数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 3

Mathematical Olympiad Series

三角函数

曹瑞彬 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

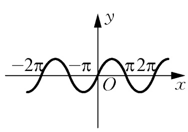
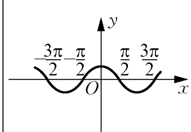
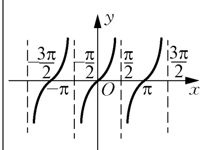
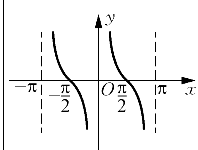
王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目 录

1 三角函数图象与性质

1. 三角函数图象与性质表

函数名 图象与性质	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$	$y=\cot x$
图象				
定义域	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$\left\{x\in\mathbf{R}\,\middle\|\,x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}\right\}$	$\{x\in\mathbf{R}\mid x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}\}$
值域	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$	$(-\infty, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数	奇函数
单调性	在区间$\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$单调增，在区间$\left[2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$, $k\in\mathbf{Z}$单调减	在区间$[2k\pi, 2k\pi+\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$上单调减，在区间$[2k\pi-\pi, 2k\pi]$, $k\in\mathbf{Z}$上单调增	在区间$\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$单调增	在区间$(k\pi, k\pi+\pi)$, $k\in\mathbf{Z}$单调减
周期	2π	2π	π	π
对称性	关于$x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$轴对称；关于点$(k\pi, 0)$, $k\in\mathbf{Z}$中心对称.	关于$x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$轴对称；关于点$\left(k\pi+\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $k\in\mathbf{Z}$中心对称.	关于点$\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k\in\mathbf{Z}$中心对称.	关于点$\left(\frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k\in\mathbf{Z}$中心对称.

2. 三角函数的图象变换

(1) 平移变换

① 左右平移：$y=\sin x\to y=\sin(x+\varphi)$

$\varphi>0$ 向左平移 φ 个单位，$\varphi<0$ 向右平移 $|\varphi|$ 个单位.

② 上下平移：$y=\sin x\to y=\sin x+k$

$k>0$ 向上平移 k 个单位，$k<0$ 向下平移 $|k|$ 个单位.

(2) 周期变换：$y=\sin x\to y=\sin\omega x$

① 当 $\omega>1$ 时，纵坐标不变，横坐标缩短为原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍；

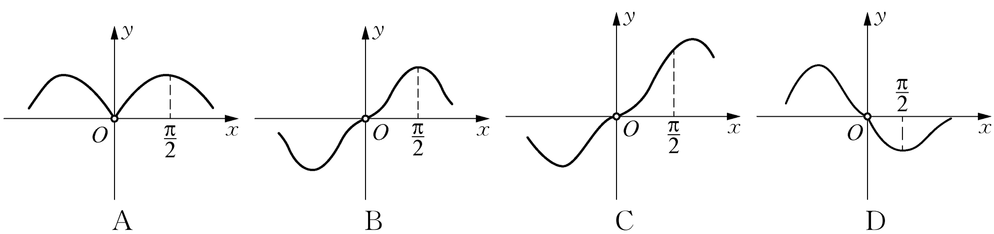
② 当 $0<\omega<1$ 时，纵坐标不变，横坐标伸长为原来的 $\dfrac{1}{\omega}$ 倍.

(3) 振幅变换：$y=\sin x\to y=A\sin x$

① 当 $A>1$ 时，横坐标不变，纵坐标伸长为原来的 A 倍；

② 当 $0<A<1$ 时，横坐标不变，纵坐标缩短为原来的 A 倍.

例 1 函数 $y=\dfrac{2x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{1+x^2}$，$x\in\left[-\dfrac{3\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 的图象大致是(　　).(2018 年清华大学 THUSSAT 测试题)



解 题中函数即

$$f(x)=\frac{2x^2\sin x}{1+x^2},\ x\in\left[-\frac{3\pi}{4},0\right)\cup\left(0,\frac{3\pi}{4}\right],$$

由

$$f(-x)=\frac{2(-x)^2\sin(-x)}{1+(-x)^2}=-\frac{2x^2\sin x}{1+x^2}$$

得 $f(x)$ 是奇函数，又该函数的导数

$$f'(x)=\frac{2x}{(1+x^2)^2}\cdot[(x+x^3)\cos x+2\sin x],$$

于是

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)>0.$$

因此函数 $f(x)$ 在 $x=\frac{\pi}{2}$ 处附近单调增，故答案选 C.

评注 确定函数图象大致的形状，一般地按照函数的性质，逐一排除不符合题设函数条件的选项. 本题由函数是奇函数，可排除选项 A，其次由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{8}{1+\pi^2}>0$，可排除选项D，再由函数在$\frac{\pi}{2}$处的导数大于0，可排除B. 故答案选 C.

例 2 (1) 将函数 $f(x)=2\sin 2x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{12}$个单位长度得到 $g(x)$ 的图象. 若函数$g(x)$在区间$\left[0,\frac{a}{3}\right]$, $\left[2a,\frac{7\pi}{6}\right]$上单调增，求实数$a$的取值范围.（2017 年清华大学 THUSSAT 测试题）

(2) 已知函数 $f(x)=\sin(\pi x)$, $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-2x}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1,\end{cases}$ 则函数 $h(x)=f(x)-g(x)$, $x\in(-2,4]$ 的所有零点的和是________.

解 (1) 根据题意，

$$g(x)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right),$$

它的单调递增区间为

$$\cdots,\left[-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{6}\right],\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{6}\right],\cdots,\left[-\frac{\pi}{3}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi\right],\ k\in\mathbf{N}_+,$$

于是$\begin{cases}0<\frac{a}{3}\leqslant\frac{\pi}{6},\\ -\frac{\pi}{3}+k\pi\leqslant 2a\leqslant\frac{\pi}{6}+k\pi, & k\in\mathbf{N}_+\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<a\leqslant\frac{\pi}{2},\\ -\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}, & k\in\mathbf{N}_+,\end{cases}$

所以 $$\frac{\pi}{3}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

所以实数 a 的取值范围是$\left[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$.

(2) 如图 1-1,

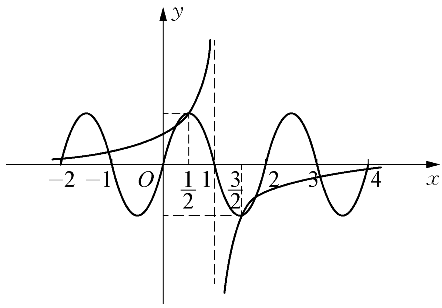


图 1－1

函数 $f(x)$和 $g(x)$的图象均关于点$(1,0)$对称,且

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=g\left(\frac{1}{2}\right)=1,$$

于是函数 $h(x)$的零点共有 9 个,因此所有零点的和为 9.

评注 第(1)小题也可以直接由 $0<\frac{a}{3}\leqslant\frac{\pi}{6}$,及$\frac{2\pi}{3}\leqslant 2a\leqslant\frac{7\pi}{6}$得出结论.第(2)小题对于零点的个数常结合图象求之.本题关键是注意到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均关于点$(1,0)$ 对称.

例 3 设函数 $f(x)=|\sin x|+|\cos x|$.(1) 试讨论函数的性质(有界性,奇偶性,单调性,周期性),求出其最值,并作出其在$[0,2\pi]$上的图象;

(2) 求函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的值域.(2007 年上海交大自主招生)

解 (1) 因为

$$f(-x)=|\sin(-x)|+|\cos(-x)|=|\sin x|+|\cos x|=f(x),$$

所以这是一个偶函数.

$$\begin{aligned}f\left(x+\frac{\pi}{2}\right)&=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|+\left|\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|\\&=|\cos x|+|\sin x|=f(x),\end{aligned}$$

所以这是一个周期为$\frac{\pi}{2}$的周期函数.

$$2=2(\sin^2 x+\cos^2 x)\geqslant f^2(x)\geqslant\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

所以 $1\leqslant f(x)\leqslant\sqrt{2}$,所以 $f(x)$有上下界.而当 $x=0$,或$\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)=1$;

$x=\frac{\pi}{4}$ 时，$f(x)=\sqrt{2}$. 所以 $f(x)$ 的最小值为 1，最大值为$\sqrt{2}$.

