数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 9

Mathematical Olympiad Series

不等式的解题方法与技巧

熊 斌 苏 勇 编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的"催化剂",成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在IMO上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

目　录

1　证明不等式的基本方法　001

1.1　比较法　001
1.2　放缩法　004
1.3　分析法　009
1.4　待定系数法　012
1.5　标准化(归一法)　016
1.6　舒尔(Schur)不等式　020
1.7　赫尔德(Hölder)不等式　022
1.8　排序不等式　026
1.9　琴生(Jensen)不等式　031
习题 1　035

2　和式的恒等变换　039

习题 2　052

3　变量代换法　055

习题 3　067

4　反证法　069

习题 4　077

5　构造法　079

5.1　构造恒等式　079
5.2　构造函数　080
5.3　构造图形　085
5.4　构造对偶式　087
5.5　构造数列　088

5.6 构造辅助命题 089
5.7 构造例子(反例) 091
习题 5 093

6 局部不等式 096

习题 6 103

7 导数与弦线不等式 106

习题 7 111

8 数学归纳法与不等式证明 112

习题 8 125

9 不等式与多变量函数最值 128

9.1 累次求最值法 128
9.2 磨光变换法 132
9.3 调整法 138
习题 9 141

10 一些特殊的证明方法和技巧 143

10.1 断开求和法 143
10.2 枚举法 147
10.3 加“序”条件 150
10.4 一些非“对称”不等式的处理方法 152
习题 10 157

习题解答 160

1 证明不等式的基本方法

现实世界中的量,相等是局部的、相对的,而不等则是普遍的、绝对的,不等式的本质是研究“数量关系”中的“不等关系”.

对于两个量,我们常常要比较它们之间的大小,或者证明一个量大于另一个量,这就是不等式的证明. 不等式的证明因题而异,灵活多变,常常要用到一些基本的不等式,如平均不等式、柯西不等式等,其中还需用到一些技巧性高的代数变形. 本节将介绍证明不等式的一些最基本的方法.

1.1 比 较 法

比较法一般有两种形式:

(1) 差值比较:欲证 $A\geqslant B$,只需证 $A-B\geqslant 0$;

(2) 商值比较:若 $B>0$,欲证 $A\geqslant B$,只需证$\dfrac{A}{B}\geqslant 1$.

在用比较法时,常常需要对式子进行适当变形,如因式分解、拆项、合并项等.

例 1 设 a、b、c 是正实数,求证:

$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geqslant a+b+c.$$

证明 上式左边$-$右边

$$\begin{aligned}
&=\frac{a^2+bc}{b+c}-a+\frac{b^2+ca}{c+a}-b+\frac{c^2+ab}{a+b}-c\\
&=\frac{a^2+bc-ab-ac}{b+c}+\frac{b^2+ca-bc-ba}{c+a}+\frac{c^2+ab-ca-cb}{a+b}\\
&=\frac{(a-b)(a-c)}{b+c}+\frac{(b-c)(b-a)}{c+a}+\frac{(c-a)(c-b)}{a+b}\\
&=\frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)+(b^2-c^2)(b^2-a^2)+(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{(b+c)(c+a)(a+b)}
\end{aligned}$$

$$=\frac{a^4+b^4+c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

$$=\frac{(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}\geqslant 0,$$

所以
$$\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geqslant a+b+c.$$

例 2 实数 x、y、z 满足 $xy+yz+zx=-1$，求证：$x^2+5y^2+8z^2\geqslant 4$.

证明 因为
$$\begin{aligned}&x^2+5y^2+8z^2-4\\=&x^2+5y^2+8z^2+4(xy+yz+zx)\\=&(x+2y+2z)^2+(y-2z)^2\geqslant 0,\end{aligned}$$

所以
$$x^2+5y^2+8z^2\geqslant 4.$$

说明 本题的拆项配方，有一定的技巧，需要有较强的观察能力.

例 3 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，试证：对任意实数 x、y、z，有：

$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2\\\geqslant&2\sqrt{\frac{abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\left(\sqrt{\frac{a+b}{c}}xy+\sqrt{\frac{b+c}{a}}yz+\sqrt{\frac{c+a}{b}}zx\right).\end{aligned}$$

并指出等号成立的充要条件.

分析 熟知
$$\begin{aligned}&x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\=&\frac{1}{2}[(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\geqslant 0,\end{aligned}$$

我们用类似的方法证明本题.

证明 上式左边－右边

$$\begin{aligned}=&\left[\frac{b}{b+c}x^2+\frac{a}{c+a}y^2-2\sqrt{\frac{ab}{(b+c)(c+a)}}xy\right]\\&+\left[\frac{c}{c+a}y^2+\frac{b}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{bc}{(c+a)(a+b)}}yz\right]\\&+\left[\frac{c}{b+c}x^2+\frac{a}{a+b}z^2-2\sqrt{\frac{ca}{(b+c)(a+b)}}xz\right]\\=&\sum_{\text{cyc}}ab\left[\frac{x}{\sqrt{a(b+c)}}-\frac{y}{\sqrt{b(c+a)}}\right]^2\end{aligned}$$

$\geqslant 0$（这里 $\sum\limits_{\text{cyc}}$ 表示循环和号），

故原不等式成立.

例 4 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，求证：$a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$.

证明 由于不等式是关于 a、b、c 对称的，不妨设 $a\geqslant b\geqslant c$，于是

$$\frac{a^{2a}b^{2b}c^{2c}}{a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{a-b}\left(\frac{b}{c}\right)^{b-c}\left(\frac{a}{c}\right)^{a-c}\geqslant 1,$$

所以
$$a^{2a}b^{2b}c^{2c}\geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}.$$

说明 由本题的结论得

$$a^{3a}b^{3b}c^{3c}\geqslant a^{a+b+c}b^{a+b+c}c^{a+b+c},$$

即
$$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

一般地，设 $x_i\in\mathbf{R}_+$，$i=1,2,\cdots,n$，则有

$$x_1^{x_1}\cdot x_2^{x_2}\cdot\cdots\cdot x_n^{x_n}\geqslant(x_1x_2\cdots x_n)^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}},$$

证法与本例完全一样.

例 5 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，$a^2+b^2+c^2=1$，求

$$S=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}$$

的最小值.

解 当 $a=b=c$ 时，$S=3$. 猜测：$S\geqslant 3$.

