数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 2

Mathematical Olympiad Series

# 函数与函数方程

熊　斌　编著

华东师范大学出版社

## 数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

# 总 序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

# 目　录

# 1 映射与函数

## 1.1 映　射

映射是数学中的一个基本概念,几乎每一个数学分支都要用到它.

**定义 1.1**　设 $A$ 和 $B$ 是两个给定的集合,如果按照某种对应法则 $f$,使得对于每一个 $x \in A$,通过 $f$,唯一确定一个 $y \in B$,那么就称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射,记为

$$f: A \to B.$$

集合 $A$ 叫做映射 $f$ 的定义域,集合 $B$ 叫做映射 $f$ 的值域,称 $y$ 为 $x$ 在映射 $f$ 作用下的象,记作 $y = f(x)$,并用符号

$$f: x \mapsto y$$

表示,称 $x$ 为 $y$ 的一个原象.

**例 1**　设集合 $A = \{a, b, c\}$, $B = \{x, y, z\}$.

判断以下三种对应:

$$f: a \mapsto y,\ b \mapsto z,\ c \mapsto x,$$
$$g: a \mapsto y,\ c \mapsto x,$$
$$h: a \mapsto y,\ b \mapsto z,\ c \mapsto x,\ c \mapsto z,$$

是否是 $A$ 到 $B$ 的映射.

**解析**

$$f: a \mapsto y,\ b \mapsto z,\ c \mapsto x$$

是 $A$ 到 $B$ 的一个映射.

而

$$g: a \mapsto y,\ c \mapsto x$$

不是 $A$ 到 $B$ 的映射,因为 $b$ 在 $g$ 的作用下没有象.

$$h: a \mapsto y,\ b \mapsto z,\ c \mapsto x,\ c \mapsto z$$

也不是 $A$ 到 $B$ 的映射. 因为 $A$ 中元素 $c$ 有 $B$ 中两个元素 $x$ 和 $z$ 与它对应.

**例 2** 设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{-1, 0, 1\}$.

(1) 问从 $A$ 到 $B$ 的不同的映射有多少个?

(2) 从 $A$ 到 $B$ 的映射满足 $f(a_1) > f(a_2) \geqslant f(a_3)$, 确定这样的映射 $f: A \to B$ 的个数.

**解析** (1) 确定 $a_1$ 的象,有 3 种方法;确定 $a_2$ 的象,也有 3 种方法;确定 $a_3$ 的象,还是有 3 种方法. 所以,从 $A$ 到 $B$ 不同的映射共有

$$3 \times 3 \times 3 = 27(\text{个}).$$

(2) 由 $f(a_1) > f(a_2) \geqslant f(a_3)$ 知,$f(a_1) = 0$ 或 1.

若 $f(a_1) = 0$,则 $f(a_2) = f(a_3) = -1$.

若 $f(a_1)=1$,则 $f(a_2)=f(a_3)=0$,或 $f(a_2)=f(a_3)=-1$,或 $f(a_2)=0$, $f(a_3)=-1$.

综上,共有 4 种满足题意的映射.

**定义 1.2** 设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射,如果对任意的 $a_1$, $a_2 \in A$,当 $a_1 \neq a_2$ 时,必有 $f(a_1) \neq f(a_2)$,那么称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个单射. 如果对于任意 $b \in B$,均存在 $a \in A$,使得 $f(a) = b$,那么称 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个满射.

若 $A = B$, $f$ 定义为

$$f: x \mapsto x\ (\text{其中 } x \in A),$$

则这个映射称为 $A$ 上的恒等映射(或单位映射).

**例 3** 设 $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

(1) 写出一个 $f: A \to B$,使得 $f$ 是单射,并求 $A$ 到 $B$ 的单射个数;

(2) 写出一个 $f: A \to B$,使得 $f$ 不是单射,并求所有这种映射的个数;

(3) $A$ 到 $B$ 的映射能否是满射?

**解析** (1) 映射

$$f: a_1 \mapsto b_1,\ a_2 \mapsto b_2,\ a_3 \mapsto b_3$$

就是 $A$ 到 $B$ 的一个单射.

这种映射的个数为 $\mathrm{P}_4^3 = 24$(个).

(2) 映射

$$f: a_1 \mapsto b_1,\ a_2 \mapsto b_1,\ a_3 \mapsto b_1$$

即为所求.

这种映射的个数为 $4^3-\mathrm{P}_4^3=40$(个).

(3) 答案是否定的.

由于集合 $A$ 中的每一个元素恰与集合 $B$ 中的一个元素对应,而 $|A|=3$, $|B|=4$(用 $|A|$ 表示集合 $A$ 的元素个数),所以集合 $B$ 中至少有一个元素,在集合 $A$ 中找不到与它对应的元素.因而 $A$ 到 $B$ 的满射不存在.

一般地,如果 $A$ 到 $B$ 有一个单射,那么 $|A|\leqslant|B|$;如果 $A$ 到 $B$ 有一个满射,那么 $|A|\geqslant|B|$.

**例 4**  $\mathbf{N}_+$ 是正整数集合,$\mathbf{N}_+$ 到 $\mathbf{N}_+$ 的映射 $p$、$q$ 定义如下:

$$p(1)=2,\ p(2)=3,\ p(3)=4,\ p(4)=1.$$
$$p(n)=n,\text{当 } n\geqslant 5 \text{ 时};$$
$$q(1)=3,\ q(2)=4,\ q(3)=2,\ q(4)=1.$$
$$q(n)=n,\text{当 } n\geqslant 5 \text{ 时}.$$

(1) 作出 $\mathbf{N}_+$ 到 $\mathbf{N}_+$ 的映射 $f$,使得对一切 $n\in\mathbf{N}_+$ 都有

$$f(f(n))=p(n)+2.$$

举出这样的映射 $f$ 的一个例子;

(2) 证明:$\mathbf{N}_+$ 到 $\mathbf{N}_+$ 的任何映射 $f$,都不可能使得对一切 $n\in\mathbf{N}_+$,都有

$$f(f(n))=q(n)+2.$$

**解析**  (1) 由 $p(n)$的定义及 $f(f(n))=p(n)+2$,可以作出映射的对应表:

$$1\to4\to3\to6\to8\to10\to12\to\cdots$$
$$2\to5\to7\to9\to11\to13\to15\to\cdots$$

于是可构造出 $f(n)$,其对应关系由下表的箭头所示:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
1 & & 4 & & 3 & & 6 & & 8 & & 10 & & 12 & & \cdots \\
\downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & & \\
2 & & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & 13 & & 15 & & \cdots
\end{array}$$

即 $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=7$, $f(4)=5$, $f(5)=3$. 当 $n(\geqslant 6)$ 是偶数时,$f(n)=n+3$;当 $n(\geqslant 6)$ 是奇数时,$f(n)=n-1$. 这个映射满足 $f(f(n))=p(n)+2$.

(2) 用反证法.

假设存在映射 $f$,使得对一切 $n\in\mathbf{N}_+$, $f(f(n))=q(n)+2$,那么有

$$f(f(1)) = q(1) + 2 = 5,\ f(f(5)) = q(5) + 2 = 7,\ \cdots,$$
$$f(f(2)) = q(2) + 2 = 6,$$
$$f(f(6)) = q(6) + 2 = 8,\ \cdots,\ f(f(3)) = q(3) + 2 = 4,$$

$f(f(4))=q(4)+2=3$. $f(f(n))$的对应的值是

$$1 \to 5 \to 7 \to 9 \to 11 \to \cdots,$$
$$2 \to 6 \to 8 \to 10 \to 12 \to \cdots,$$
$$3 \to 4 \to 3.$$

由于 $q$ 是单射,因此 $f$ 也是单射. 设

$$f(3) = a,\ f(4) = b.$$

那么 $f(a) = f(f(3)) = 4$, $f(b) = f(f(4)) = 3$. 所以

$$f(f(a)) = f(4) = b,\ f(f(b)) = f(3) = a.$$

若 $b \geqslant 5$,则

$$a = f(f(b)) = q(b) + 2 = b + 2 \geqslant 7,$$
$$b = f(f(a)) = q(a) + 2 = a + 2 = b + 4,$$

矛盾.