由于 $f(x)$ 是一个周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的周期函数，所以我们只需要考查它在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$上的单调性即可.

此时

$$f(x)=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),$$

那么 $f(x)$在$\left(\frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)(k\in\mathbf{Z})$上递增，在$\left(\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}, \frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbf{Z})$上递减.

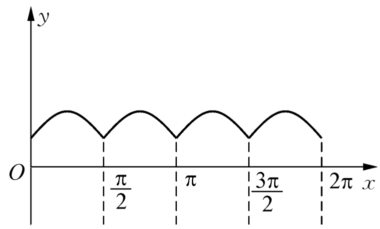


图 1－2

图象如右：

(2) 因为 $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$，所以 $0\leqslant\sin x\leqslant 1$，$0\leqslant\cos x\leqslant 1$.

所以$\sqrt{\sin x}\geqslant\sin x\geqslant\sin^2 x$，$\sqrt{\cos x}\geqslant\cos x\geqslant\cos^2 x$.

所以 $\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\geqslant\sin x+\cos x\geqslant\sin^2 x+\cos^2 x\geqslant 1$.

且当 $x=0$，或$\frac{\pi}{2}$ 时，$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=1$.

另一方面，由

$$\begin{aligned}(\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x})^2&=\sin x+\cos x+2\sqrt{\sin x\cos x}\\&=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2\sin 2x}\\&\leqslant 2\sqrt{2}.\end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\leqslant 2^{\frac{3}{4}}.$$

且当 $x=\frac{\pi}{4}$ 时，$\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=2^{\frac{3}{4}}$.

所以函数 $y=\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}\left(x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$的值域为$[1, 2^{\frac{3}{4}}]$.

评注 这两道题都是考查三角函数的基本性质. 第(1)小题关键是如何看出$\frac{\pi}{2}$是函数的周期，实际上可用图象分析出来，或者取特殊点观察可得. 第(2)小题求值域方法很多，关键是细心谨慎，小心放缩. 本小题还可用均值不等式，柯西不等式来求解.

例 4 已知函数 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\right)$.

(1) 求 $f(x)$的定义域和值域;

(2) 在$(-\pi, \pi)$中,求 $f(x)$的单调区间;

(3) 判定方程 $f(x)=\tan\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 在区间$(-\pi, \pi)$上解的个数.

解 (1) 因为$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$,所以$-\frac{\pi}{\sqrt{3}}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{3}}$.

又因为函数 $y=\tan x$ 在 $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ 处无定义,且

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\subsetneqq\left[-\frac{\pi}{\sqrt{3}}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]\subsetneqq(-\pi, \pi),$$

所以令 $\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x=\pm\frac{\pi}{2}$,则 $\sin x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$,解之得:$x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $f(x)$的定义域是 $A=\left\{x \mid x\in\mathbf{R},且\ x\neq k\pi\pm\frac{\pi}{3}, k\in\mathbf{Z}\right\}$.

因为 $\tan x$ 在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内的值域为$(-\infty, +\infty)$,而当 $x\in A$ 时,函数 $y=\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\right)$ 的值域 B 满足 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\subsetneqq B$,所以 $f(x)$ 的值域是 $(-\infty, +\infty)$.

(2) 由 $f(x)$的定义域知,$f(x)$在$[0, \pi)$中的 $x=\frac{\pi}{3}$ 和 $x=\frac{2\pi}{3}$ 处无定义.

设 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$,则当 $x\in\left[0, \frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$时,$t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$,且以 t 为自变量的函数 $y=\tan t$ 在区间$\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$上分别单调递增.

又因为当 $x\in\left[0, \frac{\pi}{3}\right)$ 时,函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递增,且 $t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$;

当 $x\in\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 时,函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递增,且 $t\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$;

当 $x\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 时,函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递减,且 $t\in\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$;

当 $x\in\left(\frac{2\pi}{3},\ \pi\right)$ 时，函数 $t=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 单调递减，且 $t\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

所以 $f(x)=\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{13}}\sin x\right)$ 在区间$\left[0,\ \frac{\pi}{3}\right)$，$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right]$上分别是单调递增函数；在$\left[\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(\frac{2\pi}{3},\ \pi\right)$上是单调递减函数.

又 $f(x)$是奇函数，所以区间$\left(-\frac{\pi}{3},\ 0\right]$，$\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}\right)$也是 $f(x)$的单调递增区间，$\left(-\pi,\ -\frac{2\pi}{3}\right)$，$\left(-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{2}\right]$是 $f(x)$的单调递减区间.

故在$(-\pi,\ \pi)$中，$f(x)$的单调递增区间为：

$$\left[-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{3}\right),\ \left(-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}\right),\ \left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}\right],$$

单调递减区间为：

$$\left(-\pi,\ -\frac{2\pi}{3}\right),\ \left(-\frac{2\pi}{3},\ -\frac{\pi}{2}\right],\ \left[\frac{\pi}{2},\ \frac{2\pi}{3}\right),\ \left(\frac{2\pi}{3},\ \pi\right).$$

(3) 由 $f(x)=\tan\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$，得 $\tan\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x\right)=\tan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x=k\pi+\frac{\sqrt{2}}{3}\pi\ (k\in\mathbf{Z})$$

$$\Leftrightarrow \sin x=k\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}\ (k\in\mathbf{Z}).\qquad ①$$

又因为$-1\leqslant\sin x\leqslant 1$，$\frac{-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}\leqslant k\leqslant\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$，所以 $k=0$ 或$k=-1$.

当 $k=0$ 时，从①得方程 $\sin x=\frac{\sqrt{6}}{3}$；

当 $k=1$ 时，从①得方程 $\sin x=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$.

显然方程 $\sin x=\frac{\sqrt{6}}{3}$，$\sin x=-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{6}}{3}$，在$(-\pi,\ \pi)$上各有两个解，故 $f(x)=\tan\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ 在区间$(-\pi,\ \pi)$上共有 4 个解.

评注　本题是正弦函数与正切函数的复合. (1)求 $f(x)$的定义域和值域，应当先搞清楚 $y=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\sin x$ 的值域与 $y=\tan x$ 的定义域的交集；(2)求 $f(x)$

的单调区间,必须先搞清 $f(x)$的基本性质,如奇偶性、周期性、复合函数单调性等.

例5 设ω为正实数,若存在a、$b(\pi\leqslant a<b\leqslant 2\pi)$,使得$\sin\omega a+\sin\omega b=2$. 求$\omega$的取值范围.(2015 年全国高中数学联赛)

解 由$\sin\omega a+\sin\omega b=2$知,$\sin\omega a=\sin\omega b=1$,而$[\omega a,\ \omega b]\subseteq[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$,故题目条件等价于:存在整数$k$、$l(k<l)$,使得

$$\omega\pi\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}<2l\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi. \qquad ①$$

当$\omega\geqslant 4$时,区间$[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$的长度不小于4π,故必存在k、l满足①式.