事实上，

$$\begin{aligned}S-3&=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}-3-\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}\\&=\frac{a^2+b^2+c^2}{a^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{b^2}+\frac{a^2+b^2+c^2}{c^2}-3-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\&=a^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)+b^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)-2\left(\frac{a^2}{bc}+\frac{b^2}{ca}+\frac{c^2}{ab}\right)\\&=a^2\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+b^2\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2+c^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

综上所述，S 的最小值为 3.

说明 先猜后证是处理许多最值问题的有效手段. 猜，一猜答案，二猜等号成立的条件；证明的时候要注意等号是否能取到.

1.2 放缩法

有时我们直接证明不等式 $A \leqslant B$ 比较困难，可以试着去找一个中间量 C，如果有 $A \leqslant C$ 及 $C \leqslant B$ 同时成立，自然就有 $A \leqslant B$ 成立. 所谓“放缩”即将 A 放大到 C，再把 C 放大到 B 或者反过来把 B 缩小到 C 再缩小到 A. 不等式证明的技巧，常体现在对放缩尺度的把握上.

例 6 设 x_1、x_2、x_3 是非负实数，满足 $x_1+x_2+x_3=1$，求

$$(x_1+3x_2+5x_3)\left(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5}\right)$$

的最小值和最大值.（2017 年全国高中数学联赛）

解析 由柯西不等式

$$\begin{aligned}
&(x_1+3x_2+5x_3)\left(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5}\right)\\
\geqslant&\left(\sqrt{x_1}\cdot\sqrt{x_1}+\sqrt{3x_2}\cdot\sqrt{\frac{x_2}{3}}+\sqrt{5x_3}\cdot\sqrt{\frac{x_3}{5}}\right)^2\\
=&(x_1+x_2+x_3)^2=1,
\end{aligned}$$

当 $x_1=1$，$x_2=0$，$x_3=0$ 时，不等式等号成立，故欲求的最小值为 1.

因为

$$\begin{aligned}
&(x_1+3x_2+5x_3)\left(x_1+\frac{x_2}{3}+\frac{x_3}{5}\right)\\
=&\frac{1}{5}(x_1+3x_2+5x_3)\left(5x_1+\frac{5x_2}{3}+x_3\right)\\
\leqslant&\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{4}\left[(x_1+3x_2+5x_3)+\left(5x_1+\frac{5x_2}{3}+x_3\right)\right]^2\\
=&\frac{1}{20}\left(6x_1+\frac{14}{3}x_2+6x_3\right)^2\\
\leqslant&\frac{1}{20}(6x_1+6x_2+6x_3)^2\\
=&\frac{9}{5},
\end{aligned}$$

当 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=0$，$x_3=\frac{1}{2}$ 时，不等式等号成立，故欲求的最大值为 $\frac{9}{5}$.

例 7 求证：对任意正实数 a、b、c，均有

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

证明 因为 $a^3+b^3=(a+b)(a^2+b^2-ab)\geqslant(a+b)ab$，

所以 $$\frac{1}{a^3+b^3+abc}\leqslant\frac{1}{ab(a+b)+abc}=\frac{c}{abc(a+b+c)},$$

同理可得 $$\frac{1}{b^3+c^3+abc}\leqslant\frac{a}{abc(a+b+c)},$$

$$\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{b}{abc(a+b+c)},$$

把上面三式相加，便得

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leqslant\frac{1}{abc}.$$

说明 在处理分式不等式时，通分只有在不得已的情况下才进行，若想变为同分母比较简便的一种思想就是“放缩”.

例 8 设 $a_i\geqslant 1(i=1, 2, \cdots, n)$，求证：

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\geqslant\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).$$

分析 观察两边的式子，首先要设法让左边“变出”2^n.

证明

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)=2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}\right)\left(1+\frac{a_2-1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n-1}{2}\right).$$

由于 $a_i-1\geqslant 0$，可得：

$$\begin{aligned}&(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n)\\\geqslant&2^n\left(1+\frac{a_1-1}{2}+\frac{a_2-1}{2}+\cdots+\frac{a_n-1}{2}\right)\\\geqslant&2^n\left(1+\frac{a_1-1}{n+1}+\frac{a_2-1}{n+1}+\cdots+\frac{a_n-1}{n+1}\right)\\=&\frac{2^n}{n+1}[n+1+(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)]\\=&\frac{2^n}{n+1}(1+a_1+a_2+\cdots+a_n).\end{aligned}$$

故原不等式成立.

例 9 求最大的实数 α,使得 $\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>\alpha$ 对所有正实数 x、y、z 成立.

解法 1 令 $x=y$, $z\to 0$,则原式左端 $\to 2$,因此,若 $\alpha>2$,将出现矛盾,故 $\alpha\leqslant 2$.

下面证明:$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>2$.

不妨设 $x\leqslant y\leqslant z$, 我们设法证明

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

将 $\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}$、$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 移到右边,即证

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}-y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{\sqrt{x^2+z^2}-z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

也即

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}>\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+y^2}+y\right)}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}\left(\sqrt{x^2+z^2}+z\right)}.$$

两边约去 x,并且由于 $\sqrt{x^2+y^2}+y>2y$, $\sqrt{x^2+z^2}+z>2z$, 所以只要证明

$$\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\geqslant\frac{x}{2y\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{x}{2z\sqrt{x^2+y^2}}.$$

由于 $\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{z}{x}\right)^2}}$,所以 $\frac{x}{\sqrt{x^2+z^2}}$ 随 x 的增大而增大.

同样,$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 也随 x 的增大而增大.

所以我们只须考虑 $x=y$ 时的情况.

令 $x=y$, 即证

$$\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2}}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}z},$$

也就是 $\dfrac{1}{2\sqrt{y^2+z^2}} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}z}$，即证$\sqrt{2}z \geqslant \sqrt{y^2+z^2}$.

这是显然成立的. 因此，

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+z^2}}+\frac{\sqrt{x^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\geqslant 2.$$

故 $\alpha_{\max}=2$.

说明 本题也可利用待定系数法给出解答.

解法 2 同样，我们来证明

$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}+\frac{y}{\sqrt{z^2+x^2}}+\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}>2.$$

设
$$\frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} \geqslant \frac{2x^a}{x^a+y^a+z^a}. \quad ①$$

其中 a 为待定参数.

注意到①等价于 $(x^a+y^a+z^a)^2 \geqslant 4x^{2a-2}(y^2+z^2)$.

上式左边 $\geqslant 4x^a(y^a+z^a)$，故只须保证 $y^a+z^a \geqslant x^{a-2}(y^2+z^2)$.