若 $a \geqslant 5$,同样可推得矛盾.

若 $a \leqslant 4$, $b \leqslant 4$,则

$$a = q(b) + 2 \geqslant 3,$$
$$b = q(a) + 2 \geqslant 3.$$

于是 $a$、$b$ 只能是 3、4 或 4、3.

当 $a = 3$, $b = 4$ 时,

$$f(f(3)) = 3 \neq q(3) + 2;$$

当 $a = 4$, $b = 3$ 时,

$$f(f(3)) = 3 \neq q(3) + 2.$$

因此,对一切 $n \in \mathbf{N}_+$,使 $f(f(n)) = q(n) + 2$ 的映射 $f$ 不存在.

**例 5** 设 $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $f: A \to A$ 是 $A$ 到 $A$ 上的映射. 对于 $i \in A$,记 $d_i$ 为 $i - f(i)$ 被 7 除后所得的余数($0 \leqslant d_i < 7$). 如果 $d_0$、$d_1$、$d_2$、$d_3$、$d_4$、$d_5$、$d_6$ 两两不同,则称 $f$ 是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 映射.

(1) 判断下面两个 $A$ 到 $A$ 上的映射 $f_1$、$f_2$ 是不是 $D$ 映射;

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(i)$ | 0 | 4 | 6 | 5 | 1 | 3 | 2 |

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2(i)$ | 1 | 6 | 4 | 2 | 0 | 5 | 3 |

(2) 设 $f$ 是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 映射，令

$$F(i)=d_i,\ i\in A,$$

证明：$F$ 也是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 映射；

(3) 证明：所有 $A$ 到 $A$ 上的不同的 $D$ 映射的个数是奇数.

**解析** (1) 对于 $f_1$，容易算得 $d_0=0$, $d_1=4$, $d_2=3$, $d_3=5$, $d_4=3$, $d_5=2$, $d_6=4$. 由 $D$ 映射的定义知，$f_1$ 不是 $D$ 映射.

对于 $f_2$，可算得 $d_0=6$, $d_1=2$, $d_2=5$, $d_3=1$, $d_4=4$, $d_5=0$, $d_6=3$，故 $f_2$ 是 $D$ 映射.

(2) 由于 $f$ 是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 映射，因此，$d_0$, $d_1$, …, $d_6$ 两两不同，并且 $0\leqslant d_i<7$, $0\leqslant i\leqslant 6$. 所以，$F$ 是 $A$ 到 $A$ 上的映射.

由 $d_i$ 的定义知，

$$i-f(i)\equiv d_i(\bmod 7),$$

所以

$$i-F(i)=i-d_i\equiv f(i)\ (\bmod 7).$$

因为 $0\leqslant f(i)\leqslant 6$，所以从上式知，$f(i)$ 就是 $i-F(i)$ 被 7 除所得的余数. 又因为 $f(0)$, $f(1)$, …, $f(6)$ 两两不同，所以 $F$ 是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 映射.

(3) 显然，$A$ 到 $A$ 上的 $D$ 映射的数目是有限多个.

由上面第(2)小题知，给定一个 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 映射 $f$，可以得到 $A$ 到 $A$ 上的另一个 $D$ 映射. 下面我们先来计算满足 $F\neq f$ 的 $D$ 映射的数目.

设 $f$ 是 $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 映射，$F$ 是从 $f$ 出发按第(2)小题的方法所得到的 $D$ 映射. 对于 $F$，用同样的方法又可以得到一个 $D$ 映射 $G$，由第(2)小题知，$i-F(i)$ 被 7 除所得的余数就是 $f(i)$，即

$$G(i)=f(i),\ i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 6.$$

从而 $G=f$. 也就是说，从 $F$ 出来，按第(2)小题的方法所得到的 $D$ 映射恰好就是原来的 $f$. 因此，对于满足 $F\neq f$ 的 $D$ 映射，都可以用第(2)小题的方法使它们两两配对. 这样的 $D$ 映射的数目是偶数.

接下来计算满足 $F=f$ 的 $D$ 映射的数目.

因为

$$i-F(i)\equiv f(i)\ (\bmod 7),$$
$$F(i)=f(i),$$

所以

$$2f(i)\equiv i\ (\bmod 7),$$

其中, $0\leqslant i\leqslant 6$, $0\leqslant f(i)\leqslant 6$.

当 $i=0$ 时, $f(0)=0$;　当 $i=1$ 时, $f(1)=4$;

当 $i=2$ 时, $f(2)=1$;　当 $i=3$ 时, $f(3)=5$;

当 $i=4$ 时, $f(4)=2$;　当 $i=5$ 时, $f(5)=6$;

当 $i=6$ 时, $f(6)=3$.

所以,满足 $F=f$ 的 $D$ 映射(容易验证它是 $D$ 映射)只有下列一个:

| $i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(i)$ | 0 | 4 | 1 | 5 | 2 | 6 | 3 |

综上所述, $A$ 到 $A$ 上的 $D$ 映射的数目为奇数.



**定义 1.3**　设 $f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一个映射. 如果 $f$ 既是单射,又是满射,那么 $f$ 称为一一对应(或双射).

恒等映射是一一对应,例 5(1)中的映射 $f_1$、$f_2$ 也都是一一对应.

如果集合 $A$ 与集合 $B$ 之间存在一一对应 $f$,那么集合 $A$ 与集合 $B$ 的元素个数相等,即 $|A|=|B|$.

反过来,如果 $|A|=|B|$,那么在集合 $A$ 与集合 $B$ 之间必存在一个一一对应,这只要将 $A$ 中的第一个元素与 $B$ 中的第一个元素对应, $A$ 中的第二个元素与 $B$ 中的第二个元素对应,依此类推即可.

**例 6**　给定一个正整数 $n$. 有多少个满足条件

$$0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant n$$

的四元有序整数组 $(a, b, c, d)$?

**解析**　作映射 $f$:

$$(a, b, c, d)\mapsto(a, b+1, c+2, d+3).$$

于是, $f$ 是从集合 $A=\{(a, b, c, d)\mid 0\leqslant a\leqslant b\leqslant c\leqslant d\leqslant n\}$ 到集合

$B=\{(a, b', c', d') \mid 0\leqslant a<b'<c'<d'\leqslant n+3\}$的一个映射. 容易验证这个映射是一一对应. 所以 $|A|=|B|$.

由于$|B|$就是集合$\{0, 1, 2, \cdots, n+3\}$的四元子集的个数，即$C_{n+4}^4$，从而$|A|=C_{n+4}^4$.

**说明**　利用一一对应，可以帮助我们解决许多组合计数问题. 当我们欲求集合 $A$ 的元素个数时，可以寻找一个既能与集合 $A$ 建立一一对应又便于计数的集合 $B$，算出集合 $B$ 的元素个数即可. 本例就是如此，下面再看一个有趣的问题.

