应的圆排列数的一半，即为 $\dfrac{1}{2}(n-1)!$.

例 7 6 位女同学和 15 位男同学围成一圈跳集体舞，要求每两名女同学之间至少有两名男同学，那么共有多少种不同的围圈跳舞的方法？

解 首先让每位女同学选择两名男同学作为她的舞伴，一人排在她左侧，另一人排在她右侧. 由于 6 位女同学互不相同，故第 1 名女同学有 15×14 种选法，第 2 名有 13×12 种选法……一共有 A_{15}^{12} 种“配对”方法.

将每名女同学和她的舞伴看成一组，剩下 $15-12=3$ 名男同学每人看成一组，一共有 9 个组，把这 9 个组排成一圈，共有 $(9-1)!=8!$ 种排法.

由乘法原理得满足条件的排列数为

$$\mathrm{A}_{15}^{12}\cdot 8!=\frac{15!\cdot 8!}{3!}.$$

五、一类不定方程的非负整数解的个数

不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n\ (m,n\in\mathbf{N}_+)$ 的非负整数解 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 的个数为 C_{n+m-1}^{m-1}.

证明　将方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的一组非负整数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$，对应于一个由 n 个圈“○”和 $m-1$ 条竖线“|”组成的排列

$$\underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{x_1\text{个}} \mid \underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{x_2\text{个}} \mid \cdots \mid \underbrace{\bigcirc\bigcirc\cdots\bigcirc}_{x_m\text{个}},$$

其中第一条竖线“|”左侧有 x_1 个圈“○”，第 i 条竖线“|”与第 $i+1$ 条“|”之间有 x_{i+1} 个圈“○” $(i=1, 2, \cdots, m-2)$，第 $m-1$ 条竖线“|”右侧有 x_m 个圈“○”. 这个对应是一个一一对应，故不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的非负整数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 的个数等于 n 个圈“○”和 $m-1$ 条竖线“|”共 $n+m-1$ 个元素的直线排列的个数 $C_{n+m-1}^{n}=C_{n+m-1}^{m-1}$.

注意　不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的非负整数解的个数与可重复组合的计数是相同的.

推论　不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ $(m, n\in\mathbf{N}_+, m\leqslant n)$ 的正整数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_m)$ 的个数为 C_{n-1}^{m-1}.

证明　令 $y_i=x_i-1$ $(i=1, 2, \cdots, m)$，则 $y_1+y_2+\cdots+y_m=n-m$，所以不定方程 $x_1+x_2+\cdots+x_m=n$ 的正整数解的个数 S 等于不定方程 $y_1+y_2+\cdots+y_m=n-m$ 的非负整数解的个数，即 $S=C_{n-m+m-1}^{m-1}=C_{n-1}^{m-1}$.

下面给出例 7 的另一种解法.

解法二　以女同学为组长，15 位男同学分入 6 个组每组至少有两位男同学，且记各组内男同学数分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_6$，则分组的方法数等于不定方程

$$x_1+x_2+\cdots+x_6=15,\ x_i\geqslant 2\ (i=1, 2, \cdots, 6) \qquad ①$$

的整数解的个数，令 $y_i=x_i-2(i=1, 2, \cdots, 6)$ 则

$$y_1+y_2+\cdots+y_6=3,\ y_i\geqslant 0\ (i=1, 2, \cdots, 6). \qquad ②$$

故①的整数解的个数等于②的非负整数解的个数 $C_{3+6-1}^{6-1}=C_8^5=C_8^3$，即 15 位男同学分入 6 个组，每组至少 2 人的方法数为 C_8^3. 6 个组排成一个圆圈有 5! 种方法（这时女同学排在每组的首位，她的位置已排定），又 15 个男同学站入的方法数为 A_{15}^{15}，故满足条件的排列数为 $C_8^3\cdot 5!\ \cdot A_{15}^{15}=\dfrac{8!\,15!}{3!}$.

例 8　将 24 个志愿者名额分配给 3 个学校，则每校至少有一个名额且各校名额互不相同的分配方法共有________种.（2008 年全国高中数学联赛试题）

解　设分配给 3 个学校的名额数分别为 x_1, x_2, x_3，则每个学校至少有

一个名额的分配方法数为不定方程 $x_1+x_2+x_3=24$ 的正整数解的个数，即 $C_{24-1}^{3-1}=C_{23}^{2}=\dfrac{23\times22}{2}=253$. 但上述分配方法中“至少有两个学校名额数相同”的分配方法有下列 31 种：

$(i, i, 24-2i)$、$(i, 24-2i, i)$、$(24-2i, i, i)$

$(i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11)$及$(8, 8, 8)$.

故满足条件的分配方法共有 $253-31=222$(种).

例 9 方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解(x, y, z)的个数是________.(2010 年全国高中数学联赛试题)

解法一 首先易知 $x+y+z=2010$ 的正整数解的个数为 $C_{2009}^{2}=2009\times1004$；

其次，把 $x+y+z=2010$ 满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解分为三类：

(1) $x=y=z$ 的正整数解只有 1 个：$(670, 670, 670)$；

(2) x, y, z 中恰有 2 个相等的正整数解有下列 1003 个：$(x, x, 2010-2x)$、$(x=1, 2, \cdots, 669)$以及$(2010-2y, y, y)(y=671, 672, \cdots, 1004)$；