不难发现，取 $a=2$ 即可. 于是

$$\sum \frac{x}{\sqrt{y^2+z^2}} \geqslant \sum \frac{2x^2}{x^2+y^2+z^2}=2.$$

而等号显然不可能成立，所以 $\sum \dfrac{x}{\sqrt{y^2+z^2}}>2$.

故 $\alpha_{\max}=2$.

例 10 设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 同时满足以下条件：

(1) $\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i+b_i)=1$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}i(a_i-b_i)=0$；

(3) $\sum\limits_{i=1}^{n}i^2(a_i+b_i)=10$.

求证：对任意 $1 \leqslant k \leqslant n$，都有 $\max\{a_k, b_k\} \leqslant \dfrac{10}{10+k^2}$.

（2010 年中国西部数学奥林匹克）

证明 对任意 $1 \leqslant k \leqslant n$，有

$$\begin{aligned}(ka_k)^2 &\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} ia_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} i^2 b_i\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) \\ &= \left(10 - \sum_{i=1}^{n} i^2 a_i\right) \cdot \left(1 - \sum_{i=1}^{n} a_i\right) \\ &\leqslant (10 - k^2 a_k) \cdot (1 - a_k) \\ &= 10 - (10 + k^2) a_k + k^2 a_k^2,\end{aligned}$$

从而 $a_k \leqslant \dfrac{10}{10+k^2}$.

同理有 $b_k \leqslant \dfrac{10}{10+k^2}$，所以 $\max\{a_k, b_k\} \leqslant \dfrac{10}{10+k^2}$.

例 11 正实数 x、y、z 满足 $xyz \geqslant 1$，证明

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

（2005 年国际数学奥林匹克）

证明 原不等式可变形为

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leqslant 3.$$

由柯西不等式及题设条件 $xyz \geqslant 1$，得

$$\begin{aligned}&(x^5 + y^2 + z^2)(yz + y^2 + z^2) \\ \geqslant &(x^2 (xyz)^{\frac{1}{2}} + y^2 + z^2)^2 \\ \geqslant &(x^2 + y^2 + z^2)^2,\end{aligned}$$

即
$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} \leqslant \frac{yz + y^2 + z^2}{x^2 + y^2 + z^2}.$$

同理
$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} \leqslant \frac{zx + z^2 + x^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leqslant \frac{xy + x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + z^2},$$

把上面三个不等式相加，并利用 $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx$，得

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \leqslant 2 + \frac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2} \leqslant 3.$$

摩尔多瓦选手 Boreico Iurie 的解法获得了特别奖. 他的证法如下：

因为

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\geqslant 0,$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}&\geqslant\sum_{\text{cyc}}\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}\\&=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum_{\text{cyc}}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)\\&\geqslant\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum_{\text{cyc}}(x^2-yz)(\text{因为 } xyz\geqslant 1)\\&\geqslant 0.\end{aligned}$$

1.3 分析法

所谓分析法就是先假定要证的不等式成立，然后由它出发推出一系列与之等价的不等式(即要求推理过程的每一步都可逆)，直到得到一个较容易证明的不等式或者一个明显成立的不等式. 分析法是一种执果索因的证明方法，在寻求证明思路时尤为有效.

例 12 若 $x,\ y\in\mathbf{R},\ y\geqslant 0$，且 $y(y+1)\leqslant(x+1)^2$，求证：$y(y-1)\leqslant x^2$.

证明 若 $0\leqslant y\leqslant 1$，则 $y(y-1)\leqslant 0\leqslant x^2$.

若 $y>1$，由题设知 $y(y+1)\leqslant(x+1)^2$，

$$y\leqslant\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}.$$

要证明 $y(y-1)\leqslant x^2$，即只需证明

$$\sqrt{(x+1)^2+\frac{1}{4}}-\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\qquad(x+1)^2+\frac{1}{4}\leqslant x^2+\frac{1}{4}+2\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}+1$$

$$\Leftrightarrow\qquad 2x\leqslant 2\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}.$$

最后这个不等式是显然的，从而原不等式得证.

例 13 设 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$，求证：

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc} \geqslant a+b-2\sqrt{ab}.$$

证明 注意到

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc} \geqslant a+b-2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \qquad c+2\sqrt{ab} \geqslant 3\sqrt[3]{abc}.$$

因为

$$\begin{aligned} c+2\sqrt{ab} &= c+\sqrt{ab}+\sqrt{ab} \\ &\geqslant 3\sqrt[3]{c\sqrt{ab}\sqrt{ab}} \\ &= 3\sqrt[3]{abc}, \end{aligned}$$

从而

$$a+b+c-3\sqrt[3]{abc} \geqslant a+b-2\sqrt{ab}.$$

说明 在不等式的证明中，分析法和综合法有时需交替使用. 本题在用分析法得到 $c+2\sqrt{ab} \geqslant 3\sqrt[3]{abc}$，再用分析法继续证明下去的话，会使问题变得复杂，此时结合综合法便使问题迎刃而解了.

例 14 已知 $n \in \mathbf{N}_+$，求证：

$$\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) \geqslant \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \qquad ①$$

证明 要证明①，我们只要证

$$n\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) \geqslant (n+1)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \qquad ②$$

②的左边为

$$\frac{n}{2}+\frac{n}{2}+n\left(\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right), \qquad ③$$

②的右边为

$$\begin{aligned} & n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right) \\ =& \frac{n}{2}+n\left(\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right). \qquad ④ \end{aligned}$$

比较③式和④式，若有

$$\frac{n}{2} \geqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}, \qquad ⑤$$

及

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1} \geqslant \frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}, \qquad ⑥$$

则②得证. 而⑤、⑥两式显然成立，因此①得证.

例 15 已知 $a, b, c \in \mathbf{R}_+$，$abc=1$. 求证：

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 4(a+b+c-1).$$

分析 想法是把 a 当作参数，将其看成是关于 $b+c$ 的一元二次方程，用判别式的方法来证明.

证明 不妨设 $a \geqslant 1$，则原不等式等价于

$$a^2(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6 \geqslant 4(a+b+c), \tag{①}$$

即

$$(a^2-1)(b+c)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6 \geqslant 4a+3(b+c).$$

由于 $$(a+1)(b+c) \geqslant 2\sqrt{a} \cdot 2\sqrt{bc}=4,$$

所以如果我们能够证明

$$4(a-1)+b^2(c+a)+c^2(a+b)+6 \geqslant 4a+3(b+c), \tag{②}$$

则①式成立.