**例 7**　数学竞赛命题委员会有 9 名教授组成. 命好的试题藏在一个保险箱里，要求至少有 6 名教授在场时才能打开保险箱. 问保险箱至少应安上多少把锁，配多少把钥匙，怎样把钥匙发给命题委员？

**解析**　设 $B$ 是保险箱上所安的锁的集合，$A$ 是 9 名命题委员中所有 5 人组的集合. 显然

$$|A|=C_9^5=126.$$

对于一个 5 人组 $a\in A$，依题意，必有唯一的一把锁 $b\in B$，使得 5 人组中无人能打开锁 $b$. 令 $b$ 是 $a$ 在 $A$ 到 $B$ 的映射 $f$ 下的象，即 $b=f(a)$. 于是便定义了集合 $A$ 到集合 $B$ 的一个映射 $f$. 下证 $f$ 是一一对应.

对于集合 $A$ 中的两个不同的 5 人组 $a_1$、$a_2$，它们所对应的锁 $b_1(=f(a_1))$，$b_2(=f(a_2))$必不相同. 否则，若 $b_1=b_2$，则当两个 5 人组 $a_1$ 与 $a_2$(其中至少有 6 名命题委员)都在场时，仍然打不开锁 $b_1$，这与题设矛盾，从而 $f$ 是单射.

又对每一把锁 $b\in B$，必有一个 5 人组 $a\in A$，他们不能打开锁 $b$，即 $b=f(a)$，因此 $f$ 是满射.

综上可知，$f$ 是 $A$ 到 $B$ 的一一对应.

所以 $|B|=|A|=126$，即应安 126 把锁.

现在来考虑如何配钥匙. 对于每把锁 $b\in B$，必有 5 人组 $a\in A$，他们中的每一个人都不能打开锁 $b$，而另外的 4 个人每个人都能打开锁 $b$，因此，每把锁应配 4 把钥匙，分给与这把锁对应的 5 人组之外的 4 个人. 故总共应配 $4\times 126=504$ 把钥匙，并把每把锁的 4 把钥匙分发给一个 4 人小组的每个人，不同的 4 人组对应于不同的钥匙.

**例 8**　设集合 $S_n=\{1, 2, \cdots, n\}$. 若 $X$ 是 $S_n$ 的子集，把 $X$ 中的所有数的和称为 $X$ 的"容量"(规定空集的容量为 0). 若 $X$ 的容量为奇(偶)数，则称 $X$ 为 $S_n$ 的奇(偶)子集.

(1) 求证：$S_n$ 的奇子集与偶子集个数相等；

(2) 求证：当 $n \geqslant 3$ 时，$S_n$ 的所有奇子集的容量之和与所有偶子集的容量之和相等；

(3) 当 $n \geqslant 3$ 时，求 $S_n$ 的所有奇子集的容量之和.

（1992 年全国高中数学联赛）

**分析** 要证明两个集合的元素个数一样多，一种方法是直接把这两个集合的元素个数算出来，另一种方法是在这两个集合之间建立一个一一对应. 本题我们将用后一种方法来解.

**解析** (1) 设 $A$ 是 $S_n$ 的任一奇子集，构造映射 $f$ 如下：

$$A \mapsto A - \{1\}，若\ 1 \in A；$$
$$A \mapsto A \cup \{1\}，若\ 1 \notin A.$$

（注：$A-\{1\}$表示从集合 $A$ 中去掉 1 后得到的集合）

所以，映射 $f$ 是将奇子集映为偶子集的映射.

易知，若 $A_1$，$A_2$ 是 $S_n$ 的两个不同的奇子集，则 $f(A_1) \neq f(A_2)$，即 $f$ 是单射.

又对 $S_n$ 的每一个偶子集 $B$，若 $1 \in B$，则存在 $A=B\backslash\{1\}$，使得 $f(A)=B$；若 $1 \notin B$，则存在 $A=B\cup\{1\}$，使得 $f(A)=B$，从而 $f$ 是满射.

所以，$f$ 是 $S_n$ 的奇子集所组成的集到 $S_n$ 的偶子集所组成的集之间的一一对应，从而 $S_n$ 的奇子集与偶子集个数相等，故均为 $\frac{1}{2} \cdot 2^n = 2^{n-1}$ 个.

(2) 设 $a_n$ ($b_n$)表示 $S_n$ 中全体奇(偶)子集容量之和.

若 $n$ ($\geqslant 3$) 是奇数，则 $S_n$ 的奇子集有如下两类：①$S_{n-1}$ 的奇子集；②$S_{n-1}$ 的偶子集与集$\{n\}$ 的并，于是得

$$a_n = a_{n-1} + (b_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}). \qquad ①$$

又 $S_n$ 的偶子集可由 $S_{n-1}$的偶子集和 $S_{n-1}$的奇子集与$\{n\}$的并构成，所以

$$b_n = b_{n-1} + (a_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}). \qquad ②$$

由①、②，得 $$a_n = b_n.$$

若 $n$ ($\geqslant 4$) 是偶数，同上可知

$$a_n = a_{n-1} + (a_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}),$$
$$b_n = b_{n-1} + (b_{n-1} + n \cdot 2^{n-2}).$$

由于 $n-1$ 是奇数，由上面已证 $a_{n-1} = b_{n-1}$，从而 $a_n = b_n$.

综上即知，$a_n = b_n$，$n = 3, 4, \cdots$.

(3) 由于 $S_n$ 的每一个元素均在 $2^{n-1}$ 个 $S_n$ 的子集中出现，所以，$S_n$ 的所有子集容量之和为

$$2^{n-1}(1+2+\cdots+n)=2^{n-2}n(n+1).$$

又由(2)知 $a_n=b_n$，所以

$$a_n=\frac{1}{2}\cdot 2^{n-2}n(n+1)=2^{n-3}n(n+1).$$

**说明** 第(2)小题的证明中，建立了递推关系. 这也是解决“计数”问题的一个有效方法.

**例 9** 设集合 $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，映射 $f:A\to A$ 满足对一切 $x\in A$，有 $f(f(f(x)))=x$.

(1) 证明：对任意 $x_1, x_2\in A$，$x_1\neq x_2$，均有 $f(x_1)\neq f(x_2)$；

(2) 求所有这样的映射 $f$ 的个数.

(2015 年全国高中数学联赛 C 卷)

**解析** (1) 用反证法. 若存在 $x_1, x_2\in A$，$x_1\neq x_2$，使得 $f(x_1)=f(x_2)$，则

$$x_1=f(f(f(x_1)))=f(f(f(x_2)))=x_2,$$

矛盾. 故命题得证.

(2) 对满足条件的映射 $f$，考虑任一 $x\in A$.

若 $f(x)=x$(即 $x$ 是 $f$ 的不动点)，则显然有 $f(f(f(x)))=x$.

若 $f(x)=y\neq x$，设 $f(y)=z$. 由(1)知 $z\neq y$. 又显然 $z\neq x$(否则将有 $f(f(f(x)))=f(f(y))=f(x)=y\neq x$，矛盾)，于是

$$f(z)=f(f(y))=f(f(f(x)))=x,$$

即 $f$ 限制在集合 $\{x,y,z\}$ 上是一个“三轮换”.

对 $k=0,1,2$，用 $n_k$ 表示在 $A$ 上可分解为 $k$ 个三轮换和 $8-k$ 个不动点的映射 $f$ 的个数. 显然 $n_0=1$.

由于限制在三元集 $\{x,y,z\}$ 上的三轮换可以是 $f(x)=y$，$f(y)=z$，$f(z)=x$，也可以是 $f(x)=z$，$f(z)=y$，$f(y)=x$，共两种情况，因此

$$n_1=\mathrm{C}_8^3\times 2=112,\ n_2=\frac{\mathrm{C}_8^3\mathrm{C}_5^3}{2!}\times 2^2=1120.$$

综上可知，满足条件的映射 $f$ 的个数为

$$n_0+n_1+n_2=1+112+1120=1233.$$

## 1.2 函　　数

函数也是数学中的一个基本而又重要的概念. 在现代数学中，它几乎渗透到各个分支中.