(3) 设 x, y, z 两两不等的正整数解有 k 个，于是

$$1+1003\times C_3^1+k\times3!=C_{2009}^{2}=2009\times1004,$$

所以

$$\begin{aligned}k&=\frac{1}{6}(2009\times1004-3\times1003-1)\\&=\frac{1}{6}(2009\times1005-2009-3\times1005+3\times2-1)\\&=\frac{1}{6}(2006\times1005-2004)=1003\times335-334\\&=335\ 671.\end{aligned}$$

故满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解(x, y, z)的个数为

$$1+1003+335\ 671=336\ 675.$$

解法二 设 $x=k, y=y'+k, z=z'+k$，则 $y'+z'=3(670-k)$ 满足 $0\leqslant y'\leqslant z'$ 的整数解的个数为 $\left[\dfrac{3}{2}(670-k)\right]+1$，故方程 $x+y+z=2010$ 满足 $x\leqslant y\leqslant z$ 的正整数解(x, y, z)的个数为

$$\sum_{k=1}^{670}\left(\left[\frac{3}{2}(670-k)\right]+1\right)=\sum_{t=0}^{669}\left[\frac{3}{2}t\right]+670=\sum_{t=0}^{669}t+\sum_{t=0}^{669}\left[\frac{t}{2}\right]+670$$

$$=\frac{669\times 670}{2}+(0+1+1+2+2+\cdots+334+334)+670$$
$$=224\,115+334\times 335+670=224\,785+111\,890=336\,675.$$

六、容斥原理

容斥原理 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$为有限集合,用$|A_i|$表示集合 A_i中的元素个数,那么

$$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|-\cdots+(-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \quad ①$$

证明 若 $a\in A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,则 a 至少属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$中一个集合. 不妨设 a 属于 $A_1, A_2, \cdots, A_k(1\leqslant k\leqslant n)$ 而不属于其他集合. 于是 a 在①式左端计算了一次. 而 a 在右端的第一个和中计算了 C_k^1 次,在第 2 个和中计算了 C_k^2 次,…,可见,a 在右端算式中,它被计算的总次数为

$$\begin{aligned}&C_k^1-C_k^2+C_k^3-\cdots+(-1)^{k-1}C_k^k\\=&C_k^0-(C_k^0-C_k^1+\cdots+(-1)^kC_k^k)\\=&1-(1-1)^k\\=&1.\end{aligned}$$

若 $a\notin A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,则显然 a 在①式两端计算的次数都为 0. 这表明①式右端的确表示至少属于 $A_1, A_2, \cdots, A_n$中一个集合的元素的总数$|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|$,从而①式成立.

上述证明①式成立的方法叫做贡献法.

逐步淘汰原理(筛法公式) 设 S 是有限集合,$A_i\subset S\ (i=1, 2, \cdots, n)$,$A_i$在 S 中的补集为 $\complement_S A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 则

$$|\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\cdots\cap\complement_S A_n|=|S|-\sum_{i=1}^{n}|A_i|+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j|-\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k|+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \quad ②$$

证明 因为 $|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n|=|S|-|\complement_S(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)|$,而由集合论中德·摩根律,我们有

$$\complement_S(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\complement_S A_1\cap\complement_S A_2\cap\cdots\cap\complement_S A_n.$$

由上述两式及①式即得②式.

公式①和②都源于同一思想，即不断地使用包含与排除，逐步筛去重复的计数. 因此，这两个公式又统称为包含与排除原理，今后我们统称为容斥原理.

例 10 （伯努利装错信笺问题）有 n 封不同的信和 n 个配套的写有收信人地址的信封，现将 n 封信一对一地套入到 n 个信封中去，结果发现没有一封信套对（即每封信都没有按地址套入其应套入的信封），问有多少种不同的套法？

解 设 S 是所有套法组成的集合，则显然有 $|S|=n!$. 我们把每封信和对应的信封都分别用 $1, 2, 3, \cdots, n$ 进行编号，并记 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 为第 i 封信恰套入第 i 个信封（即套正确）的所有套法构成的集合，故所求的方法数即为 $|\complement_S A_1 \cap \complement_S A_2 \cap \cdots \cap \complement_S A_n|$，而易知

$$|A_i|=(n-1)!\ (1 \leqslant i \leqslant n),$$
$$|A_i \cap A_j|=(n-2)!\ (1 \leqslant i<j \leqslant n),$$
$$\cdots\cdots$$
$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}|=(n-k)!\ (1 \leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k \leqslant n),$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|=0!=1.$$

于是由筛法公式有

$$\begin{aligned}
&|\complement_S A_1 \cap \complement_S A_2 \cap \cdots \cap \complement_S A_n| \\
=&\ n!-\mathrm{C}_n^1(n-1)!+\mathrm{C}_n^2(n-2)!-\mathrm{C}_n^3(n-3)!+\cdots+(-1)^n \mathrm{C}_n^n \cdot 0! \\
=&\ n!-\frac{n!}{1!}+\frac{n!}{2!}-\frac{n!}{3!}+\cdots+(-1)^n \frac{n!}{n!} \\
=&\ n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n \frac{1}{n!}\right).
\end{aligned}$$

注 本例通常又称为乱序排列问题. 所谓乱序排列指的是：将 n 个不同元素重新排列，使每个元素都不在原来位置上.

