数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 7

Mathematical Olympiad Series

解析几何

刘鸿坤 编著

华东师范大学出版社

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　言

这本《解析几何》顾名思义是介绍解析几何最基本知识的.目的是为中学生学习解析几何提供一份辅导资料.同时为爱好数学的资优学生进一步学习高等数学打下基础.

全书共九章.前三章大部分无需高中数学知识就可阅读,接下来的六章则要求懂得如何使用几何、代数、三角等综合知识.在编写中,我们从现行的中学数学教学大纲和教材出发,并注意到对其的拓广和发展,着重讲清解决问题的思想方法;对于涉及到像由曲线求它的方程和适当选取坐标系等重点内容和基本技能,做了多次反复、螺旋上升的处理.

在第一章、第四章和第六章中,我们还特地加入了一些历史资料,以扩大读者的知识面,并提高阅读的兴趣.

在例题和习题的选择方面,熊斌先生为本书提供了一些较新颖的、别致的.尤其是近几年国内外数学竞赛中相当于我国高中联赛水平的解析几何的试题,对此表示由衷的感谢.

由于水平的限制,本书无论在内容和编写方法上,以及习题配置等方面均可能有不当之处,还望读者和专家不吝赐教.

编者

2019 年 10 月

目　　录

1 绪　论

解析几何学是以坐标方法为基础，运用代数方法来研究几何对象的科学. 它包含两类基本课题：(i) 从给出轨迹的几何条件，通过适当选取坐标系来确定它们的方程. (ii) 从给出坐标 x、y 间的方程，作出满足方程的图形. 前者的研究是利用一些轨迹条件，选取坐标系来确定它们的方程，而后者往往从曲线方程的代数性质的研究来推导它的某些几何性质.

解析几何产生于十七世纪前期决不是偶然的，当时欧洲正过渡到新的资本主义生产方式时期，由于生产的发展，推动了科学的进步. 首先，波兰的数学家**哥白尼**(Copernicus, N., 1473—1543)提出了日心地动学说，推翻了长期被教会利用的错误的托勒密的地心假说. 德国的**开普勒**(Kepler, J., 1571—1630)在此基础上发现行星沿椭圆轨道绕着太阳运动. 意大利的**伽利略**(Galilei, G., 1564—1642)发现抛出去的石子沿着抛物线轨道飞去，从而进一步确定了抛射体运动轨道的抛物线形状. 此外，由抽水机的扬程问题，引起**帕斯卡**(Pascal, B., 1623—1662)等人发现的大气压力随着高度增加而递减的法则，诸如此类不胜枚举. 所有这些科学的发现促进了数学相应的发展. 尽管当时一些最优秀的数学家已经接近了解析几何的观念，但是只有法国的**勒奈·笛卡儿**(Descartes, R., 1596—1650)和**庞埃尔·费尔马**(Fermat, P., 1601—1665)两位数学家，他们注意到曲线研究中的一般方法，敏锐地看到了数量方法的必要. 而且注意到代数具有提供这种方法的力量. 因此，他们就用代数来研究几何了.

笛卡儿(Descartes)

笛卡儿于 1596 年 3 月 31 日出生在法国西部土伦的拉哈耶. 他是法国著名的哲学家，是近代生物学的奠基人，第一流的物理学家. 虽然他声称平生信奉正教，但是在科学上他却是一个地道的怀疑论者. 当他八岁的时候，他的父亲把他送进昂茹的拉弗莱希地方的一个耶稣会学校. 因为他身体不好，被允许每天早上在床上工作，这习惯他一直

保持到老. 他十六岁离开拉弗莱希，二十岁毕业于普瓦界大学，去巴黎当律师. 二十一岁那年，他应征到奥伦治毛雷斯公爵的部队里服兵役. 他当士兵的那些岁月是空闲的，这使他能有机会到荷兰、德国等国家，所见所闻丰富了他的科学知识，并且使他能腾出时间来进行刻苦学习. 有一次，他在荷兰布莱达的街上散步，被一张荷兰文的招贴所吸引. 他不懂荷兰文，便请求站在旁边的人译成拉丁文或法文给他看. 这人正好是多特学院的院长艾萨克・毕克门，他答应了这一请求. 原来这张广告是当时数学家的一种挑战书，列有难题，广征答案. 笛卡儿却在数小时内解决了，毕克门大为佩服. 这使笛卡儿自信有数学才能，从而开始认真地用心于数学研究. 在那段时间里，数学是他珍爱的一门科学. 回到巴黎后，他为望远镜的威力所激动，闭门钻研光学仪器的理论与构造. 1629 年到 1649 年，他是在荷兰度过的，主要是研究物理和哲学. 1637 年他发表了“方法论讲演集”，其中有一篇是论几何学的，它长达一百零六页. 1649 年他被邀请去瑞典做古斯塔夫斯・阿道弗斯的女儿克里斯蒂纳女皇的教师. 一年之后，他在斯德哥尔摩患肺炎去世.

笛卡儿的《几何学》由三“大卷”组成. 第一卷是介绍“仅用圆规和直尺就能解决的作图问题”. 第二卷是“论曲线之特性”. 第三卷是处理“三次和三次以上的作图问题”. 笛卡儿的理论以两个观念为基础：坐标观念和利用坐标方法把带有两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线的观念. 他最先应用两个数或三个数的数组，例如(A, B)或(A, B, C)当作坐标来代表一个平面上或一个空间中的点. 用这种方法，欧氏几何中有关图形的说明都可用数来解释. 据说，他在患病卧床时，观察一个蜘蛛在天花板上爬，然后又顺着吐出的丝渐渐地降下来，这启发了他用(A, B, C)代表空间中各个点的想法. 他是用字母，例如a、b、c、x、y、z来代表正数的第一个人. 他用几何的方法去研究代数方程的解，同时又反过来通过代数方程去研究几何作图问题，这就是最初的解析几何学的基本思想. 由于笛卡儿把代数学与几何学密切地结合起来，所以直到现在仍沿用着**笛卡儿坐标**的名称，以纪念这位科学大师. 如果点用坐标表示，那么图形之间的关系就可以用方程来表示，这就使几何与代数融为一体. 笛卡儿学说，到十八世纪开放了灿烂之花，就是现在在代数学中也还在继续发展着.