当$0<\omega<4$时,注意到$[\omega\pi,\ 2\omega\pi]\subseteq(0,\ 8\pi)$,故仅需考虑如下几种情况:

(1) $\omega\pi\leqslant\frac{\pi}{2}<\frac{5\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi$,此时有$\omega\leqslant\frac{1}{2}$,且$\omega\geqslant\frac{5}{4}$,无解;

(2) $\omega\pi\leqslant\frac{5\pi}{2}<\frac{9\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi$,此时有$\frac{9}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{2}$;

(3) $\omega\pi\leqslant\frac{9\pi}{2}<\frac{13\pi}{2}\leqslant 2\omega\pi$,此时有$\frac{13}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{9}{2}$,得$\frac{13}{4}\leqslant\omega<4$.

综合(1)、(2)、(3)及$\omega\geqslant 4$得,ω的取值范围是

$$\left\{\omega\ \middle|\ \frac{9}{4}\leqslant\omega\leqslant\frac{5}{2},\text{或}\ \omega\geqslant\frac{13}{4}\right\}.$$

评注 本题难点在于分类讨论. 首先注意到$\omega\geqslant 4$时,区间$[\omega\pi,\ 2\omega\pi]$的长度大于或等于4π,在两个周期之内. 一定存在两个最大值,其次逐步对取得1时,ωa、ωb的相应值加以讨论.

例6 设函数$f(x)=\sin^2 x+(2a-1)\sin x+a^2+\frac{1}{4}$,已知$x\in\left[\frac{5}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi\right]$,求$f(x)$的最值.

解 设$\sin x=t$,则$t\in\left[-1,\ \frac{1}{2}\right]$.

$f(x)=g(t)=t^2+(2a-1)t+a^2+\frac{1}{4}$,对称轴为$t=\frac{1-2a}{2}$.

当$\frac{1-2a}{2}\leqslant -1$即$a\geqslant\frac{3}{2}$时,$\left[-1,\ \frac{1}{2}\right]$为$g(t)$的单调增区间,所以

$$f_{\min}=g(-1)=a^2-2a+\frac{9}{4},\ f_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=a^2+a.$$

当 $-1<\dfrac{1-2a}{2}\leqslant-\dfrac{1}{4}$ 即 $\dfrac{3}{4}\leqslant a<\dfrac{3}{2}$ 时，$g(-1)\leqslant g\left(\dfrac{1}{2}\right)$，所以

$$f_{\min}=g\left(\frac{1-2a}{2}\right)=a,\ f_{\max}=g\left(\frac{1}{2}\right)=a^2+a.$$

当 $-\dfrac{1}{4}<\dfrac{1-2a}{2}\leqslant\dfrac{1}{2}$ 即 $0\leqslant a<\dfrac{3}{4}$ 时，$g(-1)>g\left(\dfrac{1}{2}\right)$，所以

$$f_{\min}=g\left(\frac{1-2a}{2}\right)=a,\ f_{\max}=g(-1)=a^2-2a+\frac{9}{4}.$$

当 $\dfrac{1-2a}{2}>\dfrac{1}{2}$ 即 $a<0$ 时，$\left[-1,\ \dfrac{1}{2}\right]$ 为 $g(t)$ 的单调减区间，所以

$$f_{\min}=g\left(\frac{1}{2}\right)=a^2+a,\ f_{\max}=g(-1)=a^2-2a+\frac{9}{4}.$$

评注 求形如 $f(x)=A\sin^2x+B\sin x+C$ 形式的最值，通常用换元法，化成二次函数在区间的最值问题.

例 7 已知函数 $f(x)=\dfrac{a-2\cos x}{3\sin x}$ 在区间 $\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内是增函数，求 a 的取值范围.

分析 根据增函数的定义，列出不等式，求 a 的取值范围.

解法一 由条件得：当 $0<x_1<x_2<\dfrac{\pi}{2}$ 时，

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{a-2\cos x_1}{3\sin x_1}-\frac{a-2\cos x_2}{3\sin x_2}<0,$$

因为 $\sin x_2>\sin x_1>0$，所以去分母得

$$a\sin x_2-2\cos x_1\sin x_2-a\sin x_1+2\cos x_2\sin x_1<0,$$

整理得 $$a(\sin x_2-\sin x_1)-2\sin(x_2-x_1)<0,$$

故 $$a<\frac{2\sin(x_2-x_1)}{\sin x_2-\sin x_1}=\frac{4\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}\cos\dfrac{x_2-x_1}{2}}{2\cos\dfrac{x_2+x_1}{2}\sin\dfrac{x_2-x_1}{2}}=\frac{2\cos\dfrac{x_2-x_1}{2}}{\cos\dfrac{x_2+x_1}{2}}.$$

由于 $$\begin{aligned}\cos\frac{x_2-x_1}{2}&=\cos\frac{x_2}{2}\cos\frac{x_1}{2}+\sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{x_1}{2}\\&>\cos\frac{x_2}{2}\cos\frac{x_1}{2}-\sin\frac{x_2}{2}\sin\frac{x_1}{2}\end{aligned}$$

$$= \cos\frac{x_1+x_2}{2} > 0,$$

所以 $\dfrac{\cos\frac{x_2-x_1}{2}}{\cos\frac{x_1+x_2}{2}} > 1$，从而 $a \leqslant 2$，即 a 的取值范围为$(-\infty, 2]$.

解法二　记 $\tan\frac{x}{2}=t$，则 $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，且 $t\in(0, 1)$，

所以
$$g(t)=f(x)=\frac{a-2\times\frac{1-t^2}{1+t^2}}{3\times\frac{2t}{1+t^2}}=\frac{(a-2)+(a+2)t^2}{6t}$$
$$=\frac{a-2}{6t}+\frac{a+2}{6}\cdot t.$$

设 $0<t_1<t_2<1$，则

$$g(t_1)-g(t_2)=\left(\frac{a-2}{6t_1}+\frac{a+2}{6}t_1\right)-\left(\frac{a-2}{6t_2}+\frac{a+2}{6}t_2\right)<0,$$

去分母得

$$(a-2)t_2+(a+2)t_1^2t_2-(a-2)t_1-(a+2)t_1t_2^2<0,$$

整理得
$$(t_2-t_1)(a-at_1t_2-2-2t_1t_2)<0.$$

而 $0<t_1<t_2<1$，所以 $a<\frac{2(1+t_1t_2)}{1-t_1t_2}$.

显然 $\frac{1+t_1t_2}{1-t_1t_2}>1$，故 $a\leqslant 2$，即 a 的取值范围为$(-\infty, 2]$.

评注　对于含参数不等式的问题，如 $a<f(t)$ 恒成立，则应取 $f(t)$ 的最小值后得 a 的取值范围；如 $a>f(t)$，则取 $f(t)$ 的最大值后得 a 的取值范围，如 $f(t)$ 无最值，则取它的变化趋势的最值.

例 8　设函数 $f(x)$，$g(x)$ 对任意实数 x 均有 $-\frac{\pi}{2}<f(x)+g(x)<\frac{\pi}{2}$，并且 $-\frac{\pi}{2}<f(x)-g(x)<\frac{\pi}{2}$. 求证：对任意实数 x 均有 $\cos f(x)>\sin g(x)$，并由此证明：对任意实数 x 均有 $\cos(\cos x)>\sin(\sin x)$.

证明　由条件可得 $-\frac{\pi}{2}<f(x)<\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{\pi}{2}$.

若 $0\leqslant f(x)<\frac{\pi}{2}$，得到 $-\frac{\pi}{2}<g(x)<\frac{\pi}{2}-f(x)\leqslant\frac{\pi}{2}$，由于 $y=\sin x$

在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上为单调增函数,故 $\sin g(x) < \sin\left[\frac{\pi}{2} - f(x)\right] = \cos f(x)$.