置换及其不动点 给定集合 $X=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$，φ 是从 X 到 X 上的一一映射，通常记为

$$\varphi=\begin{Bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \varphi(1) & \varphi(2) & \cdots & \varphi(n) \end{Bmatrix},$$

则称 φ 是 X 上的置换，其中 $\varphi(i)$ 是元素 i 在映射 φ 下的象. 因为是一一映射，所以 $\varphi(1), \varphi(2), \cdots, \varphi(n)$ 实际上是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列. 满足 $\varphi(i)=i$ 的数 i 称为 φ 的一个不动点. 由上例立即可得下列结论：

推论　集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 上没有任何不动点的置换 φ 的个数是

$$D_n=n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

例 11　设 φ 是集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的置换，将 X 上没有不动点的置换个数记为 f_n，恰有一个不动点的置换个数记为 g_n，证明：$|f_n-g_n|=1$.（第 14 届加拿大数学奥林匹克试题）

证明　设 $g_{n_i}(i=1, 2, \cdots, n)$ 表示 X 上恰有唯一不动点 i 的置换个数. 于是

$$g_n=g_{n_1}+g_{n_2}+\cdots+g_{n_n}.$$

由上述推论，有

$$f_n=D_n,\ g_{n_i}=D_{n-1}(i=1, 2, \cdots, n),$$

故

$$g_n=nD_{n-1}.$$

所以

$$\begin{aligned}|f_n-g_n|&=|D_n-nD_{n-1}|\\&=\left|n!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{(-1)^n}{n!}\right)-\right.\\&\qquad\left.n\cdot(n-1)!\left(1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\right)\right|\\&=\left|n!\cdot\frac{(-1)^n}{n!}\right|\\&=1.\end{aligned}$$

例 12　从全体正整数 1, 2, 3, …中划去 3 和 4 的倍数，但其中凡是 5 的倍数都保留（例如 15, 20, 60, …等都保留），划完后，将剩下的数从小到大排成一个数列：$a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=5$, $a_4=7$, $a_5=10$, …，求 a_{2011} 之值.

解法一　设 $a_{2011}=n$，令 $S=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$，$A_i=\{k\mid k\in S$ 且 k 被 i 整除$\}$，于是 S 中没有被划去的数的集合为 $(\complement_S A_3\cap\complement_S A_4\cap\complement_S A_5)\cup A_5$，依题意并利用筛法公式得

$$\begin{aligned}2011&=|(\complement_S A_3\cap\complement_S A_4\cap\complement_S A_5)\cup A_5|\\&=|\complement_S A_3\cap\complement_S A_4\cap\complement_S A_5|+|A_5|\\&=|S|-|A_3|-|A_4|-|A_5|+|A_3\cup A_4|+|A_3\cup A_5|+|A_4\cup A_5|-\\&\qquad|A_3\cap A_4\cap A_5|+|A_5|\end{aligned}$$

$$=n-\left[\frac{n}{3}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{3\times4}\right]+\left[\frac{n}{3\times5}\right]+\left[\frac{n}{4\times5}\right]-\left[\frac{n}{3\times4\times5}\right]. \quad ①$$

利用 $\alpha-1<[\alpha]\leqslant\alpha$，由①得

$$2011<n-\left(\frac{n}{3}-1\right)-\left(\frac{n}{4}-1\right)+\frac{n}{3\times4}+\frac{n}{3\times5}+\frac{n}{4\times5}-\left(\frac{n}{3\times4\times5}-1\right)=\frac{3}{5}n+3. \quad ②$$

和

$$2011>n-\frac{n}{3}-\frac{n}{4}+\left(\frac{n}{3\times4}-1\right)+\left(\frac{n}{3\times5}-1\right)+\left(\frac{n}{4\times5}-1\right)-\frac{n}{3\times4\times5}=\frac{3}{5}n-3. \quad ③$$

由②和③联立解得

$$3346\frac{2}{3}<n<3356\frac{2}{3}. \quad ④$$

又 n 为正整数，并且满足④的 n 中凡是 3 或 4 的倍数而同时不是 5 的倍数的数应去掉，故 n 只可能是 3347，3349，3350，3353，3355，3356. 经检验知 $n=3350$ 满足①，并且由实际意义知本题的解是唯一的，所以 $a_{2011}=3350$.

解法二　因为 3，4，5 的最小公倍数为 60，故先考虑集合 $S_0=\{1, 2, 3, \cdots, 60\}$ 中含有多少个没有被划去的数. 令 $B_i=\{k \mid k\in S_0$，且 k 被 i 整除$\}$ $(i=3, 4, 5)$，则 S_0 中没有被划去的数的集合为$(\complement_{S_0}B_3\cap\complement_{S_0}B_4\cap\complement_{S_0}B_5)\cup B_5$，由筛法公式得

$$\begin{aligned}&|(\complement_{S_0}B_3\cap\complement_{S_0}B_4\cap\complement_{S_0}B_5)\cup B_5|\\=&|\complement_{S_0}B_3\cap\complement_{S_0}B_4\cap\complement_{S_0}B_5|+|B_5|\\=&|S_0|-|B_3|-|B_4|-|B_5|+|B_3\cap B_4|+|B_3\cap B_5|+|B_4\cap B_5|-\\&|B_3\cap B_4\cap B_5|+|B_5|\\=&60-\left[\frac{60}{3}\right]-\left[\frac{60}{4}\right]+\left[\frac{60}{3\times4}\right]+\left[\frac{60}{3\times5}\right]+\left[\frac{60}{4\times5}\right]-\left[\frac{60}{3\times4\times5}\right]\\=&36,\end{aligned}$$

即 S_0 中没有被划去的数有 36 个：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_3=5$，$a_4=7$，$\cdots$，$a_{36}=60$. 记 $P=\{a_1, a_2, \cdots, a_{36}\}$，令 $a_n=60k+r$，(k，r 为非负整数，且 $1\leqslant r\leqslant 60$).