**定义 1.4**　从非空数集 $A$ 到非空数集 $B$ 的一个映射 $f: A \to B$ 叫做 $A$ 到 $B$ 的函数，记作：

$$y = f(x)\text{，其中 } x \in A,\ y \in B.$$

这里的数集 $A$ 称为函数 $f$ 的定义域. 对于 $A$ 中的每一个元素 $x$，根据对应法则 $f$ 所对应的 $B$ 中的元素 $y$，称为 $f$ 在点 $x$ 的函数值，记为 $f(x)$. 全体函数值的集合

$$f(A) = \{y \mid y = f(x),\ x \in A\} \subseteq B$$

称为函数 $f$ 的值域.

由于上述定义中的数集 $B$ 常用实数集 $\mathbf{R}$ 来代替，定义域常用数集 $D$ 表示. 于是确定函数的主要因素是两个：对应法则（映射）$f$ 和定义域. 所以，我们也常用



$$y = f(x),\ x \in D$$

来表示一个函数，并称 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量.

根据函数 $y = f(x)$，$x \in D$ 的定义，数集 $D$ 中的每一个数 $x$ 与值域 $f(D)$ 中的数 $y$ 相对应，因而可以用有序数对集

$$G = \{(x,\ y) \mid y = f(x),\ x \in D\}$$

表示函数 $y = f(x)$，$x \in D$.

点集 $G$ 在坐标平面上描绘出这个函数的图象.

在中学数学课程中，函数的表示法主要有三种：列表法，图象法，解析法.

在用解析法表示函数时，有时无法只用一个解析式来表示函数，而只能在定义域的不同部分用不同的解析式来表示，这类函数称为分段函数. 例如，函数

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{当 } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ 时}, \\ x^2, & \text{当 } \dfrac{1}{2} < x \leqslant 1 \text{ 时}, \\ \pi, & \text{当 } 1 < x \leqslant 8 \text{ 时}. \end{cases}$$

分段函数的一般形式为

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & \text{当 } x\in D_1 \text{ 时}, \\ f_2(x), & \text{当 } x\in D_2 \text{ 时}, \\ & \cdots\cdots \\ f_n(x), & \text{当 } x\in D_n \text{ 时}. \end{cases}$$

其中，$D_i \cap D_j=\varnothing$，$i\neq j$，此时函数 $f(x)$的定义域为

$$D=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n.$$

有些函数无法用列表法、图象法和解析法来表示，只能用语言来描述. 例如，函数

$$D(x)=\begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}. \end{cases}$$

有时候，函数的自变量与因变量是通过另外一些变量才建立起它们之间的对应关系的.

**定义 1.5** 设有两个函数：

$$y=f(u),\ u\in D;$$
$$u=g(x),\ x\in E.$$

如果集合 $E^*=\{x \mid g(x)\in D,\ x\in E\}\neq\varnothing$，则对每一个 $x\in E^*$，可通过函数 $g$ 对应 $D$ 中唯一一个值 $u$，而 $u$ 又通过函数 $f$ 对应唯一一个值 $y$. 这样就确定了一个定义在 $E^*$ 上，以 $x$ 为自变量，$y$ 为因变量的函数，记作

$$y=f[g(x)],\ x\in E^*$$

或 $$y=(f\circ g)(x),\ x\in E^*,$$

称为由函数 $f$ 和 $g$ 经过复合运算得到的复合函数.

例如，函数 $y=f(u)=\sqrt{u}$，$u\in D=[0,+\infty)$，$u=g(x)=1-x^2$，$x\in E=(-\infty,+\infty)$，经过复合，得

$$y=f[g(x)]=\sqrt{1-x^2}.$$

其定义域 $E^*=[-1,1]$，值域 $f[g(E^*)]=[0,1]$.

自变量与因变量的关系往往是相对的.

**定义 1.6**　设函数

$$y=f(x),\ x\in D. \tag{①}$$

若对于值域 $f(D)$ 中每一个值 $y_0$，$D$ 中有且只有一个值 $x_0$，使得

$$f(x_0)=y_0,$$

则按此对应法则能得到一个定义在 $f(D)$ 上的函数，称这个函数为 $f$ 的反函数，记作：

$$f^{-1}: f(D)\to D$$

或
$$x=f^{-1}(y),\ y\in f(D). \tag{②}$$

习惯上，我们用 $x$ 作为自变量的记号，$y$ 为因变量的记号，因此，函数①的反函数②可改写为

$$y=f^{-1}(x),\ x\in f(D).$$

**例 10**　(1) 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{\log_2(x^2+2x-3)}$ 的定义域；

(2) 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,1]$. 求 $f(ax)+f\left(\dfrac{x}{a}\right)$ 的定义域，其中 $a>0$.



**解析**　(1) 函数的定义域是满足下列条件的解集.

$$\begin{cases}x^2-4\geqslant 0,\\ x^2+2x-3>0,\\ x^2+2x-3\neq 1.\end{cases}$$

因此，定义域为 $(-\infty,-1-\sqrt{5})\cup(-1-\sqrt{5},-3)\cup[2,+\infty)$.

(2) $f(ax)+f\left(\dfrac{x}{a}\right)$ 的定义域是下列两个集合的交集：

$$D_1=\{x\mid -1\leqslant ax\leqslant 1\}=\left[-\frac{1}{a},\frac{1}{a}\right],$$

$$D_2=\left\{x\,\middle|\,-1\leqslant\frac{x}{a}\leqslant 1\right\}=[-a,a].$$

当 $a\geqslant 1$ 时，$a\geqslant\dfrac{1}{a}$，$-a\leqslant-\dfrac{1}{a}$，故 $D_1\cap D_2=D_1$；

当 $0<a<1$ 时，$\dfrac{1}{a}>a$，$-\dfrac{1}{a}<-a$，故 $D_1\cap D_2=D_2$.

因此，$f(ax)+f\left(\dfrac{x}{a}\right)$的定义域为

$$[-a,\ a](\text{当 } 0<a<1) \text{ 或} \left[-\frac{1}{a},\ \frac{1}{a}\right](\text{当 } a\geqslant 1).$$

**例 11**　求函数 $y=x+\sqrt{x^2-3x+2}$ 的值域.

（2001 年全国高中数学联赛）

**解析**　由题设，得 $\sqrt{x^2-3x+2}=y-x\geqslant 0$，所以

$$x^2-3x+2=y^2-2xy+x^2,$$

即

$$(2y-3)x=y^2-2.$$

由上式知 $y\neq\dfrac{3}{2}$，且 $x=\dfrac{y^2-2}{2y-3}$. 由 $y\geqslant x=\dfrac{y^2-2}{2y-3}$，得

$$\frac{y^2-3y+2}{2y-3}\geqslant 0,\ \frac{(y-1)(y-2)}{y-\frac{3}{2}}\geqslant 0.$$

所以 $1\leqslant y<\dfrac{3}{2}$ 或 $y\geqslant 2$.

又任取 $y_0\in[2,+\infty)$，令 $x_0=\dfrac{y_0^2-2}{2y_0-3}$，则

$$x_0-2=\frac{y_0^2-2}{2y_0-3}-2=\frac{(y_0-2)^2}{2y_0-3}\geqslant 0.$$

故 $x_0\geqslant 2$，所以 $x_0^2-3x_0+2\geqslant 0$，且 $y_0=x_0+\sqrt{x_0^2-3x_0+2}$.