笛卡儿在他的几何里所解决的第一个重要课题是“帕普斯问题”，即“在一平面上给定若干直线，要找出一个点的轨迹，这个点到这些定线所作的若干垂线，或更一般地，按一些给定的角度所作的若干直线，将能满足下列条件，那就是它们中间某几个的乘积与其余几个的乘积之比等于一个给定的数值”. 关于这个著名的问题，古希腊人只是解决了它的一个特殊情况，即所给定的直线是

四条的情形，这时点的轨迹成为一条圆锥曲线. 而笛卡儿却完全地解决了这个问题. 这里不妨以四条直线时的帕普斯问题，看笛卡儿的做法. 他先设给定的线（图 1.1）是 AG、GH、EF 和 AD. 考虑一点 C，从点 C 引四条线各与一条已知线交于已知角，把所得的四条线段记为 CP、CQ、CR 和 CS，然后，他选定一条线 AG 作为基线，以点 A 为原点，记 AP 为 x（x 值是基线上的长度，从 A 量起），记 PC 为 y（y 值是一个线段的长度，由基线出发，与基线作成一个固定的角度）. 他从已知量得出 CR、CQ 和 CS 的值，把这三个值代入 $CP \cdot CR = CS \cdot CQ$，他就得到一个关于 x 和 y 的二次方程

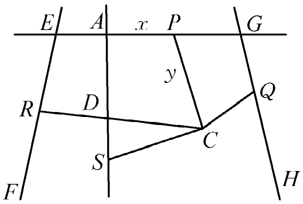

图 1.1

$$y^2 = Ay + Bxy + Cx + Dx^2, \qquad (1)$$

其中 A、B、C、D 是由已知量组成的简单的代数式，于是他指出，如果任意给出 x 一个值，就得到一个 y 的二次方程，从这个方程可以解出 y. 如果我们取无穷多个 x 值，就得到无穷多个 y 值，从而得到无穷多个点 C. 所有这些 C 点的轨迹，就是方程(1)所代表的曲线. 但是，笛卡儿的坐标系是不完整的，因为他考虑的是线段和坐标间的关系，而不是点和坐标间的关系. 他的 x、y 只取正值，其图象局限于第一象限之内，但方程(1)所代表的曲线却无此限制. 笛卡儿简单地假定轨迹根本上位于第一象限之内，只附带地说了一下在第一象限外可能出现的情况，他又不自觉地假定了对于每个正实数有一个长度. 对笛卡儿来说，一个字母永远只是代表着一个正数.

现代的解析几何学是在笛卡儿（还有费尔马）的基础上发展起来的. 和笛卡儿同时代的费尔马，分享着解析几何创立的荣誉. **费尔马**生于 1601 年 8 月 20 日，出生在法国南部土鲁兹附近的波蒙. 他是土鲁兹城的市议会的顾问，世界上最卓越的数学家之一. 他在一篇题为“平面轨迹和空间轨迹导论”的论文中发展了关于解析几何的思想，费尔马早就叙述出了他的一般原理：“只要在最后的方程里出现了两个未知量，我们就得到一个轨迹，这两个量之一，其末端就描绘出一条直线或曲线. ”如图 1.2 中对于不同位置的 E，其末端 J，J'，J''，…就把“线”描出. 他的未知量 A 和 E，实际上是变数，或者可以说，联系 A 和 E 的方程是不确定的. 不仅如此，他还把直线和二次曲线的方程都写了出来，用我们的写法就是：

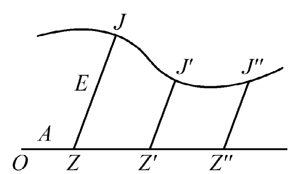

图 1.2

1. 通过原点的直线方程：$Dx = By$.
2. 任意直线的方程：　$d(a-x) = by$.
3. 圆的方程：　$B^2 - x^2 = y^2$.

4. 椭圆的方程：　　　$a^2 - x^2 = ky^2$.

5. 双曲线的方程：　　$a^2 + x^2 = ky^2$ 和 $xy = a$.

6. 抛物线的方程：　　$x^2 = ay$.

现在的解析几何，这些曲线的方程和它们基本相同. 费尔马有比笛卡儿更为明确的坐标概念和坐标轴的概念. 但是他和笛卡儿一样，不用负坐标，他的方程不能像他所说的那样代表整个曲线，但他确实领会到了坐标轴可以平移或旋转，因为他给出一些较复杂的二次方程，并给出它们可能简化的形式，因此他肯定：一个联系着 A 和 E 的方程，如果是一次的，就代表直线轨迹，如果是二次的，就代表圆锥曲线.

尽管笛卡儿和费尔马研究解析几何的方式和目的有显著的不同，但是他们之间却发生了谁先发现解析几何的争论. 事情经过是这样的：费尔马的著作直到 1679 年才出版，但他在 1629 年就已发现了解析几何的基本原理，这比笛卡儿发表《几何学》的 1637 年还早. 笛卡儿当时已完全知道费尔马的许多发现，但否认自己的思想是从费尔马那里来的. 最后，荷兰数学家艾萨克・毕克门，证实解析几何中的许多基本思想，无疑是笛卡儿在 1619 年首创的，从而结束了这场争论.

当今，解析几何中所用的“坐标”、“横坐标”和“纵坐标”等名词是由德国的**莱布尼兹**(Leibniz, G. W., 1646—1716)首先提出的. 在英国**牛顿**(Newton, I., 1642—1727)的著作中第一次使用了坐标和正确地运用了纵横轴，并对二次和三次曲线进行了较系统的研究.

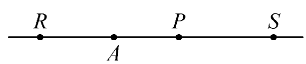

图 1.3

十八世纪中期，解析几何的内容已很丰富，基本上达到了成熟的阶段. 瑞士科学家**欧拉**(Euler, L., 1707—1783)则作了一些总结性的研究. 1748 年出版了他的名著《无穷小的分析入门》，此书第二卷讨论了平面曲线的性质，被誉为第一本解析几何学的课本. 在这本书中，一开始就建立了如图 1.3 所示的坐标系. 设 RS 是一给定的直线，A 是 RS 上的一个定点，P 是 RS 上的一个任意(动)点. AP 之值为 x，当 P 趋向于 A，且与 A 重合时，$x = 0$. 欧拉把线段 AP 定义为“横坐标”. AP 的值按照两个相反的方向变化，这里的点 A，就是现在所说的原点，直线 RS 是横轴.

然后，再过点 A 作 $AB \perp RS$，M 是平面上一条曲线上的点(如图 1.4). 点 M 的坐标分别为 x 和 y，当 $x = 0$ 时，$y = AB$；当 $x = AP$ 时，$y = PM$；如果 $x = AD$，那么 $y = 0$，…….

这个坐标的不足之处在于纵轴没有用一整条直线表示，而是用一线段. 不

过这线段可以根据实际情况，任意决定长短. 而欧拉在另外一本书中曾经用互相垂直的两条直线建立了直角坐标系，以 O 为原点.