若 $(a_n, 12)=(60k+r, 12)=1$，则 $(r, 12)=1$，于是 $r\in P$. 若 $(a_n,$

$12)=(60k+r,\ 12)\neq 1$，则 $(r,\ 12)\neq 1$，但由 $5|a_n$ 得 $5|r$，也有 $r\in P$.

反之，对任意形如 $60k+r$（k 为非负整数，$r\in P$）的正整数. 若 $(r,\ 12)=1$，则 $(60k+r,\ 12)=1$，这时 $60k+r$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的一项. 若 $(r,\ 12)\neq 1$，则由 $r\in P$ 知 $5|r$. 从而 $5\mid(60k+r)$，故 $60k+r$ 仍是数列 $\{a_n\}$ 中一项.

可见，数列 $\{a_n\}$ 中的项由且只由形如 $60k+r$（k 为非负整数，$r\in P$）的正整数组成，且对每一个固定的 k. 当 r 取遍 P 中的数时，可得数列 $\{a_n\}$ 中相邻的 36 项. 又 $2011=36\times 55+31$，所以 $a_{2011}=60\times 55+a_{31}=3300+a_{31}$. 而 $a_{36}=60$，$a_{35}=59$，$a_{34}=58$，$a_{33}=55$，$a_{32}=53$，$a_{31}=50$，故

$$a_{2011}=3300+50=3350.$$

注　本题解法 1 中所用的方法称为估值法，首先估计解的取值范围，如果解的取值范围只有有限种可能，并且从问题的意义知解是唯一的，则只有从取值范围的中间值（本题中 $n=3350$）开始检验（若不满足条件，则在两侧中的一个中间值处再检验），其中满足条件的值就是问题的唯一解. 解法 2 中所使用的方法称为组合分析法，它是先弄清所求数列的结构后，再进行计算.

习　题　1

1 若正整数 a、b、c 满足 $2017\geqslant 10a\geqslant 100b\geqslant 1000c$，则数组 $(a,\ b,\ c)$ 的个数为________.（2017 年全国高中数学联赛（B 卷）一试试题）

2 由一个正方体的顶点所确定的不同平面的个数是________.（2014 年希望杯数学邀请赛（高二）第二试试题，原题为选择题）

3 如果自然数 a 的各位数字之和等于 7，那么称 a 为“吉祥数”. 将所有“吉祥数”从小到大排成一列 a_1，a_2，a_3，…，若 $a_n=2005$，则 $a_{5n}=$________.（2005 年全国高中数学联赛试题）

4 设三位数 $n=\overline{abc}$，若以 a、b、c 为 3 条边的长可以构成一个等腰（含等边）三角形，则这样的三位数 n 有________个.（2004 年全国高中数学联赛试题，原题为选择题）

5 从 1、2、3、4、5、7、9 这 7 个数字中任取两个数字分别做成对数的底数和真数，则可构成不相等的对数值的数目是________.

6 将集合 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 12\}$ 划分为六个不相交的二元子集，使得任意一个二元子集中的两个元素均互素，求这样划分的方法数.（第 65 届捷克和斯洛伐克数学奥林匹克试题（2016））

7 若一个三位数中任意两个相邻数码的差均不超过 1，则称其为“平稳数”. 平稳数的个数是________.（2017 年全国高中数学联赛试题）

8 2×3 的矩形花坛被分成 6 个 1×1 的小正方形区域：A、B、C、D、E、F，在每个区域内栽种一种植物，相邻两个区域内栽种的植物不同，今有 6 种植物可供选择，则共有________种不同的栽种方法.（2002 年湖南省中学生夏令营试题）

9 给定正整数 $n\geqslant2$，对平面直角坐标系中整点集 $A=\{(a,\ b)\mid a,\ b\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}\}$ 中每个点染红、黄、蓝三种颜色之一，且满足：对任意 $a,\ b\in\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$，若$(a,\ b)$与$(a+1,\ b)$两点同色，则$(a,\ b+1)(a+1,\ b+1)$两点也同色. 求不同的染色方式总数.（2015 年第十二届中国东南地区数学奥林匹克高二年级试题）

10 已知整数 $n\geqslant3$，记$(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$为 $1,\ 2,\ \cdots,\ n$ 的一个圆排列. 求此圆排列的个数，使得按顺时针方向有 $\sum\limits_{i=1}^{n-1}|a_i-a_{i+1}|+|a_n-a_1|=2n-2$.（2016 年第 33 届阿根廷数学奥林匹克试题）

11 将正四棱锥的顶点染色，要求同一条棱的两个端点不同色. 如果只有 5 种颜色可供使用，那么不同的染色方法共有多少种?（假设经过绕对称轴旋转后可以变相同的染色方法是同一种染色方法）

12 已知两个实数集合 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{100}\}$ 与 $B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{50}\}$，若从 A 到 B 的映射 f 使得 B 中每个元素都有原象，且 $f(a_1)\leqslant f(a_2)\leqslant\cdots\leqslant f(a_{100})$，则这样的映射的总个数为________.（2002 年全国高中数学联赛试题，原题为选择题）

13 n 对夫妻任意排成一行，求没有任何一对夫妻相邻的排法总数.

14 集合 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 5\times10^6\}$ 有多少个满足下列条件的 2015 元子集 A：A 的任意非空子集的元素之和不是 2016 的倍数.（2016 年第 7 届陈省身杯全国高中数学奥林匹克试题）

15 由数字 1、2、3 组成 n 位数（$n\geqslant3$），要求 n 位数中数字 1、2、3 中每一个至少出现一次，求这种 n 位数的个数.