若$-\frac{\pi}{2} < f(x) < 0$,则由条件$-\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2} + f(x) < \frac{\pi}{2}$,同样由 $y = \sin x$ 在$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上为单调增函数,故

$$\sin g(x) < \sin\left[\frac{\pi}{2} + f(x)\right] = \cos f(x).$$

对任意实数 x,均有

$$|\cos x \pm \sin x| = \sqrt{2}\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right)\right| \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2},$$

根据已证的不等式,就有 $\cos(\cos x) > \sin(\sin x)$.

评注 利用正、余弦函数的单调性,结合正、余弦函数的有界性以及上述结论,我们还有如下的一些结论:$\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$, $\sin(\sin(\sin x)) < \sin(\cos(\cos x)) < \cos(\cos(\cos x))$ 等.

例 9 已知 $f(x) = ax + \sin x$ 表示的图象上有两条切线相互垂直,求 a 的值.(2010 北大保送生考试)

解 $f(x) = ax + \sin x \Rightarrow f'(x) = a + \cos x$,从而如果有两条切线垂直,那么存在这样的 x_1, x_2 使得 $(a + \cos x_1)(a + \cos x_2) = -1$,从函数图象来看,一个二次函数的两个根都在$(-1, 1)$上,首项系数为 1,并且开口朝上,可以感觉到能取到的最小值只有在尽量的往下移动,也就是在两个根分别是 -1, 1 的时候最小值可以尽可能的小,此时刚好等于-1,因此可以感觉到这道题实际上卡得很死(指的中间的放缩),我们具体的操作如下:

不妨设 $\cos x_1 \leqslant \cos x_2$, $(a + \cos x_1)(a + \cos x_2) < 0$,从而 $a \in (-\cos x_2, -\cos x_1)$,此时可以得到 $0 < a + \cos x_2 \leqslant a + 1$, $a - 1 \leqslant a + \cos x_1 < 0$,那么

$$-1 = (a + \cos x_1)(a + \cos x_2) \geqslant (a+1)(a-1) = a^2 - 1 \geqslant -1.$$

所以中间不等号必须全部取等号,此时只能 $a = 0$,并且在 $x_1 = \pi$, $x_2 = 0$ 的时候两个点的切线互相垂直.

评注 本题是挺不错的一道题,考查学生对函数基本性质的理解.实际上在得出结论之前,如果能够想象出图象是最好了,这样会对最后结果的把握很有帮助,具体的分析都比较常规,没必要细讲.但是要注意一个陷阱,有些学生的做法会存在逻辑问题,并没有真的得出 $a = 0$,可以给学生强调这一点,这种题每一步的逻辑要对.

例 10 证明函数 $g(x)=\cos\sqrt[3]{x}$ 不是周期函数.

分析 当结论出现否定的形式时,宜采用反证法.

证明 假设 $g(x)$ 是周期函数,非零常数 T 是它的一个周期,则 $\cos\sqrt[3]{x+T}=\cos\sqrt[3]{x}$ 对一切实数 x 都成立. 取 $x=0$,得 $\cos\sqrt[3]{T}=1$,从而 $\sqrt[3]{T}=2k\pi\ (k\neq 0,\ k\in\mathbf{Z})$.

取 $x=T$,得 $\cos\sqrt[3]{2T}=\cos\sqrt[3]{T}=1$,有 $\sqrt[3]{2T}=2e\pi\ (e\neq 0,\ e\in\mathbf{Z})$. 于是 $\dfrac{\sqrt[3]{2T}}{\sqrt[3]{T}}=\dfrac{2e\pi}{2k\pi}=\dfrac{e}{k}$,即 $\sqrt[3]{2}=\dfrac{e}{k}$,从而 $\sqrt[3]{2}$ 是有理数,这与 $\sqrt[3]{2}$ 是无理数相矛盾,故函数 $g(x)=\cos\sqrt[3]{x}$ 不是周期函数.

评注 当结论是肯定或否定形式,含有“至多”、“至少”等字样时,可利用反证法证明问题. 又如:求证函数 $y=|\sin x|+|\cos x|$ 的最小正周期是 $\dfrac{\pi}{2}$.

易知 $\dfrac{\pi}{2}$ 是它的周期,再证 $\dfrac{\pi}{2}$ 是它的最小正周期. 假设 $0<T<\dfrac{\pi}{2}$ 是 $y=|\sin x|+|\cos x|$ 的周期,则 $|\sin(x+T)|+|\cos(x+T)|=|\sin x|+|\cos x|$ 对任意 x 都成立,于是取 $x=0$,得 $|\sin T|+|\cos T|=|\sin 0|+|\cos 0|=1$,但 $|\sin T|+|\cos T|=\sin T+\cos T=\sqrt{2}\sin\left(T+\dfrac{\pi}{4}\right)>1$,故矛盾,所以 T 不存在,原命题正确.

例 11 如果圆 $x^2+y^2=k^2$ 至少覆盖函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi x}{k}$ 的一个最大值点和一个最小值点. 试求 k 的取值范围.

解 因为 $f(x)=\sqrt{3}\sin\dfrac{\pi x}{k}$ 为奇函数,图象关于原点对称,故只需要已知圆 $x^2+y^2=k^2$ 覆盖 $f(x)$ 的一个最值点即可. 令 $\dfrac{\pi x}{k}=\dfrac{\pi}{2}$,解得 $f(x)$ 的距原点最近的一个最大值点为 $P\left(\dfrac{k}{2},\sqrt{3}\right)$,依题意

$$k^2\geqslant\left(\frac{k}{2}\right)^2+(\sqrt{3})^2,$$

解得 $|k|\geqslant 2$.

所以 k 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

评注 本题巧妙运用函数的奇偶性,将问题简化为覆盖一个最大点,这种利用三角函数的奇偶性简化解题的方法是解三角函数性质题的常用

方法.

例 12 求函数 $y=(a+\cos x)(a+\sin x)$ 的值域.

分析 对于含参数的函数,应对 a 进行分类讨论.

解
$$y=a^2+a(\sin x+\cos x)+\sin x\cos x.$$

设 $\sin x+\cos x=t$,则 $\sin x\cos x=\dfrac{t^2-1}{2}$, $-\sqrt{2}\leqslant t\leqslant\sqrt{2}$,所以

$$y=a^2+at+\frac{1}{2}(t^2-1)=\frac{1}{2}(t+a)^2+\frac{a^2-1}{2}.$$

(1) 当 $a\geqslant\sqrt{2}$ 时,当 $t=\sqrt{2}$ 时,$y_{\max}=a^2+\sqrt{2}a+\dfrac{1}{2}=\left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

当 $t=-\sqrt{2}$ 时,$y_{\min}=a^2-\sqrt{2}a+\dfrac{1}{2}=\left(a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

所以函数的值域为 $\left[\left(a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

(2) 当 $0\leqslant a\leqslant\sqrt{2}$ 时,当 $t=\sqrt{2}$ 时,$y_{\max}=\left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

当 $t=-a$ 时,$y_{\min}=\dfrac{a^2-1}{2}$.

所以函数的值域为 $\left[\dfrac{a^2-1}{2}, \left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

(3) 当 $-\sqrt{2}\leqslant a\leqslant 0$ 时,当 $t=-\sqrt{2}$ 时,$y_{\max}=\left(a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

当 $t=-a$ 时,$y_{\min}=\dfrac{a^2-1}{2}$.

所以函数的值域为 $\left[\dfrac{a^2-1}{2}, \left(a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

(4) 当 $a<-\sqrt{2}$ 时,当 $t=-\sqrt{2}$ 时,$y_{\max}=\left(a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$;

当 $t=\sqrt{2}$ 时,$y_{\min}=\left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$.

所以函数的值域为 $\left[\left(a+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2, \left(a-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right]$.

评注 有关含 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的二次函数值域问题,必须注意隐含条件 $|\sin x|\leqslant 1$ 和 $|\cos x|\leqslant 1$.