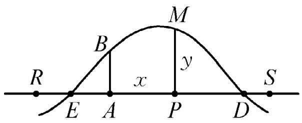

图 1.4

此外，欧拉还给出了平移和旋转的最早的公式、平面代数曲线的分类、二次曲线的切线与渐近线、极坐标与参数方程等. 欧拉之后，又有许多数学家继续研究解析几何，使其内容日臻完善，达到了今天的样子. 十七世纪以来数学的巨大发展，在很大程度上应归功于解析几何.

解析几何经历了这样长的发展道路，看来它应已发展到了尽头. 然而，事实上却并非如此. 在十九世纪末，许多卓越的分析学家认为，必须研讨无穷维的解析几何. 于是，急剧地发展成为数学的一大分支——泛函分析. 有趣的是，无穷维的解析几何有重要的实际应用，而且在现代物理学里占有基本的地位. 另一个新的宽广的数学分支——代数几何. 它是普通解析几何的更直接的推广，它研究在笛卡儿坐标里由代数方程表示曲线、曲面和超曲面. 这些方程不仅是一次的和二次的，而且还有高次的. 在这些研究中不仅考虑实数坐标，而且也考虑复数坐标，即考虑在所谓复空间里的东西. 以上两个数学分支都只是一半地代表了古典解析几何直接的延续：在泛函分析里有许多是分析内容，在代数几何里有不少函数论和拓扑学的内容.

2 平面坐标法

在这一章中，我们首先引入有向直线及有向线段的概念，然后通过平面直角坐标系建立点与数、曲线与方程的联系.

2.1 有向线段

在平面几何里，直线或线段是不考虑它的方向的. 如线段 AB 与 BA 可以表示同一线段. 但是，在实际生产和日常生活中却不是这样，往往要考虑直线或线段的方向. 例如，一个人沿着大路走五千米，以后再走五千米，最后走到哪里呢？答：离原地十千米. 可是，如果后面是往回走的，那就回到了原地. 为了表示是去还是回来这一事实，只用线段就不够了，还有必要对线段规定一个方向. 同样，也有必要对直线规定方向.

1. 有向直线与有向线段　一条直线具有两个相反的方向. 如果我们选定一个方向作为正向，那么相反的方向就是负向，规定了方向的直线称为**有向直线**或**轴**. 为了便于讨论，有向直线的（正的）方向用箭头表示，如图 2.1 中的直线 l.

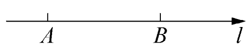

图 2.1

线段是直线上两点所截的部分，设两点 A 和 B 决定线段 AB，显然它也有两个相反的方向. 如果以 A 作为线段的起点，B 作为它的终点，那么从点 A 到点 B 的方向就是线段的一个方向. 规定了方向的线段称为**有向线段**，通常记作 $\overline{AB}$（将表示起点的字母写在前面）.

在有向直线上，如果有向线段的方向和有向直线的方向一致，那么就称它的方向是正的；如果相反，那么就称它的方向是负的. 例如图 2.1 中，$\overline{AB}$ 的方向是正的，$\overline{BA}$ 的方向是负的.

当选定一条线段作为长度单位，我们就可以量得一条有向线段的长度. 一

条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做这条有向线段的**数值**. 通常把有向线段$\overline{AB}$的数值记作AB，$\overline{AB}$的长度记作$|AB|$.

例如，在图 2.2 中，轴 l 上两点 A、B 的距离是 5，并且$\overline{AB}$与轴 l 同向，所以$\overline{AB}$的数值是$+5$；而$\overline{BA}$与轴 l 反向，所以$\overline{BA}$的数值是-5，即 $AB=5$，$BA=-5$，$|AB|=|BA|=5$.

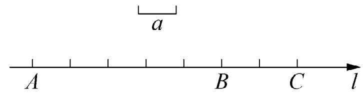

图 2.2

由此可见，有向线段$\overline{AB}$和$\overline{BA}$的数值互为相反数. 不仅如此，对于任何两条有向线段$\overline{AB}$和$\overline{BA}$的数值，都有关系：$AB=-BA$，即 $AB+BA=0$. 但它们的长度相等，即$|AB|=|BA|$.

具有相等长度且有相同方向的有向线段称为**相等**的有向线段，一条有向线段可以用与它相等的有向线段来代替.

从有向线段数值的概念，建立了直线上点与实数的对应，也就是在直线上建立了坐标系——**数轴**，使每一个实数在数轴上可以找到一个点（唯一的）与它对应，数轴上每一点可有一个实数（唯一的）与它对应. 所以就有了数与点的一一对应的关系.

例 1 如图 2.3，已知 $OA=2$，$AB=3$，求 A、B 两点的坐标.

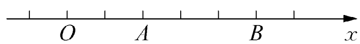

图 2.3

解 因为 $OA=2$，$AB=3$，所以 $OB=5$.

因此 A、B 两点的坐标分别是 2、5.

对于例 1，如果设 A、B 两点的坐标分别为 x_1 和 x_2，那么，坐标 x_1 和 x_2 与有向线段$\overline{AB}$的数值有什么关系呢？从例 1 中可以看到

$$AB=OB-OA，即 AB=x_2-x_1.$$

这就是说，有向线段$\overline{AB}$的数值是终点的坐标减去起点的坐标.

我们知道：O、A、B 三点的位置的排列情况有 6 种. 那么上述这个结论对于这 6 种情况是不是都适合呢？现在我们任选一种如图 2.4 的情况加以证明.

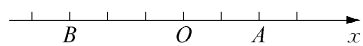

图 2.4

设 A、B 两点的坐标分别是 x_1 和 x_2，即 $OA=x_1$，$OB=x_2$.

根据图 2.4，有

$$AB=-|AB|，OA=|OA|，OB=-|OB|，$$

而 $$|AB| = |OB| + |OA|,$$

所以 $$AB = OB - OA = x_2 - x_1.$$

同理可证，A、B 两点在数轴上的其他各种位置时，有向线段$\overline{AB}$的数值仍然是终点的坐标 x_2减去起点的坐标 x_1. 即有

$$AB = OB - OA = x_2 - x_1, \tag{2.1}$$

$$|AB| = |OB - OA| = |x_2 - x_1|. \tag{2.2}$$

例 2 已知 A、B、C 三点在数轴上的坐标分别是 4、-2、-6，求 AB、BC、CA 及$|AB|$、$|BC|$、$|CA|$.

解 $AB = -2 - 4 = -6$，$|AB| = 6$；

$BC = -6 - (-2) = -4$，$|BC| = 4$；

$CA = 4 - (-6) = 10$，$|CA| = 10$.