任取 $y_0\in\left[1,\ \dfrac{3}{2}\right)$，令 $x_0=\dfrac{y_0^2-2}{2y_0-3}$，则

$$x_0-1=\frac{y_0^2-2}{2y_0-3}-1=\frac{(y_0-1)^2}{2y_0-3}\leqslant 0.$$

故 $x_0\leqslant 1$，于是 $x_0^2-3x_0+2\geqslant 0$，且 $y_0=x_0+\sqrt{x_0^2-3x_0+2}$.

综上，所求的函数的值域为$\left[1,\ \dfrac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty)$.

**说明**　我们先求出了 $y$ 的范围 $\left[1,\ \dfrac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty)$，这是函数的值域吗？第二部分说明了对于$\left[1,\ \dfrac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty)$ 中的任意一个数 $y_0$，总存在一个 $x_0$，使得 $y_0=x_0+\sqrt{x_0^2-3x_0+2}$，这证明了函数的值域是$\left[1,\ \dfrac{3}{2}\right)\cup[2,+\infty)$.

**例 12**　设函数：

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } |x|\leqslant 1 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } |x|>1 \text{ 时};\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases}2-x^2, & \text{当 } |x|\leqslant 1 \text{ 时},\\ 2, & \text{当 } |x|>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

求 $f[f(x)]$，$f[g(x)]$，$g[f(x)]$，$g[g(x)]$.

**解析**　$f[f(x)]=1$，$x\in\mathbf{R}$.

$$f[g(x)]=\begin{cases}0, & \text{当 } x\neq\pm 1 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x=\pm 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

$$g[f(x)]=\begin{cases}1, & \text{当 } |x|\leqslant 1 \text{ 时},\\ 2, & \text{当 } |x|>1 \text{ 时}.\end{cases}$$

$$g[g(x)]=\begin{cases}2, & \text{当 } x\neq\pm 1 \text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x=\pm 1 \text{ 时}.\end{cases}$$

从本题可以看出，$f[g(x)]$不一定与 $g[f(x)]$相等.

对于函数的图象，有如下常见的变换：

(1) 平移变换　将函数 $y=f(x)$ 的图象向左(或向右)平移 $h$ $(h>0)$ 个单位后就得到函数 $y=f(x+h)$(或 $y=f(x-h)$) 的图象；将函数 $y=f(x)$ 的图象向上(或向下)平移 $k$ $(k>0)$ 个单位后就得到函数 $y=f(x)+k$ (或 $y=f(x)-k$) 的图象.

(2) 伸缩变换　将函数 $y=f(x)$ 的图象上所有点的横坐标变到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍就得到函数 $y=f(\omega x)$ 的图象；将函数 $y=f(x)$ 的图象上所有点的纵坐标变到原来的 $\frac{1}{\omega}$ 倍就得到函数 $y=\frac{f(x)}{\omega}$ 的图象.

(3) 对称变换　函数 $y=f(x)$ 的图象与函数 $y=-f(x)$，$y=f(-x)$，$y=-f(-x)$ 的图象分别关于 $x$ 轴、$y$ 轴、原点对称.

(4) 翻转变换　将函数 $y=f(x)$ 的图象在 $x$ 轴上方的部分不变，$x$ 轴下方的部分翻转到 $x$ 轴的上方就得到函数 $y=|f(x)|$ 的图象.

**例 13**　作出函数 $y=|x^2+x-6|$ 的图象.

**解析**　先作出 $y=x^2+x-6$ 的图象，然后将此图象在 $x$ 轴下方的部分对称地翻折到 $x$ 轴的上方即可，如图 1－1 实线所示部分.

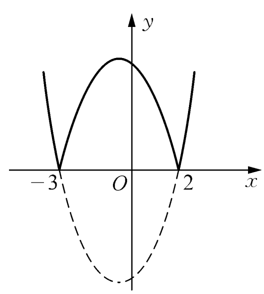


**图 1－1**

**例 14** (1) 设抛物线 $y=2x^2$，把它向右平移 $p$ 个单位，或向下移 $q$ 个单位，都能使得抛物线与直线 $y=x-4$ 恰好有一个交点，求 $p$、$q$ 的值；

(2) 把抛物线 $y=2x^2$ 向左平移 $p$ 个单位，向上平移 $q$ 个单位，则得到的抛物线经过点 $(1,3)$ 与 $(4,9)$，求 $p$、$q$ 的值.

(3) 把抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 向左平移 3 个单位，向下平移 2 个单位后，所得图象是经过点 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 的抛物线 $y=ax^2$，求原二次函数的解析式.

**解析** (1) 抛物线 $y=2x^2$ 向右平移 $p$ 个单位后，得到的抛物线为 $y=2(x-p)^2$. 于是方程 $2(x-p)^2=x-4$ 有两个相同的根，即方程

$$2x^2-(4p+1)x+2p^2+4=0$$

根的判别式

$$\Delta=(4p+1)^2-4\cdot 2\cdot(2p^2+4)=0.$$

所以 $p=\frac{31}{8}$. 这时的交点为 $\left(\frac{33}{8},\frac{1}{8}\right)$.

抛物线 $y=2x^2$ 向下平移 $q$ 个单位，得到抛物线 $y=2x^2-q$. 于是方程 $2x^2-q=x-4$ 有两个相同的根，即

$$\Delta=1-4\cdot 2(4-q)=0.$$

所以 $q=\frac{31}{8}$. 这时的交点为 $\left(\frac{1}{4},-\frac{15}{4}\right)$.

(2) 把 $y=2x^2$ 向左平移 $p$ 个单位，向上平移 $q$ 个单位，得到的抛物线为

$$y=2(x+p)^2+q.$$

于是，由题设，得

$$\begin{cases}3=2(1+p)^2+q,\\9=2(4+p)^2+q.\end{cases}$$

解方程组，得 $p=-2$，$q=1$，即抛物线向右平移了 2 个单位，向上平移了 1 个单位.

(3) 首先，抛物线 $y=ax^2$ 经过点 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$，可求得 $a=-\frac{1}{2}$.

设原来的二次函数为 $y=-\frac{1}{2}(x-h)^2+k$，由题设知

$$\begin{cases}-h+3=0,\\k-2=0.\end{cases}$$

解方程组,得 $h=3$, $k=2$. 故原二次函数为

$$y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2.$$

**例 15** 已知函数 $y=f(x)$ 的图象如图 1-2 所示.

(1) 写出 $y=f(x)$ 的解析式;

(2) 求 $y=f(2x)$ 的解析式,并作出 $y=f(2x)$ 的图象;

(3) 求 $y=f(2x-1)$ 的解析式,并作出 $y=f(2x-1)$ 的图象.

**解析** (1) 由图 1-2,可知 $f(x)=|x|$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

(2) 由第(1)小题,知 $f(2x)=|2x|=2|x|$,注意到 $-1\leqslant 2x\leqslant 1$,所以

$$f(2x)=2|x|\left(-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right).$$

其图象如图 1-3 所示.

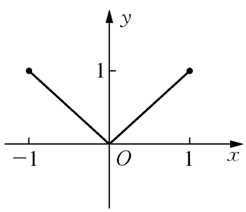


**图 1-2**

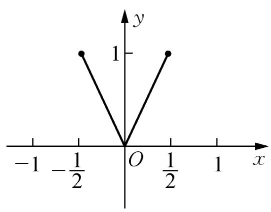


**图 1-3**

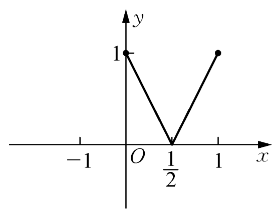


**图 1-4**

(3) 同上,可得 $f(2x-1)=|2x-1|$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$,其图象如图 1-4 所示.

**例 16** 已知 $f(x)$、$g(x)$均为定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数,$f(x)$的图象关于直线 $x=1$ 对称,$g(x)$的图象关于点$(1,-2)$中心对称,$f(x)+g(x)=9^x+x^3+1$,求 $f(2)g(2)$的值.