2 抽屉原理与平均值原理

一、抽屉原理

抽屉原理又称鸽巢原理或狄利克雷(Dirichlet)原理,抽屉原理是组合数学中基本而重要的原理之一,许多存在性问题的证明都可以用抽屉原理来解决.

第一抽屉原理 如果将 m 个物件放入 n 个抽屉内,那么必有一个抽屉内至少有 $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ 个物件.

证明 用反证法,如果每个抽屉内至多有 $\left[\frac{m-1}{n}\right]$ 个物件,那么放入 n 个抽屉内的物件的总数至多为 $n\left[\frac{m-1}{n}\right]\leqslant n\left(\frac{m-1}{n}\right)=m-1$, 这与共有 m 个物件矛盾,故必有一个抽屉内至少有 $\left[\frac{m-1}{n}\right]+1$ 个物件. 证毕.

推广 如果将 $m_1+m_2+\cdots+m_n+1$ (m_1, m_2, $\cdots$, m_n 均为正整数)个物件放入 n 个抽屉内,那么或者第一个抽屉内至少有 m_1+1 个物件,或者第二个抽屉内至少有 m_2+1 个物件……或者第 n 个抽屉内至少有 m_n+1 个物件.

证明 用反证法,如果第 i 个抽屉内至多只有 m_i 个物件 ($i=1, 2, \cdots, n$),那么 n 个抽屉内的物件的总数至多为 $m_1+m_2+\cdots+m_n$, 这与一共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n+1$ 个物件矛盾,故结论成立. 证毕.

第二抽屉原理 如果将 m 个物件放入 n 个抽屉内,那么必有一个抽屉内至多有 $\left[\frac{m}{n}\right]$ 个物件.

证明 用反证法,如果每个抽屉内至少有 $\left[\frac{m}{n}\right]+1$ 个物件,那么 n 个抽屉内的物件总数至少为 $n\left(\left[\frac{m}{n}\right]+1\right)>n\cdot\frac{m}{n}=m$, 这与 n 个抽屉内共有 m 个物

件矛盾,故结论成立. 证毕.

推广 如果将 $m_1+m_2+\cdots+m_n-1$(m_1, m_2, …, m_n 均为正整数)个物件放入 n 个抽屉内,那么或者第一个抽屉内至多有 m_1-1 个物件,或者第二个抽屉内至多有 m_2-1 个物件……或者第 n 个抽屉内至多有 m_n-1 个物件.

证明 用反证法,如果第 i 个抽屉内至少有 m_i 个物件 $(i=1, 2, \cdots, n)$,那么 n 个抽屉内的物件的总数至少为 $m_1+m_2+\cdots+m_n$,这与 n 个抽屉内共有 $m_1+m_2+\cdots+m_n-1$ 个物件矛盾,故结论成立. 证毕.

例 1 (Ramsey 定理)设空间 6 个点中任意 4 点不共面,若将其中任意两点间的连线染成红色或蓝色之一,则必存在一个三边颜色相同的三角形.

证明 从一个已知点 A 出发的 5 条线段被染成红蓝两种颜色,由抽屉原理知其中必有 $\left[\frac{5-1}{2}\right]+1=3$ 条线段同色,不妨设它们是 AB、AC、AD,并且同为红色. 考察 $\triangle BCD$,若其中有一边为红色,例如 BD 为红色,则 $\triangle ABD$ 的三边为红色,结论成立,否则 $\triangle BCD$ 的三边都为蓝色,结论也成立.

为了今后应用方便,我们介绍一些简单的图论中的术语.

平面内任给 n 个点,每两点连一线段得到的图叫做 n 阶完全图,其中给定的 n 个点叫做顶点,所连线段叫做边,从每一点出发的线段数叫做该点的度. n 阶完全图常用记号 K_n 表示,其中 k 条边组成的闭折线叫做 k 边形,三边形又叫三角形. 用 m 种颜色将一个 n 阶完全图 K_n 染色,每边恰染一色得到的图叫做 m 色 n 阶完全图,其中每边都同色的 k 边形叫做同色 k 边形. 于是,Ramsey 定理可用图论的语言写成下列形式.

Ramsey 定理 2 色完全图 K_6 中必存在同色三角形.

此外,如图 2-1,存在一个 2 色完全图 K_5(其中实线表红色,虚线表蓝色),其中不存在同色三角形.

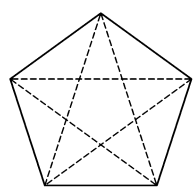

图 2-1

一般地,使 m 色完全图 K_n 中存在同色三角形的最小正整数 n 叫做 Ramsey 数,记为 R_m. 上面结论实际上证明了 $R_2=6$. 寻求 Ramsey 数是一个很困难的问题,目前仅找出了为数不多的几个 Ramsey 数: $R_2=6$, $R_3=17$, $R_4=65$, ….详细情形读者可参看有关组合数学和图论的书籍.

如果用点表示人,并且两人互相认识时,则对应点的连线染红色,否则染蓝色. 那么上述 Ramsey 定理便成为下述 1947 年的匈牙利数学竞赛试题:

试证任何 6 个人中必有 3 个人互相认识或互相不认识.

例 2 已知 A 与 B 是集合 $\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$ 的两个子集,满足: A 与 B 的元素个数相同,且 $A\cap B$ 为空集,若 $n\in A$ 时总有 $2n+2\in B$,则集合 $A\cup B$

的元素个数最多为(   ).