为了进行轴上有向线段的数值的计算，我们给出有向线段的加法定理如下：

定　理

设 A、B、C 为数轴上任意三点，不论它们的位置顺序如何排列，总有关系：$$AB + BC = AC. \tag{2.3}$$

证 设 A、B、C 三点的坐标分别为 x_1、x_2、x_3，那么不论它们的位置如何，总有 $$AB = x_2 - x_1,\ BC = x_3 - x_2.$$

因为 $$AB + BC = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) = x_3 - x_1,$$

又 $AC = x_3 - x_1$，所以 $AB + BC = AC$.

轴上有向线段的加法定理也称为**沙尔**①公式. 它是以第二线段的起点重合在第一线段的终点上，并以第一线段的起点作为新的起点，以第二线段的终点作为新的终点所得的一条有向线段. 这样求出的有向线段就是上面两条有向线段的和.

一般地，设数轴上有 n 个点 P_1，P_2，P_3，…，P_n，不论它们的位置顺序如

① 沙尔(Michel Chasles，1793—1880)，法国几何学家兼数学史家.

何，总有 $$P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{n-1}P_n=P_1P_n. \tag{2.4}$$

证 设 n 个点 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的坐标分别为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，那么

$$P_1P_2=x_2-x_1,\ P_2P_3=x_3-x_2,\ \cdots,\ P_{n-2}P_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2},$$
$$P_{n-1}P_n=x_n-x_{n-1},\ P_1P_n=x_n-x_1.$$

所以 $$\begin{aligned}P_1P_2+P_2P_3+\cdots+P_{n-1}P_n&=(x_2-x_1)+(x_3-x_2)+\cdots+(x_n-x_{n-1})\\&=x_n-x_1=P_1P_n.\end{aligned}$$

2. 平面直角坐标系 为了确定平面上点的位置，先在平面上取两条互相垂直的数轴，它们具有公共的原点 O 和相同的长度单位. 通常取水平位置的一条叫做 ***x* 轴**或**横轴**；取铅垂位置的一条叫做 ***y* 轴**或**纵轴**（如图 2.5）. x 轴、y 轴统称为**坐标轴**，O 点称为平面上的**坐标原点**，这就构成了**平面直角坐标系**. 设 P 是平面上的任意一点，由 P 点分别向 x 轴和 y 轴作垂线，得垂足点 M 和 N. 设点 M 在 x 轴上的坐标是 x，点 N 在 y 轴上的坐标是 y. 那么，$|x|$ 等于 P 点到 y 轴的距离 $|PN|$，$|y|$ 等于 P 点到 x 轴的距离 $|PM|$，而 x 和 y 的符号分别说明了 P 点在 y 轴和 x 轴的哪一侧. 因此，P 点的位置就可以用有序实数对 (x, y) 来表示. 这个有序实数对 (x, y) 就叫做 P 点在这个直角坐标系中的**坐标**，其中 x 称为**横坐标**，y 称为**纵坐标**. 将上面的步骤倒过来，可以得到，对于任何实数对 (x, y)，在平面内也能确定一个点，使它的坐标是 (x, y). 这样，平面内的点和所有实数对 (x, y) 之间就建立了一一对应的关系.

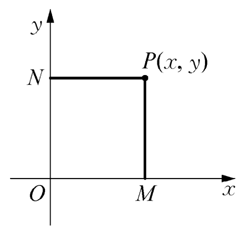

图 2.5

通过坐标系的建立，把平面内的点和实数对建立一一对应关系，这就有可能把平面内关于点的几何问题化为关于这些点的坐标的数量关系进行研究，平面解析几何就是从这一基本观念出发，用代数方法来研究几何问题的.

两坐标轴将平面分成四个部分，如图 2.6，依次叫做第Ⅰ象限，第Ⅱ象限，第Ⅲ象限，第Ⅳ象限. 坐标轴不属于任何象限.

设点 M 的坐标为 (x, y). 如果 $x>0$，$y>0$，那么点 M 在第Ⅰ象限. 如果 $x<0$，$y>0$，那么点 M 在第Ⅱ象限. 如果 $x<0$，$y<0$，那么点 M 在第Ⅲ象限. 如果 $x>0$，$y<0$，那么点 M 在第Ⅳ象限. 坐标轴上的点也不属于任何象限.

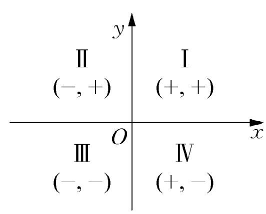

图 2.6

例 3 求点 $A(2, 3)$关于 x 轴的对称点 B 和关于原点的对称点 C 的坐标.

解 如图 2.7,因为点 A 和 B 在 x 轴的同一条垂线上,所以它们的横坐标相同,又因为它们到 x 轴的距离相等,且又在 x 轴的异侧,所以它们的纵坐标仅差一个符号. 因而 B 点的坐标是$(2, -3)$.

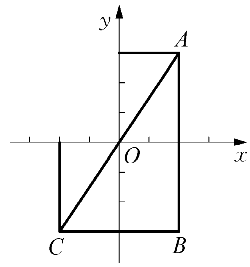

图 2.7

因为点 C 是点 A 关于原点的对称点,所以点 A 和 C 到 x 轴的距离相等,到 y 轴的距离也相等. 因为它们在 y 轴的两侧,所以横坐标相差一个符号. 同理,纵坐标也相差一个符号. 所以点 C 的坐标是$(-2, -3)$.

一般地,如果直线 l 是线段 AB 的垂直平分线,那么称 A、B 两点关于直线 l 是对称的,同时,称点 B 是点 A 关于直线 l 的对称点(或称点 A 是点 B 关于直线 l 的对称点). 直线 l 称为对称轴,这种对称叫做**轴对称**(如图 2.8).

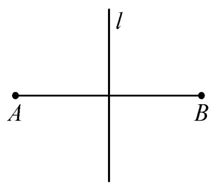

图 2.8

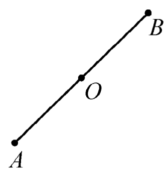

图 2.9

如果点 O 是线段 AB 的中点,那么称 A、B 两点关于 O 点对称,同时,称点 B 是点 A 关于点 O 的对称点(或称点 A 是点 B 关于点 O 的对称点). 点 O 称为对称中心,这种对称叫做**中心对称**(如图 2.9).

现在,在平面内有两点 A、B. 那么,如何求出这两点之间的距离? 又两点可连成一线段,在点 P 分已知线段成两线段的比为 $m : n$ 的情况下,又如何求出点 P 的位置? 当给出第三点 C 时,如何求出由 A、B、C 这三点所构成的三角形的面积? (如图 2.10)下面我们利用坐标来讨论上述几个基本问题.