例 13 设函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,对任意实数 α、β 有

$$f(\alpha)+f(\beta)=2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)f\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),\text{且 } f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2},\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

(1) 求证:$f(-x)=f(x)=-f(\pi-x)$;

(2) 若 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)>0$,求证:$f(x)$在$[0,\pi]$上单调递减;

(3) 求 $f(x)$的最小周期并加以证明.

分析 正确理解所给等式,通过赋值法、定义法解答本题.

解 (1) 因为 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)+f\left(\frac{\pi}{3}\right)=2f\left(\frac{\pi}{3}\right)f(0)$,且 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$,所以 $f(0)=1$.

又 $f(x)+f(-x)=2f(0)f(x)$,故 $f(x)=f(-x)$.

又由于 $f(x)+f(\pi-x)=2f\left(\frac{\pi}{2}\right)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$,且 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$,故有

$$f(x)=f(-x)=-f(\pi-x).$$

(2) 由 $f(-x)=f(x)$ 且 $0\leqslant x<\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)>0$,得当$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ 时,$f(x)>0$.

设 $0\leqslant x_1<x_2\leqslant\pi$,则

$$\begin{aligned}f(x_1)-f(x_2)&=f(x_1)+f(\pi-x_2)\\&=2f\left(\frac{x_1+\pi-x_2}{2}\right)f\left(\frac{x_1+x_2-\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

因为 $0\leqslant\frac{x_1-x_2+\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$,$-\frac{\pi}{2}<\frac{x_1+x_2-\pi}{2}<\frac{\pi}{2}$,所以

$$f\left(\frac{x_1+\pi-x_2}{2}\right)>0,\ f\left(\frac{x_1+x_2-\pi}{2}\right)>0.$$

从而 $f(x_1)>f(x_2)$,即$f(x)$在$[0,\pi]$上单调递减.

(3) 由 (1)$f(-x)=-f(\pi-x)$,得

$$f(x)=-f(\pi+x),\ f(\pi+x)=-f(2\pi+x).$$

所以 $f(2\pi+x)=f(x)$,说明 2π 是原函数的一个周期.

假设 T_0 也是原函数的一个周期,且 $T_0\in(0,2\pi)$,则由 $f(T_0+x)=f(x)$,得 $f(0)=f(T_0)$.

但若 $T_0\in(0,\pi]$ 时,因原函数是单调递减函数,所以 $f(0)>f(T_0)$,两

者矛盾；

若 $T_0 \in (\pi, 2\pi)$ 时，$2\pi - T_0 \in (0, \pi)$，从而 $f(0) > f(2\pi - T_0) = f(-T_0) = f(T_0)$，两者矛盾，所以 T_0 不是原函数的一个周期，即 2π 是原函数的最小正周期.

评注 有关周期函数有下面几个结论：(1) 若 $f(x)$ 的图象有两条对称轴 $x = a$ 和 $x = b$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $2|b-a|$ 是它的一个周期；

(2) 若 $f(x)$ 的图象有两个对称中心 $(a, 0)$ 和 $(b, 0)$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $2|b-a|$ 是它的一个周期；

(3) 若 $f(x)$ 的图象有一个对称中心 $(a, 0)$ 和一条对称轴 $x = b$，则 $f(x)$ 是周期函数，且 $4|b-a|$ 是它的一个周期.

上述结论中，不妨证明结论(1)：

因为
$$f(2a - x) = f(x) \Leftrightarrow f(a + x) = f(a - x),$$
$$f(2b - x) = f(x) \Leftrightarrow f(b + x) = f(b - x),$$

则
$$f[2b - (2a - x)] = f(2a - x) = f(x).$$

即 $f[x + 2(b-a)] = f(x)$，所以 $f(x)$ 是以 $2|b-a|$ 为周期的周期函数.

读者不妨对结论(2)和(3)加以证明.

例 14 设函数 $f(x) = \sin\left(\frac{11}{6}\pi x + \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小正周期；

(2) 对于任意的正数 α，是否总能找到不小于 α，且不大于 $(\alpha+1)$ 的两个数 a 和 b，使 $f(a) = 1$ 而 $f(b) = -1$？请回答并论证；

(3) 若 α 限定为任意自然数，请重新回答和论证上述问题.

分析 本题的第(2)、(3)题实际上说的是能否找到一个长度为 1 的区间，使在此区间上，$f(x)$ 既取得最大值，又能取得最小值.

解 (1) $f(x)$ 的最小正周期 $T = \dfrac{2\pi}{\frac{11}{6}\pi} = \dfrac{12}{11}$.

(2) 由于 $T > 1$，因此在长为 1 的区间上，$f(x)$ 不能得出一段完整周期的图形.

现任取一使 $f(x)$ 取最大值 1 的 x 值为 a，如取 $a = \frac{1}{11}$，则 $f\left(\frac{1}{11}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1$，令 $\alpha = a - \frac{5.5}{11} = -\frac{9}{22}$，则 $\alpha + 1 = -\frac{9}{22} + 1 = \frac{13}{22}$，则对于 $\alpha = -\frac{9}{22}$，就不能在区间 $\left(-\frac{9}{22}, \frac{13}{22}\right)$ 上找到 b，使 $f(b) = -1$.

(3) 使 $f(x)$取最大值 1 的 x 集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{12}{11}k+\frac{1}{11},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$（只需令 $\frac{11}{6}\pi x+\frac{\pi}{3}=2k\pi+\frac{\pi}{2}$即可解出这些值）.

使 $f(x)$取最小值-1 的 x 集合为 $\left\{x\,\middle|\,x=\frac{12}{11}k+\frac{7}{11},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，由于

$$\left(\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right)-\left(\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right)=\frac{6}{11},$$

$$\left[\frac{12}{11}(k+1)+\frac{1}{11}\right]-\left(\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right)=\frac{12}{11},$$

故若 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n\ (n\in\mathbf{Z})$（$[x]$表示不超过 x 的最大整数），则 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right]=n$ 或 $n+1$，且$\left[\frac{12}{11}(k+1)+\frac{1}{11}\right]=n+1$ 或 $n+2$，而 $k=0$ 时，$\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=0$，这说明对于任一自然数 n，必存在 k，使 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n$ 或 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right]=n$.

若对某一自然数 n，有 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n$，令 $\alpha=\left(\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right)-n$，则当 $0\leqslant\alpha\leqslant\frac{5}{11}$ 时，$\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\in(n,\ n+1]$. 当$\frac{6}{11}\leqslant\alpha\leqslant\frac{10}{11}$ 时，$\frac{12}{11}(k-1)+\frac{7}{11}\in[n,\ n+1)$，总之，在$[n,\ n+1]$中，存在二数 a、b，使 $f(a)=1$ 且 $f(b)=-1$.

若对某一自然数 n，有 $\left[\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right]=n$，且$\left[\frac{12}{11}k+\frac{1}{11}\right]=n-1$，则令 $\alpha'=\left(\frac{12}{11}k+\frac{7}{11}\right)-n$，显然 $\alpha'<\frac{6}{11}$，即 $0\leqslant\alpha'\leqslant\frac{5}{11}$，此时$\left[\frac{12}{11}(k+1)+\frac{1}{11}\right]\in(n,\ n+1]$，即在$[n,\ n+1]$中仍可找到二数 a、b，使 $f(a)=1$ 且 $f(b)=-1$.

综上所述，对于任意自然数 n，总能找到不小于 n 且不大于$(n+1)$的两个数 a、b，使 $f(a)=1$ 且 $f(b)=-1$.

评注 对于存在性问题的探索，通常以举出反例来说明其不存在，而必须通过严密论证来说明其存在.

例 15 试求满足 $\sin xy=\sin x+\sin y$ 的所有 $x,\ y\in\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$.

解 不存在这样的数对.