(A) 62　　(B) 66　　(C) 68　　(D) 74

(2007年全国高中数学联赛试题)

解　因为对任意 $n\in A$ 有 $2n+2\in B\subseteq\{1, 2, \cdots, 100\}$,所以 $2n+2\leqslant 100$, $n\leqslant 49$,即 A 是 $\{1, 2, \cdots, 49\}$ 的子集.将 $\{1, 2, \cdots, 49\}$ 分为下列33个两两不相交的子集:

$\{1, 4\}$, $\{3, 8\}$, $\{5, 12\}$, $\{7, 16\}$, $\cdots$, $\{23, 48\}$ 共12个;

$\{2, 6\}$, $\{10, 22\}$, $\{14, 30\}$, $\{18, 38\}$ 共4个;

$\{25\}$, $\{27\}$, $\{29\}$, $\{31\}$, $\cdots$, $\{49\}$ 共13个;

$\{26\}$, $\{34\}$, $\{42\}$, $\{46\}$ 共4个.

因为 $A\subseteq\{1, 2, 3, \cdots, 49\}$,若 $|A|\geqslant 34$,则由抽屉原理知上述33个集合中至少有一个2元集合中的两个数都属于 A,即存在 $n\in A$ 且 $2n+2\in A$,这与已知条件矛盾,故 $|A|\leqslant 33$. 又 $|A\cap B|=0$, $|B|=|A|$,所以

$$|A\cup B|=|A|+|B|=2|A|\leqslant 66.$$

另一方面,若取 $A=\{1, 3, 5, 7, \cdots, 23, 2, 10, 14, 18, 25, 27, 29, 31, \cdots, 49, 26, 34, 42, 46\}$, $B=\{2n+2\mid n\in A\}$,则 A, B 满足题设条件且 $|A\cup B|=66$. 故选(B).

例3　设 α 是正实数,n 为正整数,求证:存在正整数 p, q 使

$$\left|\alpha-\frac{q}{p}\right|\leqslant\frac{1}{np}.$$

证明　先证下列命题:

任给 x_0, x_1, $\cdots$, $x_n\in[0, 1)$,一定存在 i, $j(0\leqslant i<j\leqslant n)$,使得 $|x_i-x_j|<\frac{1}{n}$.(只要将 $[0, 1)n$ 等分为 n 个小区间 $\left[0, \frac{1}{n}\right)$, $\left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right)$, $\cdots$, $\left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$,根据抽屉原理知 $n+1$ 个数 x_0, x_1, $\cdots$, x_n 中必有两个数 x_i, $x_j(0\leqslant i<j\leqslant n)$ 落在同一区间内,从而有 $|x_i-x_j|<\frac{1}{n}$.)

下面令 $m_i=[i\alpha]$, $i=0, 1, 2, \cdots, n$. 于是 $m_i\leqslant i\alpha<m_i+1$,即 $0\leqslant i\alpha-m_i<1$,由上述命题知,存在 $0\leqslant k<l\leqslant n$,使得 $|(l\alpha-m_l)-(k\alpha-m_k)|<\frac{1}{n}$,即

$$|(l-k)\alpha-(m_l-m_k)|<\frac{1}{n}. \quad ①$$

令 $p=l-k$, $q=m_l-m_k$, 则 p, q 为正整数,代入①得

$$|p\alpha-q|<\frac{1}{n},即\left|\alpha-\frac{q}{p}\right|<\frac{1}{np}.$$

由例 3 我们可以得到一个关于实数的重要性质:因 $p\geqslant 1$, 故 $\left|\alpha-\frac{q}{p}\right|<\frac{1}{np}\leqslant\frac{1}{n}$, 它说明了实数可用有理数逼近到任意精确的程度.

例 4 某赛事共举行了 44 场比赛,每场比赛有七名优胜者,且任意两场比赛中恰有一名相同的优胜者. 问是否存在某人为所有各场比赛的优胜者?(2015 年中国香港代表队选拔考试试题)

解 任意指定一场比赛记为 C_1,有七名优胜者. 由题意,余下的 43 场比赛中,每场比赛的优胜者中恰有这七人中的一人,据抽屉原理知至少存在 $\left[\frac{43-1}{7}\right]+1=7$ 场比赛包含一名相同的优胜者,并将这 7 场比赛分别记为 C_2, C_3, $\cdots$, C_8 以及该优胜者记为 X,依题目条件知 C_1, C_2, $\cdots$, C_8 中任意两场的相同优胜者都只有 X 一人.

接下来考虑除 C_1, C_2, $\cdots$, C_8 外任意一场比赛 C 及 C 的 7 名优胜者. 又因为 C 与每个 $C_i(1\leqslant i\leqslant 8)$ 恰有一名相同的优胜者. 故由抽屉原理知,在 C 中获胜的 7 名队员中必有一人至少在 C_1, C_2, $\cdots$, C_8 中的 $\left[\frac{8-1}{7}\right]+1=2$ 场中获胜. 但 C_1, C_2, $\cdots$, C_8 中任意两场的相同优胜者只能是 X,故 X 也是比赛 C 的优胜者,由 C 的任意性知 X 是所有各场比赛的优胜者.

例 5 从 1, 2, 3, $\cdots$, 100 这 100 个正整数中任取 n 个数,在这 n 个数中总存在 3 个数,它们两两互素,求 n 的最小值.

解 记 $S=\{1, 2, \cdots, 100\}$, $A_i=\{k\mid k\in S 且 k 被 i 整除\}(i=2, 3)$,于是由容斥原理有

$$\begin{aligned}|A_2\cup A_3|&=|A_2|+|A_3|-|A_2\cap A_3|\\&=\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{3}\right]-\left[\frac{100}{2\times 3}\right]\\&=50+33-16=67.\end{aligned}$$

在 $A_2\cup A_3$ 内的 67 个数中任取 3 个数,由抽屉原理知其中至少有 $\left[\frac{3-1}{2}\right]+1=2$ 个数属于 A_2, A_3 中同一个集合,它们不互素.