而②等价于

$$2+a(b^2+c^2)+bc(b+c)-3(b+c) \geqslant 0,$$

故只需证 $$\frac{a}{2}(b+c)^2+(bc-3)(b+c)+2 \geqslant 0.$$

记 $$f(x)=\frac{a}{2} \cdot x^2+(bc-3)x+2,$$

则其判别式 $$\Delta=(bc-3)^2-4a.$$

我们只要证明 $\Delta \leqslant 0$ 即可，这相当于

$$\left(\frac{1}{a}-3\right)^2-4a \leqslant 0,$$

即 $$1-6a+9a^2-4a^3 \leqslant 0,$$

也即 $$(a-1)^2(4a-1) \geqslant 0. \tag{③}$$

由 $a \geqslant 1$，③显然成立，进而①成立.

由上知等号在 $a=b=c=1$ 时成立.

1.4 待定系数法

引入适当的参数,根据题中式子的特点,将参数确定,从而使不等式获得证明.

例 16 设 x、y、z 是 3 个不全为零的实数,求$\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$的最大值.

分析 欲求 $\dfrac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值,只需先证明存在一个常数 c,使

$$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant c, \quad ①$$

且 x、y、z 取某组数时,等号成立.

①式可化为 $x^2+y^2+z^2\geqslant\dfrac{1}{c}(xy+2yz)$. 由于右边两项为 xy 和 $2yz$,所以左边的 y^2 需拆成两项 αy^2 和$(1-\alpha)y^2$. 由

$$x^2+\alpha y^2\geqslant 2\sqrt{\alpha}xy,$$
$$(1-\alpha)y^2+z^2\geqslant 2\sqrt{1-\alpha}yz,$$

又由 $\dfrac{2\sqrt{1-\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}=2$,得 $\alpha=\dfrac{1}{5}$.

从而
$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz).$$

解 因为
$$x^2+\frac{1}{5}y^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}xy,$$
$$\frac{4}{5}y^2+z^2\geqslant\frac{4}{\sqrt{5}}yz,$$

所以
$$x^2+y^2+z^2\geqslant\frac{2}{\sqrt{5}}(xy+2yz),$$

即
$$\frac{xy+2yz}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

当 $x=1$, $y=\sqrt{5}$, $z=2$ 时,等号成立.

所以,欲求的最大值为$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

例 17 对于 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$，求 $(1+x)^5(1-x)(1-2x)^2$ 的最大值.

解析 我们考虑 $[\alpha(1+x)]^5[\beta(1-x)][\gamma(2x-1)]^2$ 的最大值，这里 α、β、γ 是正整数，满足 $5\alpha-\beta+4\gamma=0$，$\alpha(1+x)=\beta(1-x)=\gamma(2x-1)$. 后者即

$$\frac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}=\frac{\beta+\gamma}{2\gamma+\beta},$$

代入 $\beta=5\alpha+4\gamma$，得

$$0=2(3\alpha\gamma+5\alpha^2-2\gamma^2)=2(5\alpha-2\gamma)(\alpha+\gamma),$$

我们取 $(\alpha,\beta,\gamma)=(2,30,5)$，由平均不等式得，

$$[2(1+x)]^5[30(1-x)][5(2x-1)]^2\leqslant\left(\frac{15}{4}\right)^8,$$

此时 $x=\frac{7}{8}$. 所以，当 $x=\frac{7}{8}$ 时，$(1+x)^5(1-x)(1-2x)^2$ 的最大值为 $\frac{3^7\times 5^5}{2^{22}}$.

例 18（Ostrowski） 设实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 与 $b_1,b_2,\cdots,b_n$ 不成比例. 实数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 满足：

$$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0,\\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=1.\end{cases}$$

求证：$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\geqslant\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2}$.

证法 1 设 $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\alpha\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}a_ix_i+\beta\left(\sum\limits_{i=1}^{n}b_ix_i-1\right)$，其中 α、β 为待定系数. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}x_i^2&=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i+\frac{\alpha a_i+\beta b_i}{2}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\alpha a_i+\beta b_i)^2}{4}-\beta\\&\geqslant-\sum_{i=1}^{n}\frac{(\alpha a_i+\beta b_i)^2}{4}-\beta.\end{aligned}$$

上述不等式等号成立，当且仅当

$$x_i=-\frac{\alpha a_i+\beta b_i}{2}\ (i=1,2,\cdots,n). \quad ①$$

将①式代回 $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0$ 及 $\sum_{i=1}^{n} b_i x_i = 1$ 中，有：

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}\alpha A - \dfrac{1}{2}\beta C = 0, \\ -\dfrac{1}{2}\alpha C - \dfrac{1}{2}\beta B = 1. \end{cases}$$

其中，$A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$，$B = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$，$C = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$. 因此，

$$\alpha = \frac{2C}{AB - C^2}, \beta = -\frac{2A}{AB - C^2}.$$

故

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha a_i + \beta b_i}{2}\right)^2 - \beta = \frac{A}{AB - C^2}.$$

说明 1　本题还有下列两种证明方法，供读者参考：

证法 2　由柯西不等式可得，对任意 $t \in \mathbf{R}$，

$$\left[\sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i)^2\right] \cdot (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (a_i t + b_i) x_i\right]^2 = 1,$$

即
$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)(At^2 + 2Ct + B) - 1 \geqslant 0$$

恒成立.

由判别式(关于 t 的) $\Delta \leqslant 0$，即有：

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{A}{AB - C^2}.$$

证法 3　(综合运用上述两种方法)

由条件，对任意 $\lambda \in \mathbf{R}$，有 $\sum_{i=1}^{n} (b_i - \lambda a_i) x_i = 1$.

利用柯西不等式可得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (b_i - \lambda a_i)^2 \geqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (b_i - \lambda a_i) x_i\right]^2 = 1.$$

所以
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{1}{B + \lambda^2 A - 2\lambda C}.$$

我们的目标是证明

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geqslant \frac{1}{B-\dfrac{C^2}{A}},$$

因此，只需 $$\lambda^2 A - 2\lambda C \leqslant -\frac{C^2}{A}.$$

即 $$\lambda^2 A^2 - 2\lambda AC + C^2 \leqslant 0.$$

取 $\lambda = \dfrac{C}{A}$ 即可满足上述条件.