**解析** 由条件知

$$f(0)+g(0)=2, \quad ①$$

$$f(2)+g(2)=81+8+1=90. \quad ②$$

由 $f(x)$、$g(x)$图象的对称性,可得 $f(0)=f(2)$, $g(0)+g(2)=-4$,结合①知,

$$f(2)-g(2)-4=f(0)+g(0)=2. \quad ③$$

由②、③解得 $f(2)=48$, $g(2)=42$,从而

$$f(2)g(2)=48\times 42=2016.$$

**例 17** 设 $f(x)=x^2+ax+b\cos x$，$\{x \mid f(x)=0,\ x\in\mathbf{R}\}=\{x \mid f(f(x))=0,\ x\in\mathbf{R}\}\neq\varnothing$,求满足条件的所有实数 $a$、$b$ 的值.

**解析** 设 $x_0\in\{x \mid f(x)=0,\ x\in\mathbf{R}\}$,则 $b=f(0)=f(f(x_0))=0$.

于是 $f(x)=x(x+a)$. 故

$$f(f(x))=f(x)(f(x)+a)=x(x+a)(x^2+ax+a).$$

显然,$a=0$ 满足题意.

若 $a\neq 0$,由于 $x^2+ax+a=0$ 的根不可能是 $0$ 或者 $-a$,故 $x^2+ax+a=0$ 没有实数根,于是 $\Delta=a^2-4a<0$,所以 $0<a<4$.

综上所述,满足题设条件的 $a$,$b$ 分别为:$0\leqslant a<4$,$b=0$.

**例 18** 已知 $a$、$b$、$c$、$d$ 为非零实数,$f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$,$x\in\mathbf{R}$,且 $f(19)=19$,$f(97)=97$. 若当 $x\neq-\dfrac{d}{c}$ 时,对于任意实数 $x$,均有 $f[f(x)]=x$,试求出 $f(x)$ 值域以外的唯一数. (第 15 届美国数学邀请赛)

**解析** 由题设,对任意实数 $x\neq-\dfrac{d}{c}$,有 $f[f(x)]=x$,所以

$$\frac{a\cdot\dfrac{ax+b}{cx+d}+b}{c\cdot\dfrac{ax+b}{cx+d}+d}=x.$$

化简,得 $$(a+d)cx^2+(d^2-a^2)x-b(a+d)=0.$$

由于上述方程对 $x\neq-\dfrac{d}{c}$ 恒成立,故 $a+d=0$,且 $d^2-a^2=0$,所以 $d=-a$.

又 $f(19)=19$,$f(97)=97$,即 19、97 是方程 $\dfrac{ax+b}{cx+d}=x$ 的两个根,即 19、97 是方程 $cx^2+(d-a)x-b=0$ 的两个根,故由韦达定理,得

$$\frac{a-d}{c}=116,\ -\frac{b}{c}=1843.$$

结合 $d=-a$,得 $a=58c$,$b=-1843c$,$d=-58c$,从而

$$f(x)=\frac{58x-1843}{x-58}=58+\frac{1521}{x-58}.$$

于是 $f(x)$ 取不到 58 这个数,即 58 是 $f(x)$ 值域外的唯一数.

**例 19**　已知 $f(x)$、$g(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上递增的一次函数，$f(x)$为整数当且仅当 $g(x)$为整数. 证明：对一切 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)-g(x)$ 为整数.

（2010 年中国女子数学奥林匹克）

**证明**　设 $f(x)=ax+b$，$g(x)=cx+d$，$a>0$，$c>0$. 我们先证明$a=c$. 若不然，由对称性不妨设 $a>c$.

当 $x=-\dfrac{b}{a}$ 时，$f(x)=0$，因此 $g\left(-\dfrac{b}{a}\right)$是整数；当 $x=-\dfrac{b-1}{a}$ 时，$f(x)=1$，因此 $g\left(-\dfrac{b-1}{a}\right)$是整数. 故

$$g\left(-\frac{b}{a}\right)-g\left(-\frac{b-1}{a}\right)=\left(c\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)+d\right)-\left(c\cdot\left(-\frac{b-1}{a}\right)+d\right)=-\frac{c}{a}$$

是一个整数，但这与 $a>c>0$ 矛盾，又当 $x=-\dfrac{b}{a}$ 时，$f(x)=0$，因此 $g\left(-\dfrac{b}{a}\right)=d-b$是整数，因此对任意的$x\in\mathbf{R}$，$f(x)-g(x)=b-d$是整数，从而命题得证.

## 习　题　1

**1** 设 $X$ 和 $Y$ 是两个集合，$B\subset A\subset X$. 举例说明，存在着映射 $f:X\to Y$，使得

$$f(A-B)\neq f(A)-f(B).$$

并证明，当 $f$ 是单射时，$f(A-B)=f(A)-f(B)$.

**2** 设集合

$$M=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 9,\ x\in\mathbf{N}\},$$
$$F=\{(a,\ b,\ c,\ d)\mid a,\ b,\ c,\ d\in M\}.$$

定义 $F$ 到 $\mathbf{Z}$ 的映射

$$f:(a,\ b,\ c,\ d)\mapsto ab-cd.$$

若 $u$、$v$、$x$、$y$ 都是$M$ 中的元素，且满足

$$f:(u,\ v,\ x,\ y)\mapsto 39,$$
$$(u,\ y,\ x,\ v)\mapsto 66.$$

求 $x$、$y$、$u$、$v$.

**3** 给定一个正整数 $n(\geqslant 6)$，有多少个满足条件

$$1 \leqslant a < b \leqslant c < d \leqslant n$$

的四元有序数组($a$, $b$, $c$, $d$)?

**4** 已知 $f(2x-1)=x^2$, $x \in \mathbf{R}$,求函数 $f(f(x))$ 的值域.

**5** 已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}+1$,求 $f(x+1)$.

**6** 已知两个实数集 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_{100}\}$, $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_{50}\}$,若从 $A$ 到 $B$ 的映射 $f$ 使得 $B$ 中每一个元素都有原象,且 $f(a_1) \leqslant f(a_2) \leqslant \cdots \leqslant f(a_{100})$,则这样的映射共有多少个? (2002 年全国高中数学联赛)

**7** 设 $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$,计算:

$$f\left(\frac{1}{2006}\right)+f\left(\frac{2}{2006}\right)+f\left(\frac{3}{2006}\right)+\cdots+f\left(\frac{2005}{2006}\right).$$

**8** 当 $x \in [-1, 1]$ 时,求

$$f(x)=\frac{x^4+4x^3+17x^2+26x+106}{x^2+2x+7}$$

的值域.

**9** 已知函数 $f(x)$对于任意实数 $x$,都有

$$f(x)=f(398-x)=f(2158-x)=f(3214-x),$$

问:函数值列 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $\cdots$, $f(999)$中最多有多少个不同的值?

**10** 设 $f$ 为 $\mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ 的函数,对任意正实数 $x$, $f(3x)=3f(x)$,且

$$f(x)=1-|x-2|, 1 \leqslant x \leqslant 3.$$

求最小的实数 $x$,使得 $f(x)=f(2004)$.

**11** 已知 $f(x)=\begin{cases}-2x, & x<0, \\ x^2-1, & x \geqslant 0,\end{cases}$方程

$$f(x)+2\sqrt{1-x^2}+|f(x)-2\sqrt{1-x^2}|-2ax-4=0$$

有三个实根 $x_1<x_2<x_3$. 若 $x_3-x_2=2(x_2-x_1)$,求实数 $a$ 的值.