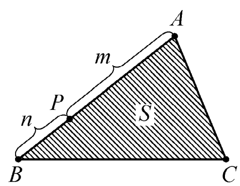

图 2.10

2.2 几个基本问题

1. 两点间的距离

已知两点 $E(-3, -1)$、$F(1, 2)$. 在加线条直角三角形 EFG(如图 2.11)中,

$$|EG| = |1-(-3)| = 4,$$
$$|GF| = |2-(-1)| = 3.$$

由勾股定理,得

$$|EF| = \sqrt{|EG|^2 + |GF|^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

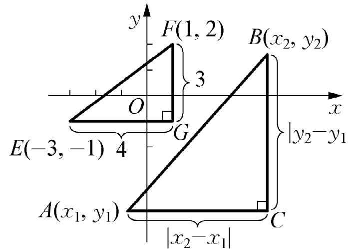

图 2.11

也就是说,E、F 两点之间的距离为 5.

按同样的想法,一般地,可以求出两点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$之间的距离.

设线段 AB 不平行坐标轴,如图 2.11 所示,作直角三角形 ABC,因为 $|AC| = |x_2 - x_1|$, $|CB| = |y_2 - y_1|$,所以

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

当线段 AB 平行于 x 轴或平行于 y 轴时,即 $y_1 = y_2$ 或 $x_1 = x_2$ 上式成立.

两点 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$之间的距离公式

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2.5)$$

特别是原点 $O(0, 0)$与点 $P(x, y)$的距离公式

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}. \qquad (2.6)$$

例 1 证明:以 $A(3, 2)$、$B(6, 5)$、$C(1, 10)$为顶点的三角形是直角三角形.

证 由两点间的距离公式,得

$$|AB|^2 = (6-3)^2 + (5-2)^2 = 18,$$
$$|BC|^2 = (1-6)^2 + (10-5)^2 = 50,$$
$$|CA|^2 = (3-1)^2 + (2-10)^2 = 68,$$

因而 $|AB|^2 + |BC|^2 = |CA|^2$,根据勾股定理的逆定理知,$\triangle ABC$ 是一个直

角三角形.

2. 线段的定比分点 设点 P 把有向线段$\overline{P_1P_2}$分成$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$两部分,那么有向线段$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$的数值的比,就是 P 点分$\overline{P_1P_2}$所成的比,通常用 λ 表示,即

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}.$$

一旦 λ 确定,P 点的位置也就确定.也就是说,已知两点要求第三点的关键在于求出 λ.由于 λ 是有向线段的数值的比,因此,λ 是与比的顺序有关的,并且 λ 本身具有一定的符号(正或负).

在顺序上:从 P_1(起点)到 P(分点),再从 P(分点)到 P_2(终点).

在符号上:如果 P 点在 P_1、P_2之间(如图 2.12(1)),则称点 P 是$\overline{P_1P_2}$的内分点.这时因为$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$的方向相同,所以 λ 为正.如果点 P 在 P_1、P_2两点之外(如图 2.12(2)(3)),则称点 P 为$\overline{P_1P_2}$的外分点,这时因为$\overline{P_1P}$和$\overline{PP_2}$的方向相反,所以 λ 为负.如果 P 和 P_1重合,那么 $\lambda=0$;如果 P 和 P_2重合,便有 $PP_2=0$,比值 λ 不存在.

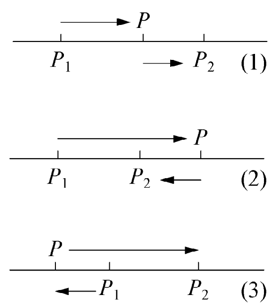

图 2.12

现在考虑,对任何实数 λ,是否存在分点 P,使所分线段的比等于 λ?如果存在,那么如何求分点 P 的坐标?

设 $P_1(x_1, y_1)$ 和 $P_2(x_2, y_2)$ 是两已知点,$P(x, y)$是$\overline{P_1P_2}$的分点,而且 $\frac{P_1P}{PP_2}=\lambda$.从点 P、P_1 和 P_2分别向 x 轴作垂线 PM、P_1M_1 和 P_2M_2交 x 轴于点 M、M_1、M_2(如图 2.13).

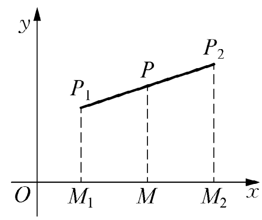

图 2.13

根据平面几何中的平行线截得比例线段定理,得

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|}=\frac{|M_1M|}{|MM_2|}.$$

如果点 P 在点 P_1和 P_2之间,那么点 M 也在点 M_1和 M_2之间;如果点 P 在点 P_1和 P_2之外,那么点 M 也在点 M_1和 M_2之外.因此$\frac{P_1P}{PP_2}$和$\frac{M_1M}{MM_2}$的符号相同,所以

$$\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2},$$

而 $M_1M=x-x_1$，$MM_2=x_2-x$，于是 $\lambda=\dfrac{x-x_1}{x_2-x}$.

解方程，只要 $\lambda\neq-1$，则得 $\quad x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$.

同理可得 $\quad y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

这说明，只要 $\lambda\neq-1$，分点 P 必存在，而且它的坐标是

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}.$$

当分点 P 是 $\overline{P_1P_2}$ 的中点时，$P_1P=PP_2$，所以 $\lambda=1$，因而中点坐标是

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

一般地，线段的定比分点的分点坐标可综合如下：

把连结两点 $P_1(x_1,\ y_1)$ 和 $P_2(x_2,\ y_2)$ 的线段 $\overline{P_1P_2}$ 分成 $\overline{P_1P}$ 和 $\overline{PP_2}$，且 $\dfrac{P_1P}{PP_2}=\lambda$ 的分点 P 的坐标是

$$\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)\ (\lambda\neq-1). \tag{2.7}$$

特别是，P_1P_2 中点的坐标是

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right). \tag{2.8}$$

例 2 已知两点 $A(1,\ 3)$、$B(4,\ 6)$，求分点 P，使 $AB=3PB$.

解 $AB=AP+PB=3PB$. 所以 $AP=2PB$，即 $\lambda=\dfrac{AP}{PB}=2$.

从而由 $x_1=1$，$y_1=3$；$x_2=4$，$y_2=6$，得 $x=\dfrac{1+2\times4}{1+2}=3$，$y=\dfrac{3+2\times6}{1+2}=5$，所以分点 P 的坐标是 $(3,\ 5)$.

例 3 证明：任意四边形四条边的平方和，等于两条对角线的平方和，再加上对角线中点连线的平方的 4 倍.