说明 2 可以从本题证明 Fan-Todd 定理：

设 a_k、b_k（$k=1, 2, \cdots, n$）为两组不成比例的实数列，已知 $a_i b_k \neq a_k b_i$（$i \neq k$），则

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2} \leqslant (\mathrm{C}_n^2)^{-2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i \neq k} \frac{a_k}{a_i b_k - a_k b_i} \right)^2.$$

证明 只需在本题中令 $x_k = (\mathrm{C}_n^2)^{-1} \cdot \sum\limits_{r \neq k} \dfrac{a_r}{a_r b_k - a_k b_r}$，读者不难自行验证 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 满足全部条件.

例 19 求函数 $f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \dfrac{x_1}{(1+x_1+\cdots+x_n)^2} + \dfrac{x_2}{(1+x_2+\cdots+x_n)^2} + \cdots + \dfrac{x_n}{(1+x_n)^2}$ 的最大值 m_n（其中 $x_i \geqslant 0$）. 用 m_{n-1} 表示 m_n，并求 $\lim\limits_{n\to\infty} m_n$.

分析 f_n 的每一项分母都很复杂，自然应先作代换将其简化.

解 令 $a_i = \dfrac{1}{1+x_i+\cdots+x_n}$，$1 \leqslant i \leqslant n$，并约定 $a_{n+1} = 1$. 则

$$1 + x_i + x_{i+1} + \cdots + x_n = \frac{1}{a_i}.$$

又 $$1 + x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_n = \frac{1}{a_{i+1}},$$

故 $$x_i = \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}.$$

因此 $$f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \left(\frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}} \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{a_i^2}{a_{i+1}} \right)$$

$$=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-\left(\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{1}\right).$$

为求 f_n 之最大值，构造下列不等式：

$$\begin{cases}\dfrac{a_1^2}{a_2}+\lambda_1^2a_2\geqslant 2\lambda_1a_1,\\ \dfrac{a_2^2}{a_3}+\lambda_2^2a_3\geqslant 2\lambda_2a_2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{a_n^2}{1}+\lambda_n^2\geqslant 2\lambda_na_n.\end{cases} \quad ①$$

其中 λ_1，λ_2，…，λ_n 为参数，$\lambda_i\geqslant 0$.

将①中 n 个不等式相加，只须使

$$\begin{cases}2\lambda_1=1,\\ 2\lambda_2=1+\lambda_1^2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ 2\lambda_n=1+\lambda_{n-1}^2.\end{cases} \quad ②$$

即有 $f_n\leqslant\lambda_n^2$.

注意到 $\lambda_i\geqslant\lambda_{i-1}$，且 $0\leqslant\lambda_i\leqslant 1$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n$ 存在，易见它的值为 1.

1.5 标准化(归一化)

当不等式为齐次式的时候，常可设变量之和为 k（某个常数），这样不仅简化了式子，而且增加了条件，有助于我们解决问题.

例 20 设 a、b、c 是正实数，求证：

$$\frac{(2a+b+c)^2}{2a^2+(b+c)^2}+\frac{(2b+c+a)^2}{2b^2+(c+a)^2}+\frac{(2c+a+b)^2}{2c^2+(a+b)^2}\leqslant 8.$$

证明 因为左边的式子是齐次的，所以不妨设 $a+b+c=3$，于是只需证明

$$\frac{(a+3)^2}{2a^2+(3-a)^2}+\frac{(b+3)^2}{2b^2+(3-b)^2}+\frac{(c+3)^2}{2c^2+(3-c)^2}\leqslant 8.$$

令 $$f(x)=\frac{(x+3)^2}{2x^2+(3-x)^2},\ x\in\mathbf{R}_+.$$

则
$$f(x)=\frac{x^2+6x+9}{3(x^2-2x+3)}=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8x+6}{x^2-2x+3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(1+\frac{8x+6}{(x-1)^2+2}\right)$$
$$\leqslant\frac{1}{3}\left(1+\frac{8x+6}{2}\right)=\frac{1}{3}(4x+4),$$

所以
$$f(a)+f(b)+f(c)\leqslant\frac{1}{3}(4a+4+4b+4+4c+4)=8.$$

例 21 已知 $a+b+c>0$，$ax^2+bx+c=0$ 有实根，求证：
$$4\min\{a,b,c\}\leqslant a+b+c\leqslant\frac{9}{4}\max\{a,b,c\}.$$

证明 不妨设 $a+b+c=1$，否则可用 $\frac{a}{a+b+c}$、$\frac{b}{a+b+c}$、$\frac{c}{a+b+c}$ 代替 a、b、c.

先证明：$\max\{a,b,c\}\geqslant\frac{4}{9}$.

(1) 若 $b\geqslant\frac{4}{9}$，则结论成立.

(2) 若 $b<\frac{4}{9}$，因为 $b^2\geqslant 4ac$，有 $ac<\frac{4}{81}$.

又 $a+c=1-b>\frac{5}{9}$，所以如果 $a<0$ 或 $c<0$，即有 $c>\frac{5}{9}$ 或 $a>\frac{5}{9}$，结论成立.

如果 $a,c\geqslant 0$，则 $\left(\frac{5}{9}-c\right)\cdot c<ac<\frac{4}{81}$，得 $c<\frac{1}{9}$ 或 $c>\frac{4}{9}$.

若 $c<\frac{1}{9}$，此时 $a>\frac{4}{9}$，故结论成立.

再证明：$\min\{a,b,c\}\leqslant\frac{1}{4}$.

(1) 若 $a\leqslant\frac{1}{4}$，则无须证明.

(2) 若 $a>\frac{1}{4}$，则有 $b^2\geqslant 4ac>c$，$b+c=1-a<\frac{3}{4}$.

不妨设 $c\geqslant 0$（否则 $c<0$，结论已得），故 $\sqrt{c}+c\leqslant b+c<\frac{3}{4}$，于是

$$\left(\sqrt{c}+\frac{3}{4}\right)\left(\sqrt{c}-\frac{1}{2}\right)<0.$$

因此 $c<\frac{1}{4}$，结论成立.

说明　本题的结论是最佳的.

方程 $\frac{4}{9}x^2+\frac{4}{9}x+\frac{1}{9}=0$ 表明 $\frac{9}{4}$ 不能改为更小的数；而方程 $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{4}x+\frac{1}{4}=0$ 表明 4 不能改为更大的数.