**12** 设 $P=\{n \mid n \geqslant 3, n \in \mathbf{N}_+\}$. 函数 $f: P \to \mathbf{N}_+$ 的定义如下:对 $n \in P$, $f(n)$ 是所有不是 $n$ 的约数的正整数中最小的数. 求函数 $f$ 的值域.

# 2 函数的基本性质

函数的奇偶性、单调性、周期性是函数的最基本的性质，它们反映了函数的重要的代数特征.

## 2.1 奇偶性

**定义 2.1** 设函数 $f(x)$的定义域为 $D$，且 $D$ 是关于原点对称的数集. 若对于任意的 $x \in D$，都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$是奇函数.



若对于任意的 $x \in D$，都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$是偶函数.

**例 1** 已知 $f(x)$是定义在$[-6, 6]$上的奇函数，且 $f(x)$在$[0, 3]$上是 $x$ 的一次函数，在$[3, 6]$上是 $x$ 的二次函数. 当 $3 \leqslant x \leqslant 6$ 时，$f(x) \leqslant f(5)=3$，$f(6)=2$，求函数 $f(x)$的解析式.

**分析** 由于 $f(x)$是$[-6, 6]$上的奇函数，所以我们只需先求出 $f(x)$在$[0, 6]$上的表达式即可. 再把$[0, 6]$分成两个区间$[0, 3]$和$[3, 6]$，分别求出 $f(x)$的解析式，关键是求出 $f(3)$.

**解析** 由于 $f(x)$在$[3, 6]$上是二次函数，且 $f(5)$是它的最大值，故可设

$$f(x) = a(x-5)^2 + 3,\ 3 \leqslant x \leqslant 6,$$

所以
$$2 = f(6) = a(6-5)^2 + 3.$$

解方程，得 $a = -1$.

故
$$f(x) = -(x-5)^2 + 3,\ 3 \leqslant x \leqslant 6.$$

从上可知，$f(3)=-1$. 又 $f(x)$ 是奇函数，所以 $f(0)=0$，设

$$f(x)=kx,\ 0\leqslant x\leqslant 3,$$

则

$$-1=f(3)=3k.$$

解方程，得 $k=-\frac{1}{3}$.

所以

$$f(x)=-\frac{1}{3}x,\ 0\leqslant x\leqslant 3.$$

由于 $f(x)=-f(-x)$，所以

当 $-6\leqslant x\leqslant -3$ 时，$3\leqslant -x\leqslant 6$，于是

$$f(x)=-f(-x)=-[-(-x-5)^2+3]=(x+5)^2-3;$$

当 $-3\leqslant x\leqslant 0$ 时，$0\leqslant -x\leqslant 3$，于是

$$f(x)=-f(-x)=-\left(\frac{1}{3}x\right)=-\frac{1}{3}x.$$

综上可知，$f(x)$的解析式为

$$f(x)=\begin{cases}(x+5)^2-3, & \text{当 } -6\leqslant x<-3 \text{ 时},\\ -\frac{1}{3}x, & \text{当 } -3\leqslant x<3 \text{ 时},\\ -(x-5)^2+3, & \text{当 } 3\leqslant x\leqslant 6 \text{ 时}.\end{cases}$$

**说明** 若奇函数的定义域 $D$ 包含数 0，则必有 $f(0)=0$，这是因为 $f(0)=-f(-0)$，从而 $f(0)=0$.

从奇函数和偶函数的定义知，奇函数的图象关于原点对称，偶函数的图象关于 $y$ 轴对称.

**例 2** 证明：任何定义域关于原点对称的函数都可以表示为一个奇函数和一个偶函数的和.

**证明** 设定义域关于原点对称的函数为 $f(x)$，则 $f(x)$与 $f(-x)$ $(x\in D)$同时有意义. 因为

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

所以，令 $f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$，$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$，下面我们来验证 $f_1(x)$是偶函数，$f_2(x)$是奇函数.

$$f_1(-x)=\frac{f(-x)+f(x)}{2}=f_1(x),$$

$$f_2(-x)=\frac{f(-x)-f(x)}{2}=-\frac{f(x)-f(-x)}{2}=-f_2(x).$$

故 $f_1(x)$为偶函数,$f_2(x)$为奇函数,从而命题得证.

**说明** 证明中的 $f_1(x)$和$f_2(x)$是如何想出来的呢?其实,$f_1(x)$和$f_2(x)$是可以“解”出来的. 设 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$,其中 $f_1(x)$ 是偶函数,$f_2(x)$是奇函数. 则

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$
$$f(-x)=f_1(x)-f_2(x),$$

解方程组,得

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},$$

$$f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}.$$

**例 3** 已知定义在 **R** 上的函数 $y=f(x)$,对任意满足 $p^2+q^2=r^2$ 的 $p$、$q$、$r$ 均有 $f(p)+f(q)+f(r)=0$. 函数 $g(x)=f(x)+\tan x+3$ 在 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$上的最大值和最小值分别为 $M$、$m$,求 $M+m$ 的值.

**解析** 令 $p=q=r=0$,则 $f(0)=0$.

令 $q=0$,$p=x$,$r=-x$,则

$$f(x)+f(0)+f(-x)=0,$$

于是

$$f(x)=-f(-x).$$

所以 $f(x)$为奇函数. 故 $y=g(x)-3$ 也为奇函数.

因此,$M+m=6$.

## 2.2 单调性

**定义 2.2** 设函数 $f(x)$的定义域为 $I$. 如果对于任意的 $x_1$, $x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$,那么就说 $y=f(x)$ 在此区间上是增函数,如图 2-1(1)所示.

函数的定义域为 $I$,如果对于任意的 $x_1$, $x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)>f(x_2)$,那么就说 $y=f(x)$ 在此区间上是减函数,如图 2-1(2)所示.

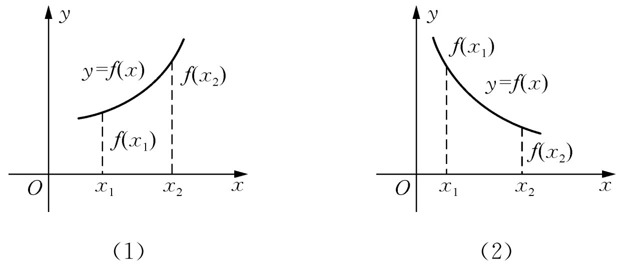


**图 2-1**

如果函数 $y=f(x)$ 在某区间上是增函数或减函数，那么就说 $y=f(x)$ 在此区间上有(严格的)单调性，这一区间叫做 $y=f(x)$ 的单调区间.

对于函数的单调性，我们应该注意以下几点：

(1) 函数的单调性是函数的一个重要性质，但讨论函数的单调性必须在定义域内进行，即函数的单调区间是定义域的子区间.

(2) 函数的单调性是对某一区间而言的，要指明函数的单调性，必须指明是在其定义域的哪一个子区间上，有的函数在其整个定义域上都是增函数，有的函数在其整个定义域上都是减函数；而有的函数在定义域的一些子区间上是增函数，在另一些子区间上是减函数.

(3) 某个函数在一个区间上是增(减)函数，在另一区间上也是增(减)函数，绝不能说它在这两个区间的并集上也是增(减)函数. 例如，$y=\frac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上是减函数，在 $(-\infty,0)$ 上也是减函数，它有两个减区间，但绝不能说 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上也是减函数.

(4) 函数的单调性反映在其图象上是指函数图象的走势. 在单调区间上，增函数的图象是上升的，减函数的图象是下降的.

(5) 中学数学教材中所指的单调性是严格单调的，即必须是 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$，绝不能是 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ 或 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$.

关于函数的单调性，有如下性质：

(1) 若函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在公共区间 $A$ 上都是增(减)函数，则函数 $y=f(x)+g(x)$ 在 $A$ 上也是增(减)函数.