证 设四个顶点的坐标为 $A_i(x_i, y_i)$ ($i=1, 2, 3, 4$). 则对角线中点为

$$B\left(\frac{x_1+x_3}{2}, \frac{y_1+y_3}{2}\right), C\left(\frac{x_2+x_4}{2}, \frac{y_2+y_4}{2}\right).$$

于是
$$\begin{aligned}&4\left(\frac{x_1+x_3}{2}-\frac{x_2+x_4}{2}\right)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2\\ &=(x_1+x_3-x_2-x_4)^2+(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2\\ &=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_4-x_4x_1)\\ &=(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3-x_4)^2+(x_4-x_1)^2.\end{aligned}$$

同理,关于纵坐标也有类似的等式. 所以

$$\begin{aligned}&4|BC|^2+|A_1A_3|^2+|A_2A_4|^2\\ =&|A_1A_2|^2+|A_2A_3|^2+|A_3A_4|^2+|A_4A_1|^2.\end{aligned}$$

例 4 求证:三角形的三条中线相交于一点,这点离顶点的距离是它离对边中点的距离的 2 倍.

分析 假设在$\triangle ABC$ 中,G 是分中线$\overline{AD}$成 $2:1$,G 分$\overline{BE}$成 $2:1$,G 分$\overline{CF}$成 $2:1$,于是要证明三条中线相交于一点,只须证明分点 G 的坐标相同即可. 如果分点坐标相同,那么这点离顶点的距离是它离对边中点距离的 2 倍.

证 设三角形的三个顶点分别是 $A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$和 $C(x_3, y_3)$(如图 2.14),则$\overline{BC}$的中点 D 的坐标是

$$\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}\right).$$

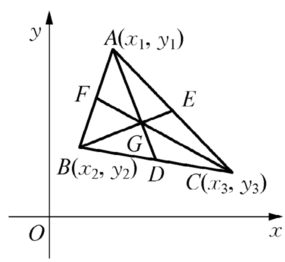

图 2.14

设点 G 是分中线$\overline{AD}$成 $2:1$ 的分点,则 G 点的坐标是

$$x=\frac{x_1+2\cdot\frac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},$$

$$y=\frac{y_1+2\cdot\frac{y_2+y_3}{2}}{1+2}=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}.$$

用同样的方法可以求得分中线$\overline{BE}$和$\overline{CF}$成 $2:1$ 的分点的坐标也是

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

所以$\triangle ABC$的三条中线$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$都经过G点(也称为$\triangle ABC$的重心),即它们交于一点,而且这点离顶点的距离是它离对边中点距离的2倍.

设三角形的三个顶点坐标为$A(x_1, y_1)$、$B(x_2, y_2)$、$C(x_3, y_3)$,则它的重心$G(x, y)$的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right). \quad (2.9)$$

如果在三个顶点A、B、C处放的质点质量分别为m_A、m_B、m_C,这时质点组的质心M的坐标为

$$\left(\frac{\sum m_A x_A}{\sum m_A}, \frac{\sum m_A y_A}{\sum m_A}\right).① \quad (2.10)$$

这是因为B、C两质点的重心N到B、C的距离之比为$m_C : m_B$,所有由分点公式,得重心N的坐标为

$$\left(\frac{m_B x_B+m_C x_C}{m_B+m_C}, \frac{m_B y_B+m_C y_C}{m_B+m_C}\right). \quad (2.11)$$

同理,A与N两质点(N处的质量是B、C两处质量之和,即m_B+m_C)的重心坐标为

$$\left(\frac{m_A x_A+(m_B+m_C)x_N}{m_A+m_B+m_C}, \frac{m_A y_A+(m_B+m_C)y_N}{m_A+m_B+m_C}\right),$$

其中(x_N, y_N)用式(2.11)代入便得到式(2.10).

例5 已知四边形$ABCD$的四条边AB、BC、CD、DA的中点分别是点P、Q、R、S,两条对角线AC、BD的中点分别是点M、N,证明:PR、QS、MN交于一点G,且这些线段都被点G所平分.

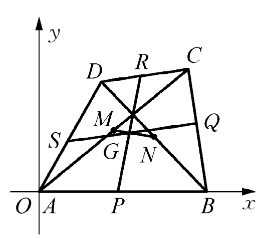

图2.15

证 如图2.15,以点A为原点,直线AB为x轴,建立直角坐标系.

设$A(0, 0)$,$B(x_1, 0)$,$C(x_2, y_2)$,$D(x_3, y_3)$,

① $\sum$表示将字母A、B、C轮换后所得的三个式子相加,例如$\sum m_A x_A = m_A x_A + m_B x_B + m_C x_C$;$\sum m_A = m_A + m_B + m_C$.

则由线段中点坐标公式得

$$P\left(\frac{x_1}{2},\ 0\right),\ Q\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_2}{2}\right),\ R\left(\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2}\right),$$
$$S\left(\frac{x_3}{2},\ \frac{y_3}{2}\right),\ M\left(\frac{x_2}{2},\ \frac{y_2}{2}\right),\ N\left(\frac{x_1+x_3}{2},\ \frac{y_3}{2}\right).$$

设线段 PR 的中点为点 G_1，线段 QS 的中点为点 G_2，线段 MN 的中点为点 G_3，则

$$G_1\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{4},\ \frac{y_2+y_3}{4}\right),\ G_2\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{4},\ \frac{y_2+y_3}{4}\right),$$
$$G_3\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{4},\ \frac{y_2+y_3}{4}\right).$$

由此可见，点 G_1、G_2、G_3 是同一点 G.

所以线段 PR、QS、MN 交于一点 G，且这些线段都被点 G 所平分.

例 6 已知点 F、E 分别在△ABC 的边 AB、AC 上，并且 $AF=\frac{1}{4}AB$，$AE=\frac{1}{3}AC$，BE 与 CF 相交于点 D，求点 D 的坐标.

解 欲使 A、B 处的两个质点的重心在点 F，则 A 处质点的质量应当是 B 处的 3 倍 $\left(这是因为\frac{AF}{FB}=\frac{1}{3}\right)$. 欲使 A、C 处的两个质点的重心在点 E，则 A 处质点的质量应当是 C 处的 2 倍 $\left(这是因为\frac{AE}{EC}=\frac{1}{2}\right)$. 于是，在 A 处放置质量为 6 的质点，B 处质量为 2，C 处质量为 3. 这时 A、B 的重心在点 F，A、B、C 的重心在 CF 上.