例 22　给定正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$. 证明：存在正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，满足 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$，且对任何满足 $\sum_{i=1}^{n}y_i=1$ 的正实数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，均有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i}{x_i+y_i}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i.$$

证明　令 $x_i=\frac{a_i}{\sum_{i=1}^{n}a_i}$，则 $\sum_{i=1}^{n}x_i=1$. 将 x_i 代入不等式左端，得

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i}{x_i+y_i}=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+y_i}.$$

对任何正实数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$，$\sum_{i=1}^{n}y_i=1$，由柯西不等式可知

$$2\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+y_i}=\sum_{i=1}^{n}(x_i+y_i)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+y_i}\geqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2=1,$$

于是

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{a_ix_i}{x_i+y_i}=\sum_{i=1}^{n}a_i\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{x_i+y_i}\geqslant\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}a_i,$$

命题得证.

例 23　给定整数 $n\geqslant 4$，对任意满足

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n>0$$

的非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$，求 $\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i(a_i+b_i)}{\sum_{i=1}^{n}b_i(a_i+b_i)}$ 的最大值.

（2011 年中国数学奥林匹克）

解析　由齐次性可知,不妨假设 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=\sum\limits_{i=1}^{n} b_i=1$. 首先,当 $a_1=1$, $a_2=a_3=\cdots=a_n=0$, $b_1=0$, $b_2=b_3=\cdots=b_n=\dfrac{1}{n-1}$ 时,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)=1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)=\frac{1}{n-1},$$

故

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)}=n-1.$$

下证对任意满足 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i=\sum\limits_{i=1}^{n} b_i=1$ 的 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_n$, 都有

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i)}\leqslant n-1.$$

由于分母是正数,故上式等价于

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(a_i+b_i)\leqslant (n-1)\sum_{i=1}^{n} b_i(a_i+b_i),$$

即

$$(n-1)\sum_{i=1}^{n} b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\geqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2.$$

由对称性,不妨设 b_1 是 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 中最小的一个,则有

$$\begin{aligned}
&(n-1)\sum_{i=1}^{n} b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\\
\geqslant{}&(n-1)b_1^2+(n-1)\sum_{i=2}^{n} b_i^2+(n-2)\sum_{i=1}^{n} a_ib_1\\
\geqslant{}&(n-1)b_1^2+\Big(\sum_{i=2}^{n} b_i\Big)^2+(n-2)b_1\\
={}&(n-1)b_1^2+(1-b_1)^2+(n-2)b_1
\end{aligned}$$

$$=nb_1^2+(n-4)b_1+1$$
$$\geqslant 1=\sum_{i=1}^{n}a_i\geqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2,$$

所以,所求的最大值为 $n-1$.

1.6 舒尔(Schur)不等式

舒尔不等式 设 $x, y, z\in\mathbf{R}_+$,则

$$x(x-y)(x-z)+y(y-z)(y-x)+z(z-x)(z-y)\geqslant 0 \qquad ①$$

(即:$\sum\limits_{\text{cyc}}[x(x-y)(x-z)]\geqslant 0$).

一般地,舒尔不等式为:设 $x, y, z\geqslant 0, r>0$,则

$$\sum_{\text{cyc}}x^r(x-y)(x-z)\geqslant 0. \qquad ②$$

证明 不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,则

$$\begin{aligned}\text{左边}&\geqslant x^r(x-y)(x-z)-y^r(x-y)(y-z)\\&\geqslant y^r(x-y)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

舒尔不等式的如下两个变形形式在解题中非常有用:

变形Ⅰ $\qquad \sum\limits_{\text{cyc}}x^3-\sum\limits_{\text{cyc}}[x^2(y+z)]+3xyz\geqslant 0.$

变形Ⅱ $\qquad \left(\sum\limits_{\text{cyc}}x\right)^3-4\left(\sum\limits_{\text{cyc}}x\right)\left(\sum\limits_{\text{cyc}}yz\right)+9xyz\geqslant 0.$

事实上,把①展开即得变形Ⅰ,因为

$$\left(\sum_{\text{cyc}}x\right)^3=\sum_{\text{cyc}}x^3+3\sum_{\text{cyc}}[x^2(y+z)]+6xyz,$$

代入变形Ⅰ,得

$$\left(\sum_{\text{cyc}}x\right)^3-3\sum_{\text{cyc}}[x^2(y+z)]-6xyz-\sum_{\text{cyc}}[x^2(y+z)]+3xyz\geqslant 0,$$
$$\left(\sum_{\text{cyc}}x\right)^3-4\sum_{\text{cyc}}[x^2(y+z)]-3xyz\geqslant 0,$$

所以 $\qquad \left(\sum\limits_{\text{cyc}}x\right)^3-4\left(\sum\limits_{\text{cyc}}x\right)\left(\sum\limits_{\text{cyc}}yz\right)+9xyz\geqslant 0.$

例 24 证明:在$\triangle ABC$中,有

$$\sum_{\text{cyc}} a^3 - 2\sum_{\text{cyc}} a^2(b+c) + 9abc \leqslant 0.$$

证明 令 $x=\dfrac{b+c-a}{2}$，$y=\dfrac{c+a-b}{2}$，$z=\dfrac{a+b-c}{2}$，则由舒尔不等式可得

$$\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{b+c-a}{2}\right)(b-a)(c-a) \geqslant 0,$$

$$\sum_{\text{cyc}}(a-b)(a-c)(b+c-a) \geqslant 0,$$

$$-\sum_{\text{cyc}} a^3 + 2\sum_{\text{cyc}} a^2(b+c) - 9abc \geqslant 0,$$

所以 $$\sum_{\text{cyc}} a^3 - 2\sum_{\text{cyc}} a^2(b+c) + 9abc \leqslant 0.$$

例 25 设 $x, y, z \geqslant 0$，且 $x+y+z=1$，求证：

$$0 \leqslant yz+zx+xy-2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

证明 由舒尔不等式的变形Ⅱ，得

$$\left(\sum_{\text{cyc}} x\right)^3 - 4\left(\sum_{\text{cyc}} x\right)\left(\sum_{\text{cyc}} yz\right) + 9xyz \geqslant 0,$$

由题设条件 $\sum\limits_{\text{cyc}} x = 1$，得

$$1 - 4\sum_{\text{cyc}} yz + 9xyz \geqslant 0,$$

$$\sum_{\text{cyc}} yz - 2xyz \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4}xyz \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \frac{7}{27}.$$

另一方面，$\sum\limits_{\text{cyc}} yz - 2xyz \geqslant \sum\limits_{\text{cyc}} yz - xy - yz = zx \geqslant 0.$

从而命题得证.