故所求 n 的最小值$\geqslant$68.

下面证明 n 的最小值等于 68.

记 $B_1=\{1\}\cup\{100$ 以内的素数$\}$, $B_2=\{2^2,\ 3^2,\ 5^2\}$

$B_3=\{2^6,\ 3^4,\ 5\times 19\}$, $B_4=\{2^5,\ 3^5,\ 5\times 17\}$, $B_5=\{2^4,\ 3^2\times 11,\ 5\times 13\}$

$B_6=\{2^3,\ 3^2\times 7,\ 5\times 11\}$, $B_7=\{2\times 47,\ 3\times 31,\ 5\times 7\}$, $B_8=\{2\times 43,\ 3\times 29,\ 7\times 13\}$, $B_9=\{2\times 41,\ 3\times 23,\ 7\times 11\}$, $B_{10}=\{2\times 37,\ 3\times 19,\ 7^2\}$

并令 $B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_{10}$. 于是 $|B|=26+9\times 3=53$, $|S\backslash B|=100-53=47$. 于是,从 S 中任取 68 个数时,其中至少有 $68-47=21$ 个数属于 $B=B_1\cup B_2\cup\cdots\cup B_{10}$,再由抽屉原理知这 21 个数中至少有 $\left[\dfrac{21-1}{10}\right]+1=3$ 个数属于 B_1, B_2, $\cdots$, B_{10} 中同一子集,它们两两互素.

综上知所求 n 的最小值为 68.

例 6 49 个学生解 3 个问题,每个题的得分是 0 到 7 分的整数. 求证:存在两个学生 A 和 B,对每个问题,A 的得分不少于 B.(第 29 届 IMO 预选题)

证明 若有两个学生的第 1、2 题的得分相同,设其中学生 A 的第 3 题的得分不低于另一名学生 B,于是,对每一个问题,A 的得分不低于 B,结论成立.

下设任意两名学生第 1, 2 题的得分至少有一个不相同,将每个学生用平面内的一个整点 $(i,\ j)$ 表示,其中 i, j 分别表示该学生在第 1, 2 题的得分 $(0\leqslant i,\ j\leqslant 7)$. 于是 49 个学生对应的整点互不相同. 记

$M_1=\{(i,\ j)\mid i,\ j$ 为整数,$0\leqslant i\leqslant 7,\ j=0$ 或 $i=7,\ 1\leqslant j\leqslant 7\}$;

$M_2=\{(i,\ j)\mid i,\ j$ 为整数,$0\leqslant i\leqslant 6,\ j=1$ 或 $i=6,\ 2\leqslant j\leqslant 7\}$;

$M_3=\{(i,\ j)\mid i,\ j$ 为整数,$0\leqslant i\leqslant 5,\ j=2$ 或 $i=5,\ 3\leqslant j\leqslant 7\}$;

$M_4=\{(i,\ j)\mid i,\ j$ 为整数,$0\leqslant i\leqslant 4,\ j=3$ 或 $i=4,\ 4\leqslant j\leqslant 7\}$;

$M_5=\{(i,\ j)\mid i,\ j$ 为整数,$i=2,\ 3,\ 4\leqslant j\leqslant 7\}$;

$M_6=\{(i,\ j)\mid i,\ j$ 为整数,$i=0,\ 1,\ 4\leqslant j\leqslant 7\}$.

因为 49 个学生对应的 49 个不同的整点属于上述 6 个集合,故由抽屉原理知至少有 $\left[\dfrac{49-1}{6}\right]+1=9$ 个整点属于同一个集合,由于 $|M_5|=|M_6|=8$,故这个集合只能是前 4 个集合中的一个,记这个集合为 M. 这 9 个整点对应的 9 个学生的第 3 题得分只有 0, 1, 2, $\cdots$, 7 这 8 种可能,再由抽屉原理知其中必有两个学生的第 3 题得分相同,于是,由 M_1、M_2、M_3、M_4 的构造知,这两个学生中必有一个学生(记为 A),他的第 1、2 题的得分都不低于另一个学生(记为 B),故对每一个问题 A 的得分不低于 B,结论得证.

注 (1) 本题中若将 49 个学生改为 48 个学生,则不保证原题结论成立:我们用(a, b, c)表示一个学生第 1, 2, 3 题的得分分别为 a, b, c,假设 48 个学生的得分如下:

(3, 7, 0), (4, 6, 0), (5, 5, 0), (6, 4, 0), (7, 3, 0);

(2, 7, 1), (3, 6, 1), (4, 5, 1), (5, 4, 1), (6, 3, 1), (7, 2, 1);

(1, 7, 2), (2, 6, 2), (3, 5, 2), (4, 4, 2), (5, 3, 2), (6, 2, 2), (7, 1, 2);

(0, 7, 3), (1, 6, 3), (2, 5, 3), (3, 4, 3), (4, 3, 3), (5, 2, 3), (6, 1, 3), (7, 0, 3);

(0, 6, 4), (1, 5, 4), (2, 4, 4), (3, 3, 4), (4, 2, 4), (5, 1, 4), (6, 0, 4);

(0, 5, 5), (1, 4, 5), (2, 3, 5), (3, 2, 5), (4, 1, 5), (5, 0, 5);

(0, 4, 6), (1, 3, 6), (2, 2, 6), (3, 1, 6), (4, 0, 6);

(0, 3, 7), (1, 2, 7), (2, 1, 7), (3, 0, 7).