事实上，如果 $x\in(0,\ 1]$，则 $\sin xy\leqslant\sin y<\sin x+\sin y$，所以 $x\in$

$\left(1, \frac{\pi}{2}\right]$.

同理可知，$y\in\left(1, \frac{\pi}{2}\right]$.

而当 x，$y\in\left(1, \frac{\pi}{2}\right]$时，

$$\sin x+\sin y>2\sin 1>2\sin\frac{\pi}{4}=\sqrt{2}>1,$$

这与 $\sin xy\leqslant 1$ 矛盾.

所以这样的 x、y 不存在.

例 16　设函数 $f(x)=3\sin x+2\cos x+1$. 若实数 a、b、c 使 $af(x)+bf(x-c)=1$ 对任意实数 x 恒成立，求$\frac{b\cos c}{a}$ 的值.（2007 年全国高中数学联赛）

解　由题设可得

$$f(x)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)+1,\ f(x-c)=\sqrt{13}\sin(x+\varphi-c)+1,$$

其中 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，且 $\tan\varphi=\frac{2}{3}$. 于是，

$$af(x)+bf(x-c)=1,$$

可化为

$$\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi-c)+a+b=1,$$

即

$$\begin{aligned}&\sqrt{13}a\sin(x+\varphi)+\sqrt{13}b\sin(x+\varphi)\cos c\\&-\sqrt{13}b\cos(x+\varphi)\sin c+(a+b-1)=0.\end{aligned}$$

所以

$$\sqrt{13}(a+b\cos c)\sin(x+\varphi)-\sqrt{13}b\sin c\cos(x+\varphi)+(a+b-1)=0.$$

由条件，上式对任意 $x\in\mathbf{R}$ 恒成立，故必有

$$\begin{cases}a+b\cos c=0, & ①\\ b\sin c=0, & ②\\ a+b-1=0. & ③\end{cases}$$

由②可知 $b=0$,或 $\sin c=0$.

若 $b=0$,则由 ① 知 $a=0$,显然不满足 ③ 式,故 $b\neq 0$,所以 $\sin c=0$,故 $c=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

当 k 为偶数时,$\cos c=1$,则①③两式矛盾;

当 k 为奇数时,$\cos c=-1$,由①③知 $a=b=\dfrac{1}{2}$.

所以 $\dfrac{b\cos c}{a}=-1$.

评注 恒等式 $a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$ 在解题中常常用到. 本题将 $3\sin x+2\cos x=\sqrt{13}\sin(x+\varphi)$ 看成整体,简化了解题. 其次,对于 $f(x)=a\sin x+b\cos x+c$, $x\in\mathbf{R}$ 恒为常数的充分必要条件为 $a=b=0$. 本题如果改作填空题或选择题,也可从特殊值入手,因为 $x\in\mathbf{R}$, $f(x)+f(x-\pi)=2$,于是取 $a=b=\dfrac{1}{2}$, $c=\pi$,则对任意 $x\in\mathbf{R}$, $af(x)+bf(x-c)=1$,由此得 $\dfrac{b\cos c}{a}=-1$.

例 17 函数 $F(x)=|\cos^2 x+2\sin x\cos x-\sin^2 x+Ax+B|$ 在 $0\leqslant x\leqslant\dfrac{3}{2}\pi$ 上的最大值 M 与参数 A、B 有关,问 A、B 取什么值时,M 为最小? 证明你的结论.(1983 年全国高中数学联赛)

分析 对 $F(x)$变形

$$|\cos^2 x+2\sin x\cdot\cos x-\sin^2 x+Ax+B|=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|.$$

故 $F(x)$是一个三角函数与一个一次函数之和,因为三角函数是一个周期函数,而 $Ax+B$ 是一个一次或零次函数,所以不管怎样,只要 A、B 中有一个不为 0,$F(x)$最大值显然增大. 故猜想 M 的最小值在 $A=B=0$ 时取得.

解法一 $F(x)=\left|\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)+Ax+B\right|$.

取 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)$,则 $g\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=g\left(\dfrac{9\pi}{8}\right)=\sqrt{2}$, $g\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)=-\sqrt{2}$.

取 $h(x)=Ax+B$,若 $A=0$, $B\neq 0$,则当 $B>0$ 时,$F\left(\dfrac{\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$,当 $B<0$ 时,$F\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)<\sqrt{2}$. 从而 $M>\sqrt{2}$.

若 $A\neq 0$,则当 $h\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)<0$ 时,$F\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$,当 $h\left(\dfrac{5\pi}{8}\right)\geqslant 0$ 时,由于 $h(x)$是

一次函数，当 $A>0$ 时，$h(x)$ 递增，$h\left(\frac{9\pi}{8}\right)>h\left(\frac{5\pi}{8}\right)>0$，此时 $F\left(\frac{9\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$；当 $A<0$ 时，$h(x)$ 递减，$h\left(\frac{\pi}{8}\right)>h\left(\frac{5\pi}{8}\right)>0$，此时 $F\left(\frac{\pi}{8}\right)>\sqrt{2}$. 故此时 $M>\sqrt{2}$.

若 $A=B=0$，显然有 $M=\sqrt{2}$.

从而 M 的最小值为 $\sqrt{2}$，这个最小值在 $A=B=0$ 时取得.

解法二 （反证法）假设存在 A、B 使 $M<\sqrt{2}$，则

$$\begin{cases}F\left(\frac{\pi}{8}\right)<\sqrt{2},\\ F\left(\frac{5\pi}{8}\right)<\sqrt{2},\\ F\left(\frac{9\pi}{8}\right)<\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|\sqrt{2}+A\cdot\frac{\pi}{8}+B\right|<\sqrt{2},\\ \left|-\sqrt{2}+A\cdot\frac{5\pi}{8}+B\right|<\sqrt{2},\\ \left|\sqrt{2}+A\cdot\frac{9\pi}{8}+B\right|<\sqrt{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2\sqrt{2}<A\cdot\frac{\pi}{8}+B<0, & ①\\ 0<A\cdot\frac{5\pi}{8}+B<2\sqrt{2}, & ②\\ -2\sqrt{2}<A\cdot\frac{9\pi}{8}+B<0. & ③\end{cases}$$

①+③得
$$-2\sqrt{2}<A\times\frac{5\pi}{8}+B<0. \qquad ④$$

显然④与②矛盾. 所以 $M\geqslant\sqrt{2}$.

又因为当 $A=B=0$ 时，$M=\sqrt{2}$.

从而 M 的最小值为 $\sqrt{2}$，此时 $A=B=0$.

评注 对于一类恒成立问题（或最大值与最小值问题），我们常考虑其关键点时成立，然后让其一般情况下也成立. 本题抓住 $g(x)=\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的两个最大值点 $\left(\frac{\pi}{8},\sqrt{2}\right)$，$\left(\frac{9\pi}{8},\sqrt{2}\right)$ 与一个最小值点 $\left(\frac{5\pi}{8},-\sqrt{2}\right)$. 从图象就可以知道 $M\geqslant\sqrt{2}$，然后证明满足. 以上两种证明方法均依据特殊点性质进行论证.

例 18 已知 $\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n=\pi$，$\theta_i\geqslant 0$ $(i=1,2,\cdots,n)$，求 $\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\cdots+\sin^2\theta_n$ 的最大值.（第 18 届俄罗斯中学生数学竞赛）

解 因为
$$\begin{aligned}&\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2\\ =&(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2-2\sin\theta_1\cdot\sin\theta_2\\ =&4\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\cdot\cos^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}+\cos(\theta_1+\theta_2)-\cos(\theta_1-\theta_2)\\ =&2\cos^2\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\left(2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1\right)+1+\cos(\theta_1+\theta_2),\end{aligned}$$

当 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$ 时，$2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1<0$；

当 $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ 时，$2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1=0$；

当 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$ 时，$2\sin^2\frac{\theta_1+\theta_2}{2}-1>0$.