例 26 设 $x, y, z \in \mathbf{R}_+$，且 $x+y+z=xyz$，求证：

$$x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)+9 \geqslant 0. \qquad ③$$

证明 因为 $x+y+z=xyz$，所以③等价于

$$[x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)](x+y+z)+9xyz \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow x^3+y^3+z^3-(x^2y+y^2z+z^2x+xy^2+yz^2+zx^2)+3xyz \geqslant 0,$$

即
$$\sum_{\text{cyc}} x^3-\sum_{\text{cyc}} x^2(y+z)+3xyz\geqslant 0,$$
这就是舒尔不等式的变形Ⅰ. 故命题得证.

例 27 设 $a, b, c\in \mathbf{R}_+$，求证：
$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^2\geqslant 4\sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

证明 由舒尔不等式(在②中，令 $r=2$)，得
$$\sum_{\text{cyc}} x^2(x-y)(x-z)\geqslant 0,\ x, y, z\in \mathbf{R}_+,$$
所以
$$\sum_{\text{cyc}} x^4+xyz\sum_{\text{cyc}} x\geqslant \sum_{\text{cyc}} x^3(y+z).$$
又因为 $\sum_{\text{cyc}} x^3(y+z)=2\sum_{\text{cyc}} y^2z^2+\sum_{\text{cyc}} yz(y-z)^2\geqslant 2\sum_{\text{cyc}} y^2z^2$，
所以
$$\sum_{\text{cyc}} x^4+xyz\sum_{\text{cyc}} x\geqslant 2\sum_{\text{cyc}} y^2z^2. \tag{④}$$
在④式中，令 $x=\sqrt{a}$，$y=\sqrt{b}$，$z=\sqrt{c}$，得
$$\sum_{\text{cyc}} a^2+\sqrt{abc}\sum_{\text{cyc}}\sqrt{a}\geqslant 2\sum_{\text{cyc}} bc,$$
$$\sqrt{abc}\sum_{\text{cyc}}\sqrt{a}+(\sum_{\text{cyc}} a)^2\geqslant 4\sum_{\text{cyc}} bc.$$
下证
$$\sum_{\text{cyc}} bc\geqslant\sqrt{3abc(a+b+c)}.$$
事实上，由 $(u+v+w)^2\geqslant 3(uv+vw+wu)$，得
$$\begin{aligned}(ab+bc+ca)^2&\geqslant 3(ab\cdot bc+bc\cdot ca+ca\cdot ab)\\&=3abc(a+b+c),\end{aligned}$$
所以
$$\sum_{\text{cyc}} bc\geqslant\sqrt{3abc(a+b+c)},$$
故
$$\sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})+(a+b+c)^2\geqslant 4\sqrt{3abc(a+b+c)}.$$

1.7 赫尔德(Hölder)不等式

赫尔德不等式 设 $w_1, w_2, \cdots, w_n$ 是正实数，$w_1+w_2+\cdots+w_n=1$，对任意正实数 a_{ij}，有
$$(a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{1m})^{w_1}(a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{2m})^{w_2}\cdots(a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nm})^{w_n}$$

$$\geqslant a_{11}^{w_1}a_{21}^{w_2}\cdots a_{n1}^{w_n}+a_{12}^{w_1}a_{22}^{w_2}\cdots a_{n2}^{w_n}+\cdots+a_{1m}^{w_1}a_{2m}^{w_2}\cdots a_{nm}^{w_n}. \qquad ①$$

$\left(\text{即}\ \prod\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{m}a_{ij}\right)^{w_i}\geqslant\sum\limits_{j=1}^{m}\prod\limits_{i=1}^{n}a_{ij}^{w_i}.\right)$

证明 记 $A_\alpha=\sum\limits_{j=1}^{m}a_{\alpha j}(\alpha=1,2,\cdots,n)$，则①式为

$$(A_1^{w_1}A_2^{w_2}\cdots A_n^{w_n})^{-1}\sum_{j=1}^{m}a_{1j}^{w_1}a_{2j}^{w_2}\cdots a_{nj}^{w_n}\leqslant 1,$$

即
$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{a_{1j}}{A_1}\right)^{w_1}\left(\frac{a_{2j}}{A_2}\right)^{w_2}\cdots\left(\frac{a_{nj}}{A_n}\right)^{w_n}\leqslant 1.$$

因为 $f(x)=\ln x\ (x>0)$ 是向上凸函数(因为 $f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}<0$)，由加权的琴生(Jensen)不等式,可得

$$\begin{aligned}&w_1\ln\frac{a_{1j}}{A_1}+w_2\ln\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+w_n\ln\frac{a_{nj}}{A_n}\\ =&\frac{1}{w_1+w_2+\cdots+w_n}\left(w_1\ln\frac{a_{1j}}{A_1}+w_2\ln\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+w_n\ln\frac{a_{nj}}{A_n}\right)\\ \leqslant&\ln\frac{w_1\dfrac{a_{1j}}{A_1}+w_2\dfrac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+w_n\dfrac{a_{nj}}{A_n}}{w_1+w_2+\cdots+w_n}\\ \leqslant&\ln\left(w_1\frac{a_{1j}}{A_1}+w_2\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+w_n\frac{a_{nj}}{A_n}\right),\end{aligned}$$

所以
$$\left(\frac{a_{1j}}{A_1}\right)^{w_1}\left(\frac{a_{2j}}{A_2}\right)^{w_2}\cdots\left(\frac{a_{nj}}{A_n}\right)^{w_n}\leqslant w_1\frac{a_{1j}}{A_1}+w_2\frac{a_{2j}}{A_2}+\cdots+w_n\frac{a_{nj}}{A_n},$$

把上式对 j 从 1 到 m 求和,得

$$\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{a_{1j}}{A_1}\right)^{w_1}\left(\frac{a_{2j}}{A_2}\right)^{w_2}\cdots\left(\frac{a_{nj}}{A_n}\right)^{w_n}\leqslant w_1+w_2+\cdots+w_n=1,$$

从而命题得证.