则其中不存在两名学生 A 和 B 使得对每一个问题 A 的得分却不低于 B.

(2) 例 6 及注(1)中结论可等价地写成下列形式:设 D 为 $2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^7$ 的所有不同正因数组成的集合, $S \subseteq D$, 且 S 内存在两个数 A 和 B 使得 B 整除 A,那么 S 内所含元素个数的最小值等于 49.

上述问题的一个自然推广是下列问题:

问题 1 设 n 为正整数, D_n 为 $2^n 3^n 5^n$ 的所有不同正因数组成的集合, $S \subseteq D_n$, 且 S 中任意一数不整除 S 中另一数. 求 $|S|$ 的最大值.(2004 年中国国家队培训题第 30 题)

问题 1 的答数为$\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]$. 换言之,如果 S 中存在 2 个数 A 和 B,使得 B 整除 A,那么 $|S|$ 的最小值为$\left[\dfrac{3(n+1)^2+1}{4}\right]+1$,我们将这一结论的证明留给读者作为练习题.

问题 1 还可推广为下列形式.

问题 2 设 m、n、p 是给定的正整数,且 $m \leqslant n \leqslant p \leqslant m+n$. 求下列结论恒成立时, $q = f(m, n, p)$ 的最小值:若 q 名学生都参加了三次数学竞赛的模拟考试,且第一次考试每名学生的得分都是从 0 到 m 的整数,第二次考试每名学生的的得分都是从 0 到 n 的整数,第三次考试每名学生的得分都是从 0 到 p 的整数,那么,其中必有两名学生 A、B 使得对每一次考试 A 的得分都不低于 B 的得分.

问题 2 的答数为 $q_0 = (m+1)(n+1) - \left[\dfrac{m+n-p+1}{2}\right]\left[\dfrac{m+n-p+2}{2}\right] + 1$. 我们将这一结论的证明留给有兴趣的读者去探索或者从下列文章中找到:

张垚:《一个组合最值问题的来源和推广》,中等数学 2010 年第 2 期.

例 7 设 n, r 是给定的正整数,试确定最小正整数 m,使将集合 $S=\{1, 2, \cdots, m\}$ 任意剖分为 r 个两两不相交的集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_r 之后,都存在两个数 a, b 属于同一个集合 $A_i(1\leqslant i\leqslant r)$ 并且满足: $b<a\leqslant\dfrac{n+1}{n}b$. (2000 年湖南省数学夏令营试题,特别 $n=3$, $r=14$ 为 2001 年中国西部数学奥林匹克试题)

解 设所求 m 的最小值为 m_0(m_0 的值可由以下分析中得到).

若 $m<m_0$, 令 $A_i=\{k\mid k\in S, k\equiv i(\bmod r)\}$ $(i=1, 2, \cdots, r)$, 则对任意 a, $b\in A_i(i=1, 2, \cdots, r)$, $a>b$, 有 $b<a\leqslant m<m_0$, $a-b\geqslant r$, 从而 $b\leqslant a-r<m_0-r$, 于是

$$\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}>1+\frac{r}{m_0-r},$$

故当 $m_0=nr+r$ 时,有 $\dfrac{a}{b}>1+\dfrac{1}{n}$, 即 $a>\dfrac{n+1}{n}b$, 不满足题目要求.

另一方面,若 $m\geqslant m_0=nr+r$, 将 S 任意剖分为 r 个两两不相交的集合 A_1, A_2, $\cdots$, A_r 之后,取 S 中 $r+1$ 个数 nr, $nr+1$, $nr+2$, $\cdots$, $nr+r$, 则由抽屉原理知其中必有 2 个数 a、b $(a>b)$ 属于同一个子集 $A_i(1\leqslant i\leqslant r)$, 且 $a-b\leqslant r$, $b\geqslant nr$, 于是

$$1<\frac{a}{b}=1+\frac{a-b}{b}\leqslant 1+\frac{r}{nr}=1+\frac{1}{n},$$

即 $b<a\leqslant\dfrac{n+1}{n}b$, 满足题目要求.

综上所述知所求 m 的最小值为 $m_0=nr+r$.

例 8 平面内任给 n $(\geqslant 4)$ 个点,其中任意 4 点不共面,若这些点之间连有 $\left[\dfrac{n^2}{4}\right]+1$ 条线段,则存在两个有公共边的三角形.

证明 $n=4$ 时,一共有 4 个点 A、B、C、D,它们之间连有 $\left[\dfrac{4^2}{4}\right]+1=5$ 条线段,故其中只有 $\mathrm{C}_4^2-5=1$ 对点之间没有连线,不妨设 C 与 D 没有连线,这时存在两个有公共边的三角形:$\triangle ABC$ 和$\triangle ABD$,结论成立.

假设 $n=k(\geqslant 4)$ 时,结论成立,即若 k 个点之间连有 $\left[\dfrac{k^2}{4}\right]+1$ 条线时,则存在两个有公共边的三角形,那么 $n=k+1$ 时,假设 $k+1$ 个点之间连有

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 组合数学/张垚编著. —3版. —上海:华东师范大学出版社,2019
ISBN 978-7-5675-9821-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 281485 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷

组合数学(第三版)

编　　著　张　垚
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　罗振华
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　16
字　　数　277 千字
版　　次　2020 年 4 月第三版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9821-8
定　　价　38.00 元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师一小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师一初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师一中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师一高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师一初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师一高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。