同理，A、C 的重心在点 E，A、B、C 的重心在 BE 上. 因此，A、B、C 的重心就是 CF 与 BE 的交点 D. 由(2.10)可知 D 的坐标为

$$\left(\frac{6x_A+2x_B+3x_C}{11},\ \frac{6y_A+2y_B+3y_C}{11}\right).$$

一般地，若 $\frac{AF}{FB}=\frac{m}{l}$，$\frac{AE}{EC}=\frac{n}{l}$，则 BE、CF 的交点为

$$\left(\frac{lx_A+mx_B+nx_C}{l+m+n},\ \frac{ly_A+my_B+ny_C}{l+m+n}\right). \tag{2.12}$$

3. 三角形面积 设三角形的顶点坐标是 $A(x_1,\ y_1)$、$B(x_2,\ y_2)$、$C(x_3,$

y_3).现在我们利用坐标来计算这个三角形的面积.

如图 2.16,过点 A、B、C 分别引 y 轴的平行线,分别交 x 轴于点 D、E、F,则$\triangle ABC$ 的面积等于梯形 A-BED 的面积加上梯形 $BCFE$ 的面积,再减去梯形 $ACFD$ 的面积,记为

$$S_{\triangle ABC}=S_{梯形ABED}+S_{梯形BCFE}-S_{梯形ACFD}.$$

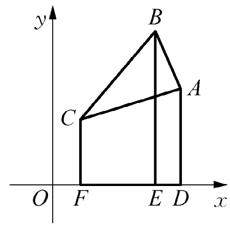

图 2.16

根据平面几何中梯形的面积公式,得

$$S_{梯形ABED}=\frac{1}{2}(AD+BE)\cdot ED,$$

即 $$S_{梯形ABED}=\frac{1}{2}(y_1+y_2)(x_1-x_2).$$

同理 $$S_{梯形BCFE}=\frac{1}{2}(y_2+y_3)(x_2-x_3).$$

$$S_{梯形ACFD}=\frac{1}{2}(y_1+y_3)(x_1-x_3).$$

所以 $$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}[(y_1+y_2)(x_1-x_2)+(y_2+y_3)(x_2-x_3)-\\&\quad(y_1+y_3)(x_1-x_3)]\\&=\frac{1}{2}[x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3].\end{aligned}$$

为了便于记忆,可将方括号内的多项式写成行列式的形式:

$$x_1y_2-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_1-x_1y_3=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\\x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

因此,以 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$为顶点的三角形的面积是

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\x_2 & y_2 & 1\\x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}. \qquad (2.13)$$

已知三角形顶点的$\triangle ABC$ 的面积公式(2.13)具有这样的特点:三阶行列

式中第一列的各个元素是三角形三个顶点的横坐标，第二列的各个元素是相应顶点的纵坐标，第三列的各个元素都是 1. 公式(2.13)还可以借助三角的知识予以推得：

如图 2.17，设 $|CA|=d_1$，$|CB|=d_2$，x 轴和 $\overline{CA}$、$\overline{CB}$ 的交角分别是 α_1、α_2，$\overline{CA}$、$\overline{CB}$ 的夹角是 θ，则 $\triangle ABC$ 的面积是

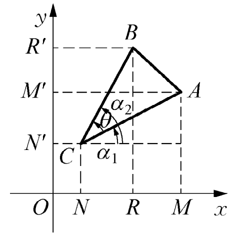

图 2.17

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\theta.\ \text{而}\ \theta=\alpha_2-\alpha_1,$$

所以
$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}d_1d_2\sin(\alpha_2-\alpha_1)\\&=\frac{1}{2}d_1d_2(\sin\alpha_2\cos\alpha_1-\cos\alpha_2\sin\alpha_1)\\&=\frac{1}{2}[d_1\cdot\cos\alpha_1\cdot d_2\cdot\sin\alpha_2-d_1\cdot\sin\alpha_1\cdot d_2\cdot\cos\alpha_2].\end{aligned}$$

又因为
$$d_1\cos\alpha_1=NM=x_1-x_3,\ d_2\cos\alpha_2=NR=x_2-x_3,$$
$$d_1\sin\alpha_1=N'M'=y_1-y_3,\ d_2\sin\alpha_2=N'R'=y_2-y_3.$$

所以
$$\begin{aligned}S_{\triangle ABC}&=\frac{1}{2}[(x_1-x_3)(y_2-y_3)-(y_1-y_3)(x_2-x_3)]\\&=\frac{1}{2}[x_1y_2-x_2y_1+x_3y_1-x_1y_3+x_2y_3-x_3y_2]\\&=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1&y_1&1\\x_2&y_2&1\\x_3&y_3&1\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

以上叙述了三角形面积公式的两种推导方法，这里必须注意：面积公式(2.13)仅当三角形的顶点顺序是逆时针方向时才得正值. 如果顶点顺序改变，那么所得的值就要相差一个符号，所以，在求面积时常常先要作图而后计算. 或者直接加上一个绝对值记号.

例 7 已知 $A(1,2)$，$B(-2,3)$，$C(0,5)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解 如图 2.18，若取逆时针方向，即 $A\to C\to B$ 时，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1&2&1\\0&5&1\\-2&3&1\end{vmatrix}=4.$$

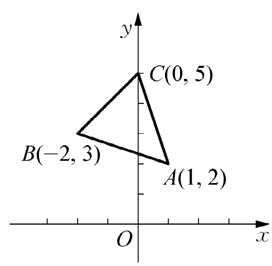

图 2.18

若取顺时针方向，即 $A \to B \to C$ 时，则

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ -2 & 3 & 1\\ 0 & 5 & 1\end{vmatrix}=-4.$$

由此可见，若三角形三个顶点的次序采取逆时针方向排列时面积为正，反之为负. 为简单起见，我们用面积的绝对值便可以不管顶点排列的次序了.

例 8　已知四边形的四顶点 $A(-3,\ -4)$、$B(2,\ -2)$、$C(1,\ 6)$和 $D(-1,\ 3)$. 求它的面积.

分析　首先把点在坐标系中定出来，然后利用四边形的面积等于有公共边的两个三角形面积的和来解，这时两个三角形顶点的顺序要一致. 如果不把点定出来，那么两个三角形的面积取绝对值，然后再求和. 否则，由于三角形面积有负值，所计算的结果则有变成两个三角形面积之差的可能.

解　$$\begin{aligned}S_{\text{四边形}ABCD}&=|S_{\triangle ABD}|+|S_{\triangle BDC}|\\&=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}-3 & -4 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}\right|+\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ -1 & 3 & 1\\ 1 & 6 & 1\end{vmatrix}\right|\\&=25.\end{aligned}$$

例 9　$\triangle ABC$ 和$\triangle A'B'C'$是同一平面上的两个三角形，直线 AA'、BB'、CC'互相平行. 如果用$[ABC]$表示$\triangle ABC$ 面积的绝对值，其余类推. 证明：

$$3([ABC]+[A'B'C'])=[AB'C']+[BC'A']+[CA'B']+[A'BC]+[B'CA]+[C'AB].$$

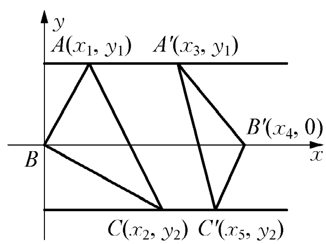

图 2.19

证　以 B 为原点，BB'为 x 轴，建立平面直角坐标系. 设 $A(x_1,\ y_1)$，$B(0,\ 0)$，$C(x_2,\ y_2)$，$A'(x_3,\ y_1)$，$B'(x_4,\ 0)$，$C'(x_5,\ y_2)$，如图 2.19.