由此可得出，当 $\theta_1+\theta_2<\frac{\pi}{2}$ 时，θ_1 与 θ_2 有一个为零时，$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 有最大值；当 $\theta_1+\theta_2>\frac{\pi}{2}$，且 $|\theta_1-\theta_2|$ 越小时，$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 值越大.

当 $n=3$ 时，即 $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$ 时，容易证明

$$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3\leqslant\frac{9}{4}.$$

而当 $n\geqslant 4$ 时，可知 θ_1、θ_2、θ_3、θ_4 中必有两个角不超过 $\frac{\pi}{2}$.

由前面结论知，$\theta_1+\theta_2\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，当 θ_1 与 θ_2 有一个为零时，$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2$ 有最大值. 于是所求的最大值可转化成三个角的和为 π，其正弦值的平方的最大值问题.

另一方面 $n=2$ 时，$\theta_1+\theta_2=\pi$，$\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2\leqslant 2$.

综上所述，当 $n=2$ 时，$(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2)_{\max}=2$.

当 $n\geqslant 3$ 时，$(\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+\sin^2\theta_3+\cdots+\sin^2\theta_n)_{\max}=\frac{9}{4}$，且当 $\theta_1=\theta_2=\theta_3=\frac{\pi}{3}$，$\theta_4=\theta_5=\cdots=\theta_n=0$ 时，取等号.

评注 从简单情况推出一般情况是解竞赛题的常用策略. 本题先考虑 $n=2$，3 的情况，然后将 $n\geqslant 4$ 的情况转化为 $n=3$ 的情况.

例 19 求所有的实数 α 的值，使数列 $a_n=\cos 2^n\alpha$（$n=1, 2, \cdots$）中每一项都为负数.（2003 年日本数学竞赛）

证明 首先，若 α 是满足条件的实数，则 $\cos\alpha\leqslant-\frac{1}{4}$.

事实上：若 $\cos\alpha\in\left(-\frac{1}{4}, 0\right)$，则

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1<-\frac{7}{8}.$$

$\cos 4\alpha=2\cos^2 2\alpha-1>0$，矛盾.

由上述推导可知：对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$，均有 $\cos 2^n\alpha\leqslant-\frac{1}{4}$，于是

$$\left|\cos 2^n\alpha-\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{3}{4},$$

注意到 $\left|\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right|=\left|2\cos^2\alpha-\frac{1}{2}\right|=2\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|\left|\cos\alpha-\frac{1}{2}\right|$,

有 $$\left|\cos\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\frac{2}{3}\left|\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\cos 4\alpha+\frac{1}{2}\right)\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n\left|\cos 2^n\alpha+\frac{1}{2}\right|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

当 $n\to\infty$ 时,$\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$,故 $\cos\alpha+\frac{1}{2}=0$.

所以 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,即 $\alpha=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

另一方面,当 $\alpha=2k\pi\pm\frac{2}{3}\pi$, $k\in\mathbf{Z}$ 时,对于任意 $n\in\mathbf{N}_+$,均有 $\cos 2^n\alpha=-\frac{1}{2}$ 满足条件.

综上所述,$\alpha=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

评注 本题也可这样思考,对于 $\cos\alpha=\cos 2\alpha<0$ 的值,能满足题设条件. 由 $\cos\alpha=\cos 2\alpha<0$,得 $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$,所以 $\alpha=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

例 20 设 $F_n=x^n\sin(n\alpha)+y^n\sin(n\beta)+z^n\sin(n\gamma)$,其中 x, y, z, α, β, $\gamma\in\mathbf{R}$, $n\in\mathbf{N}_+$, $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. 试证若 $F_1=F_2=0$,则对一切正整数 n,有 $F_n=0$.

分析 由 F_n 的形式,联想到复数的方幂 $z^n=\gamma^n(\cos n\alpha+\mathrm{i}\sin n\alpha)$. 故可设 $z_1=x(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$, $z_2=y(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)$, $z_3=z(\cos\gamma+\mathrm{i}\sin\gamma)$. 这样 F_n 是 $z_1^n+z_2^n+z_3^n$ 的虚部,所以只要证明 $z_1^n+z_2^n+z_3^n$ 为实数.

解 设复数 $z_1=x(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)$, $z_2=y(\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta)$, $z_3=z(\cos\gamma+\mathrm{i}\sin\gamma)$,则 $z_1+z_2+z_3=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+\mathrm{i}F_1=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma\in\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned}z_1\cdot z_2+z_2\cdot z_3+z_3\cdot z_1&=\frac{1}{2}[(z_1+z_2+z_3)^2-(z_1^2+z_2^2+z_3^2)]\\&=\frac{1}{2}[(x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma)^2-x^2(\cos 2\alpha+\\&\quad\mathrm{i}\sin 2\alpha)-y^2(\cos 2\beta+\mathrm{i}\sin 2\beta)-z^2(\cos 2\gamma+\mathrm{i}\sin 2\gamma)]\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}[(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 - \\
&\quad (x^2\cos 2\alpha + y^2\cos 2\beta + z^2\cos 2\gamma) - \mathrm{i}F_2] \\
&= \frac{1}{2}[(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 - \\
&\quad (x^2\cos 2\alpha + y^2\cos 2\beta + z^2\cos 2\gamma)] \in \mathbf{R}.
\end{aligned}
$$

$z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 = xyz[\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \mathrm{i}\sin(\alpha+\beta+\gamma)] = \pm xyz \in \mathbf{R}.$

不妨令

$$a = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma,$$

$$b = \frac{1}{2}[(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)^2 - (x^2\cos 2\alpha + y^2\cos 2\beta + z^2\cos 2\gamma)],$$

$c = \pm xyz$,则 z_1、z_2、z_3 是实系数方程

$$u^3 - au^2 + bu - c = 0$$

的三个根.

设 $S_n = z_1^n + z_2^n + z_3^n$,则 $S_{n+3} = aS_{n+2} - bS_{n+1} + cS_n$.

下面用数学归纳法证明 $S_n \in \mathbf{R}$.

(i) 当 $n = 0$ 时,$S_0 = 3 \in \mathbf{R}$;

当 $n = 1$ 时,$S_1 = z_1 + z_2 + z_3 = a \in \mathbf{R}$;

当 $n = 2$ 时,

$$
\begin{aligned}
S_2 &= z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 \\
&= (z_1 + z_2 + z_3)^2 - 2(z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1) \\
&= a^2 - 2b \in \mathbf{R}.
\end{aligned}
$$

(ii) 假设 $n = k-2, k-1, k$ 时,命题成立,即 $S_{k-2}, S_{k-1}, S_k \in \mathbf{R}$.

则当 $n = k+1$ 时,$S_{k+1} = aS_k - bS_{k-1} + cS_{k-2} \in \mathbf{R}$.

由(i)(ii)可知,对任意 $n \in \mathbf{N}$,有 $S_n \in \mathbf{R}$.

又因为 F_n 是 S_n 的虚部,所以 $F_n = 0$, $n \in \mathbf{N}_+$ 恒成立.

评注 由特殊推一般,数学归纳法是常用的好方法.

习 题 1

一、填空题

1 将正弦曲线 $y = \sin(-x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位,所得到的函数图象

的解析式是________；将余弦曲线 $y=\cos(-2x)$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位，所得到的函数图象的解析式是________.

2 函数 $y=\sqrt{\cos x-2\cos^2 x}$ 的定义域是________，值域是________.

3 函数 $y=\sin x\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)$ 的最小正周期是________.