(2) 若两个正值函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在公共区间 $A$ 上都是增(减)函数，则函数 $y=f(x)g(x)$ 在 $A$ 上也是增(减)函数；

若两个负值函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在公共区间 $A$ 上都是增(减)函数，则函数 $y=f(x)g(x)$ 在 $A$ 上是减(增)函数.

(3) 若函数 $y=f(x)$ 是区间 $A$ 上的增(减)函数，值域为 $C$，则其反函数

$y = f^{-1}(x)$ 是 $C$ 上的增(减) 函数.

(4) 若函数 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 在相关区间上是单调函数,则函数 $y = f(g(x))$ 在此区间上也是单调函数;并且若 $y = f(u)$ 和 $u = g(x)$ 的单调性相同(相反),则 $y = f(g(x))$ 是增(减) 函数.

**例 4** 设二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象以 $y$ 轴为对称轴. 已知 $a + b = 1$,并且若点 $(x, y)$ 在 $y = f(x)$ 的图象上,则点 $(x, y^2 + 1)$ 在函数 $g(x) = f(f(x))$ 的图象上.

(1) 求 $g(x)$的解析式;

(2) 设 $F(x) = g(x) - \lambda f(x)$,问是否存在实数 $\lambda$,使函数 $F(x)$ 在 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$内是减函数,在$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$内是增函数.

**解析** (1) 因为 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的对称轴为 $y$ 轴,即$-\frac{b}{2a} = 0$,所以 $b = 0$,从而 $a = 1$, $f(x) = x^2 + c$.

设$(x_0, y_0)$ 在 $y = f(x)$ 的图象上,由题意知,点$(x_0, y_0^2 + 1)$ 在 $y = f(f(x))$ 的图象上,即

$$y_0 = x_0^2 + c,$$
$$y_0^2 + 1 = (x_0^2 + c)^2 + c.$$

从上面两式易知 $c = 1$. 因此 $f(x) = x^2 + 1$. 进而

$$g(x) = (x^2 + 1)^2 + 1.$$

(2) 由第(1)小题,得

$$F(x) = g(x) - \lambda f(x) = x^4 + (2 - \lambda)x^2 + 2 - \lambda.$$

设 $x_1 < x_2 < -\frac{\sqrt{2}}{2}$,则

$$F(x_1) - F(x_2) = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + 2 - \lambda).$$

要使 $F(x)$在 $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$内为减函数,只需 $F(x_1) - F(x_2) > 0$,又因为$x_1^2 - x_2^2 > 0$, 故只要

$$x_1^2 + x_2^2 + 2 - \lambda > 0.$$

所以 $$\lambda < x_1^2 + x_2^2 + 2.$$

然而当 $x_1,\ x_2 \in \left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$时，

$$x_1^2 + x_2^2 + 2 > 3.$$

因此只要 $\lambda \leqslant 3$，$F(x)$ 在$\left(-\infty,\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$内是减函数.

同理，当 $\lambda \geqslant 3$ 时，$F(x)$ 在$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$内是增函数.

综上讨论，存在唯一的实数 $\lambda = 3$，使得对应的 $F(x)$ 满足要求.

**例 5** 已知 $x,\ y \in \left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$，$a \in \mathbf{R}$，且

$$\begin{cases} x^3 + \sin x - 2a = 0, \\ 4y^3 + \sin y\cos y + a = 0. \end{cases}$$

求 $\cos(x+2y)$ 的值. （1994 年全国高中数学联赛）

**分析** 此题的特点就是入口非常小，所求的 $\cos(x+2y)$ 的值好像与题设条件没有什么关系. 我们再对方程组中的三个变量 $x,\ y,\ a$ 的系数进行观察，大胆想象，从中利用立方和公式、倍角公式、$t^3 + \sin t$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$的单调性，就能找到一条通向胜利之路.

**解析** 由于

$$\begin{cases} x^3 + \sin x - 2a = 0, \\ 4y^3 + \sin y\cos y + a = 0. \end{cases}$$

将第二式乘以 2 与第一式相加并整理，得

$$x^3 + \sin x = (-2y)^3 + \sin(-2y).$$

已知 $x,\ y \in \left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right]$，所以 $x,\ -2y \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

构造函数 $f(t) = t^3 + \sin t,\ t \in \left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$. 则由 $f(t) = t^3 + \sin t$ 的单调性可知 $x = -2y$，所以 $x + 2y = 0$.

于是 $\cos(x+2y) = 1$.

**评注** 这是一道经典的好题. 好在它既能考查学生基础知识的掌握程度，又能考查学生对基础知识的灵活应用能力，还能考查学生对各数学分支的基础知识的综合整合能力. 其中涉及的知识点有代数公式，方程变形，三角公式，函数单调性等等.

**例 6** 已知函数 $f(x)=\dfrac{\sin(\pi x)-\cos(\pi x)+2}{\sqrt{x}}\ \left(\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4}\right)$，求 $f(x)$ 的最小值. （2007 年全国高中数学联赛）

**解析** 因为 $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\pi x-\dfrac{\pi}{4}\right)+2}{\sqrt{x}}\ \left(\dfrac{1}{4}\leqslant x\leqslant\dfrac{5}{4}\right)$，故可设

$$g(x)=\sqrt{2}\sin\left(\pi x-\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\leqslant x\leqslant\frac{5}{4}\right),$$

则 $g(x)\geqslant 0$，$g(x)$ 在$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$上是增函数,在$\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}\right]$上是减函数,且 $y=g(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{3}{4}$ 对称. 那么对任意 $x_1\in\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$,存在 $x_2\in\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}\right]$,使得 $g(x_2)=g(x_1)$. 于是

$$f(x_1)=\frac{g(x_1)+2}{\sqrt{x_1}}=\frac{g(x_2)+2}{\sqrt{x_1}}\geqslant\frac{g(x_2)+2}{\sqrt{x_2}}=f(x_2),$$

而 $f(x)$ 在$\left[\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}\right]$上是减函数，所以 $f(x)\geqslant f\left(\dfrac{5}{4}\right)=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$，即 $f(x)$ 在$\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4}\right]$上的最小值是$\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

**例 7** 证明:函数 $3x^2+x$ 可以表示为两个单调递增的多项式函数之差.

**证明** 因为有恒等式

$$3x^2+x\equiv(x+1)^3-(x^3+2x+1),$$

而函数 $g(x)=(x+1)^3$，$h(x)=x^3+2x+1$ 都是单调递增的多项式函数,从而命题得证.

**说明** 一般地,任意实系数多项式可表示为两个单调递增的多项式函数之差.

## 2.3 周 期 性

**定义 2.3** 设函数 $f(x)$的定义域为 $D$,如果存在一个常数 $T\neq 0$,使得对每个 $x\in D$,都有

$$f(x+T)=f(x),$$

**图书在版编目(CIP)数据**

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 函数与函数方程/熊斌编著. —3 版. —上海:华东师范大学出版社,2019
ISBN 978 - 7 - 5675 - 9420 - 3

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①熊…　Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料　Ⅳ. ①G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 194841 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷
**函数与函数方程(第三版)**

编　　著　熊　斌
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　徐惟简
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021 - 60821666　行政传真 021 - 62572105
客服电话　021 - 62865537　门市(邮购)电话 021 - 62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787 × 1092　16 开
插　　页　1
印　　张　11.5
字　　数　205 千字
版　　次　2020 年 4 月第三版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978 - 7 - 5675 - 9420 - 3
定　　价　30.00 元

出 版 人　王　焰

**华东师大社主办的 QQ 群（部分）：**

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

**欢迎广大师生加入相应的群中。**