因为　　$3([ABC]+[A'B'C']$

$$=\frac{3}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{3}{2}\begin{vmatrix}x_3 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3x_1+3x_3 & y_1 & 1\\ 3x_4 & 0 & 1\\ 3x_2+3x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix},$$

$[AB'C']+[BC'A']+[CA'B']+[A'BC]+[B'CA]+[C'AB]$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\\ x_3 & y_1 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_4 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_5 & y_2 & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_3 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_4 & 0 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix}+\frac{1}{2}\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ x_5 & y_2 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}3x_1+3x_2 & y_1 & 1\\ 3x_4 & 0 & 1\\ 3x_5+3x_2 & y_2 & 1\end{vmatrix},$$

所以 $3([ABC]+[A'B'C'])=[AB'C']+[BC'A']+[CA'B']+[A'BC]+[B'CA]+[C'AB]$.

现在我们考察三角形的三个顶点在一条直线上的情况.这时,而且也只有在此时,以这三点作为顶点的三角形的面积等于零.

因此可以得到,$P_1(x_1, y_1)$、$P_2(x_2, y_2)$和 $P_3(x_3, y_3)$三点共线的条件是

$$\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}=0. \tag{2.14}$$

一般地,设多边形的顶点(依逆时针方向)依次为 $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, …, $A_n(x_n, y_n)$,则多边形的面积是

$$S=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right). \tag{2.15}$$

当 $S=0$ 时,点 A_1, A_2, …, A_n共线.

习 题 1

1 已知 A、B、C 是直线上的三点，P 是这条直线上的任意一点,证明:

$$PA\cdot BC+PB\cdot CA+PC\cdot AB=0.$$

2 一正方形的边长为 3 单位长度,如果把它的相邻两边放在两条坐标轴上.求正方形各顶点的坐标.

3 已知三点$(4, -2)$、$(1, -3)$、$(2, 1)$是三角形三条边的中点,求这三角形三个顶点的坐标.

4 证明:平行四边形各边的平方和等于对角线的平方和.

5 求:(1) $\triangle ABC$ 的内心 I 的坐标;(2) $\triangle ABC$ 的垂心 H 的坐标;(3) $\triangle ABC$的外心 O 的坐标.

6 求证:$A(a, b+c)$、$B(b, c+a)$、$C(c, a+b)$ 三点在一条直线上.

7 已知五边形 $ABCDE$ 的顶点 $A(0, 0)$、$B(2, 1)$、$C(3, 2)$、$D(1, 4)$、$E(-1, 3)$,求五边形 $ABCDE$ 的面积 S.

8 已知$\triangle ABC$ 的顶点 $A(0, 0)$、$B(4, 8)$、$C(6, -4)$,点 M 内分 AB 所成的比是 3,点 P 是 AC 边上的一个点,且$\triangle APM$ 的面积等于$\triangle ABC$ 面积的一半,求点 P 分 AC 所成的比λ.

9 在平面上三点 $A(-1, 0)$、$B(2, 4)$、$C(4, 5)$处分别放置质量为 3 g、4 g、5 g 的质点,求它们的质量中心.

10 在$\triangle ABC$ 的三边 BC、CA、AB 上分别取三点 D、E、F,使 $\frac{BD}{DC}=\frac{CE}{EA}=\frac{AF}{FB}$,求证:$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 有共同的重心.

2.3 适当选取坐标系

解析几何的基本思想是利用坐标方法把几何问题化为代数问题，通过代数问题的研究来解决几何问题.在运用这种方法时，目的在于得出所求问题的结果，至于坐标系的选择则完全是人为的.但是，适当选取坐标系也很重要.如果坐标系选取适当，研究起来就比较简便.

下面通过举例，初步得出如何适当选取坐标系的一些规律.

例 1 已知 $ABCDEF$ 是边长为 a 的正六边形，求各顶点的坐标.

解 首先建立坐标系.关于这个问题，坐标系的选择大致有以下三种方法：

1. 将正六边形的中心作为坐标原点 O，过 O 点且和正六边形一边平行的直线作为 x 轴，过 O 点且和 x 轴垂直的直线作为 y 轴，建立坐标系如图 2.20(1).

2. 将正六边形的一个顶点作为坐标原点 O，过 O 点的正六边形的一边所在直线作为 x 轴，过 O 点且和 x 轴垂直的直线作为 y 轴，建立坐标系如图 2.20(2).

3. 将正六边形的一边作为 x 轴，过这一边的中点且与 x 轴垂直的直线作为 y 轴，建立坐标系如图 2.20(3).

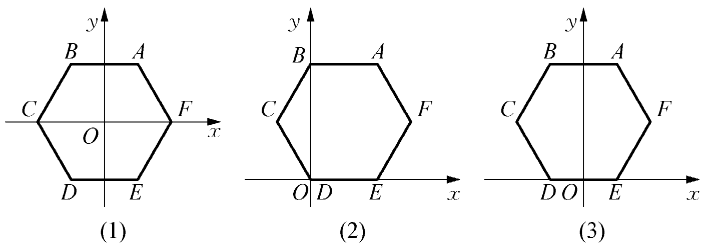

图 2.20

在坐标系(1)中，关键在于求出 A 点的坐标，然后根据对称性，可不经计算直接求得点 B、D、E 的坐标.现过 A 点作 OF 的垂线且和 OF 相交于一点 G，点 G 即为 OF 的中点.又因为正六边形的顶心距即外接圆半径等于它的边长.所以 $OG=GF=\frac{a}{2}$，$AG=\sqrt{AF^2-GF^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

所以 $A\left(\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$B\left(-\frac{a}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$D\left(-\frac{a}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，$E\left(\frac{a}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

图书在版编目(CIP)数据

数学奥林匹克小丛书. 高中卷. 解析几何/刘鸿坤编著.
—3 版. —上海:华东师范大学出版社,2020
ISBN 978-7-5760-0028-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2020)第 037994 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)・高中卷
解析几何

编　　著　刘鸿坤
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　王小双
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　21
字　　数　373 千字
版　　次　2020 年 4 月第一版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5760-0028-3
定　　价　46.00 元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。