4 已知 $f(x)=a\sin^3 x+b\sqrt[3]{x}\cdot\cos^3 x+4\ (a,b\in\mathbf{R})$，且 $f(\sin 10^\circ)=5$，则 $f(\cos 100^\circ)=$________.

5 函数 $f(x)=\sqrt{\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-1}$ 的定义域是________.

6 函数 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 图象的对称轴是________.

7 函数 $y=\tan\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{6}\right)$ 图象的对称中心是________.

8 设函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)\ \left(\omega>0,\ |\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$，给出四个判断：

①它的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称；②它的图象关于点$\left(\frac{\pi}{3},0\right)$对称；

③它的最小正周期是 π；④在区间$\left[-\frac{\pi}{6},0\right]$上是增函数.

以其中两个论断作为条件，另两个论断作为结论，你认为正确的两个命题是________.

9 有四个函数：①$y=\sin^2 x$；②$y=\sin|x|$；③$y=\tan\frac{x}{2}-\cot\frac{x}{2}$；④$y=|\sin x|$. 其中周期为 π，且在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是增函数的为________.

10 方程 $\sin x=\frac{x}{100}$ 的实根个数有________个.

11 若实数 x、y 满足 $x^2+2\cos y=1$，则 $x-\cos y$ 的取值范围是________.

12 满足 $\frac{1}{4}<\sin\frac{\pi}{n}<\frac{1}{3}$ 的所有正整数 n 的和是________.

13 已知 $\alpha,\beta\in[0,\pi]$，则 $(\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta))\cdot\sin\beta$ 的最大值是________.

14 已知函数 $y=\sin x+a\cos x$ 的图象关于直线 $x=\frac{5\pi}{3}$ 对称，则函数 $y=a\sin x+\cos x$ 的图象的对称轴方程为____________.

二、解答题

15 作出函数 $y=\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x-1$ 在一个周期上的图象，并指出它与 $y=\sin x$ 的图象间的关系.

16 已知 $f(x)=2\sin\left(x+\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\theta}{2}\right)+2\sqrt{3}\cos^2\left(x+\frac{\theta}{2}\right)-\sqrt{3}$.

(1) 化简 $f(x)$的解析式;

(2) 若 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, 求 θ 值,使函数 $f(x)$为偶函数;

(3) 在(2)的条件下,求满足 $f(x)=1$ 在$[-\pi,\pi]$上的 x 集合.

17 已知当 $x\in[0,1]$ 时,不等式 $x^2\cos\theta-x(1-x)+(1-x)^2\sin\theta>0$ 恒成立,试求 θ 的取值范围.

18 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,0\leqslant\varphi\leqslant\pi)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数,其图象关于点 $M\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$对称,且在区间$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上是单调函数,求 φ 和 ω 的值.

19 正实数 α、β、a、b 满足条件 $\alpha<\beta$, $\alpha+\beta<\pi$, $a+b<\pi$ 并且$\frac{\sin a}{\sin b}\leqslant\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$,求证:$a<b$.

20 已知 $f(x)=\frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt{1+\cos 2x}}$.

(1) 求函数 $f(x)$的定义域、值域、最小正周期;

(2) 判断函数 $f(x)$的奇偶性.

21 若方程 $\sin^2 x+\cos x+a=0$ 有解,求实数 a 的取值范围.

22 是否存在实数 x,使 $\tan x+\sqrt{3}$ 与 $\cot x+\sqrt{3}$ 是有理数?

23 (1) 求函数 $f(\theta)=\cos\frac{\theta}{2}\sin\theta$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值;

(2) 求函数 $g(\theta)=\sin\frac{\theta}{2}\cos\theta$, $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 的最大值.

24 教室的墙壁上挂着一块黑板,它的上下边缘分别在学生的水平视线上方 a 米和 b 米,问学生距墙壁多远时看黑板的视角最大?

25 已知函数 $f(x)=\tan x$, $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,若 x_1, $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,且 $x_1\neq x_2$,求证:$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$.

26 试求正整数 k,使 $f(x)=\sin kx\cdot\sin^k x+\cos kx\cdot\cos^k x-\cos^k 2x$ 的值不依赖于 x.

2 三角函数恒等变换

1. 三角恒等变形是三角的灵魂，它通过变名变角变次，公式的顺用与逆用使三角函数充满技巧，凸显其灵活性. 主要题型有化简、求值、恒等式证明.

2. 三角函数化简和求值过程中的基本策略.

(1) 常值代换：特别是用“1”的代换，如 $1=\cos^2\theta+\sin^2\theta=\tan x\cdot\cot x=\tan 45^\circ$ 等.

(2) 项的分拆与角的配凑. 如分拆项：$\sin^2x+2\cos^2x=(\sin^2x+\cos^2x)+\cos^2x=1+\cos^2x$；配凑角：$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$，$\beta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ 等.

(3) 降次与升次. 即倍角公式降次与半角公式升次.

(4) 化弦(切)法. 将三角函数利用同角三角函数基本关系化成弦(切).

(5) 引入辅助角. $a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$，这里辅助角 φ 所在象限由 a、b 的符号确定，φ 角的值由 $\tan\varphi=\dfrac{b}{a}$ 确定.

(6) 万能代换法. 巧用万能公式可将三角函数化成 $\tan\dfrac{\theta}{2}$ 的有理式.

3. 三角恒等式包括绝对恒等式和条件恒等式两类. 证明三角恒等式时，首先要观察已知与求证或所证恒等式等号两边三角式的繁简程度，以决定恒等变形的方向；其次要观察已知与求证或所证恒等式等号两边三角式的角、函数名称、次数以及结构的差别与联系，抓住其主要差异，选择恰当的公式对其进行恒等变形，从而逐步消除差异，统一形式，完成证明. “和差化积”、“积化和差”、“切割化弦”、“降次”等是我们常用的变形技巧. 当然有时也可以利用万能公式“弦化切割”，将题目转化为一个关于 $t=\tan\dfrac{x}{2}$ 的代数恒等式的证明问题.

4. 证明三角不等式的方法：比较法、配方法、反证法、分析法，利用函数的单调性，利用正、余弦函数的有界性，利用单位圆三角函数线及判别法等.

5. 两角和、差的三角函数的公式是所有三角公式的核心和基础. 此外，三

角是代数与几何联系的“桥梁”，与复数也有紧密的联系，因而许多三角问题往往可以从几何或复数角度获得巧妙的解法.

半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

万能公式：

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}},\ \cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

由 $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$ 可以推导积化和差公式：

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

由 $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$ 可以推导：

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].$$

和差化积公式：

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

其他的一些公式：

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha=4\sin(60^\circ-\alpha)\cdot\sin\alpha\sin(60^\circ+\alpha),$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha=4\cos(60^\circ-\alpha)\cdot\cos\alpha\cos(60^\circ+\alpha),$$

图书在版编目(CIP)数据

三角函数/曹瑞彬编著.—上海:华东师范大学出版社,2019
(数学奥林匹克小丛书:第三版.高中卷)
ISBN 978-7-5675-9619-1

Ⅰ.①三… Ⅱ.①曹… Ⅲ.①中学数学课—高中—习题集
Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2019)第298540号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷

三角函数(第三版)

编　　著　曹瑞彬
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　石　岩
责任校对　陈　易
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路3663号　邮编200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话021-62869887
地　　址　上海市中山北路3663号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16开
插　　页　1
印　　张　12
字　　数　209千字
版　　次　2020年4月第三版
印　　次　2020年4月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9619-1
定　　价　30.00元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师一小学奥数教练 2 群，群号：689181206

2. 华师一初中数学教师 2 群，群号：112892422

3. 华师一中学奥数教练群，群号：545921244

4. 华师一高中数学教师群，群号：319118349

5. 华师一初中理科学生群，群号：609160454

6. 华师一高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。