特别地,当 $w_1=w_2=\cdots=w_n=\dfrac{1}{n}$ 时,有

$$\begin{aligned}&(a_{11}^n+a_{12}^n+\cdots+a_{1m}^n)(a_{21}^n+a_{22}^n+\cdots+a_{2m}^n)\cdots(a_{n1}^n+a_{n2}^n+\cdots+a_{nm}^n)\\ \geqslant&(a_{11}a_{21}\cdots a_{n1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{n2}+\cdots+a_{1m}a_{2m}\cdots a_{nm})^n. \qquad ②\end{aligned}$$

在②中,取 $n=3$, $m=3$, 有

$$(a_{11}^3+a_{12}^3+a_{13}^3)(a_{21}^3+a_{22}^3+a_{23}^3)(a_{31}^3+a_{32}^3+a_{33}^3)$$

$$\geqslant (a_{11}a_{21}a_{31}+a_{12}a_{22}a_{32}+a_{13}a_{23}a_{33})^3. \qquad ③$$

在②中,取 $n=3$, $m=2$, 有

$$(a_{11}^3+a_{12}^3)(a_{21}^3+a_{22}^3)(a_{31}^3+a_{32}^3)\geqslant (a_{11}a_{21}a_{31}+a_{12}a_{22}a_{32})^3. \qquad ④$$

在①中,取 $n=2$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_i\right)^{\alpha}\left(\sum_{i=1}^{m}b_i\right)^{\beta}\geqslant \sum_{i=1}^{m}a_i^{\alpha}b_i^{\beta}, \qquad ⑤$$

其中 α、β 是正实数,且 $\alpha+\beta=1$. 当 $\alpha=\beta=\dfrac{1}{2}$ 时,⑤ 即为柯西不等式.

在⑤中,令 $m=n$, $a_i^{\alpha}=x_i$, $b_i^{\beta}=y_i$, $\alpha=\dfrac{1}{p}$, $\beta=\dfrac{1}{q}$, 则⑤式为

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^{p}\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^{q}\right)^{\frac{1}{q}}, \qquad ⑥$$

其中 $p>0$, $q>0$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$.

例 28 设 $a, b\in\mathbf{R}_{+}$.

(1) 求 $S=\dfrac{(a+1)^2}{b}+\dfrac{(b+3)^2}{a}$ 的最小值;

(2) 求 $T=\dfrac{(a+1)^3}{b^2}+\dfrac{(b+3)^3}{a^2}$ 的最小值.

解析 (1) 由柯西不等式,得

$$S\cdot(b+a)\geqslant(a+1+b+3)^2,$$

所以

$$S\geqslant\frac{(a+b+4)^2}{a+b}=(a+b)+\frac{16}{a+b}+8\geqslant 2\sqrt{16}+8=16,$$

当 $a=\dfrac{7}{3}$, $b=\dfrac{5}{3}$ 时等号成立.

故 S 的最小值为 16.

(2) 由③(赫尔德不等式),有

$$\left(\frac{(a+1)^3}{b^2}+\frac{(b+3)^3}{a^2}\right)(b+a)(b+a)\geqslant(a+1+b+3)^3,$$

所以

$$
\begin{aligned}
T &\geqslant \frac{(a+b+4)^3}{(a+b)^2} = x+12+\frac{48}{x}+\frac{64}{x^2}\ (\text{记 } a+b=x)\\
&= x+\frac{64}{x}+\left(\frac{64}{x^2}-\frac{16}{x}+1\right)+11\\
&= \left(x+\frac{64}{x}\right)+\left(\frac{8}{x}-1\right)^2+11\\
&\geqslant 2\sqrt{64}+0+11\\
&= 27.
\end{aligned}
$$

当 $a=\frac{22}{5}$, $b=\frac{18}{5}$时等号成立.

所以 T 的最小值为 27.

例 29 设 a, b, $c\in\mathbf{R}_+$, 求证:

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\geqslant\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{3}.$$

证明 由平均不等式,得

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(c+a)}{3}\geqslant\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)},$$

所以 $$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}.$$

由②(赫尔德不等式),有

$$
\begin{aligned}
\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} &= \frac{1}{27}\left(\frac{a+b}{2}+b+a\right)\left(b+\frac{b+c}{2}+c\right)\left(a+c+\frac{a+c}{2}\right)\\
&\geqslant\frac{1}{27}\left(\sqrt[3]{\frac{a+b}{2}\cdot b\cdot a}+\sqrt[3]{b\cdot\frac{b+c}{2}\cdot c}+\sqrt[3]{a\cdot c\cdot\frac{a+c}{2}}\right)^3\\
&\geqslant\frac{1}{27}\left(\sqrt[3]{\sqrt{ab}\cdot a\cdot b}+\sqrt[3]{\sqrt{bc}\cdot b\cdot c}+\sqrt[3]{\sqrt{ca}\cdot c\cdot a}\right)^3\\
&= \frac{1}{27}(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})^3,
\end{aligned}
$$

所以 $$\sqrt[3]{\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8}}\geqslant\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}}{3}.$$

例 30 设 a、b、c 是正实数,求证:

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\geqslant(a+b+c)^3.$$

证明 对于 $x\in\mathbf{R}_+$, x^2-1 与 x^3-1 具有相同的符号，所以

$$(x^2-1)(x^3-1)\geqslant 0,$$

即

$$x^5-x^2+3\geqslant x^3+2.$$

于是

$$(a^5-a^2+3)(b^5-b^2+3)(c^5-c^2+3)\geqslant(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2).$$

而由②(赫尔德不等式)，有

$$\begin{aligned}(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)&=(a^3+1+1)(1+b^3+1)(1+1+c^3)\\&\geqslant(a+b+c)^3,\end{aligned}$$

从而命题得证.

例 31(幂平均不等式) 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n 是正实数，$\alpha>\beta>0$，则

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

证明 在⑥中(赫尔德不等式)，令 $x^i=1$, $i=1, 2, \cdots, n$，有

$$\sum_{i=1}^{n}y_i\leqslant n^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

由于 $\frac{1}{p}=1-\frac{1}{q}$，所以上式可以写成

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

在上式中，令 $y_i=a_i^{\beta}$, $q=\frac{\alpha}{\beta}>1$，得 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}}$，于是

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}a_i^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

1.8 排序不等式

排序不等式 设 a_1, a_2, $\cdots$, a_n, b_1, b_2, $\cdots$, $b_n\in\mathbf{R}$，且满足以下条件：

$$a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n,\ b_1\leqslant b_2\leqslant\cdots\leqslant b_n,$$

则

图书在版编目(CIP)数据

不等式的解题方法与技巧 / 熊斌,苏勇编著. —3 版. —上海:华东师范大学出版社,2019
(数学奥林匹克小丛书:第三版. 高中卷)
ISBN 978-7-5675-9493-7

Ⅰ. ①不… Ⅱ. ①熊…②苏… Ⅲ. ①不等式-高中-题解
Ⅳ. ①G634.625

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 198998 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷
不等式的解题方法与技巧(第三版)

编　　著　熊　斌　苏　勇
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　冯凯玥
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　14.75
字　　数　262 千字
版　　次　2020 年 4 月第三版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9493-7
定　　价　38.00 元

出 版 人　王　焰

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。