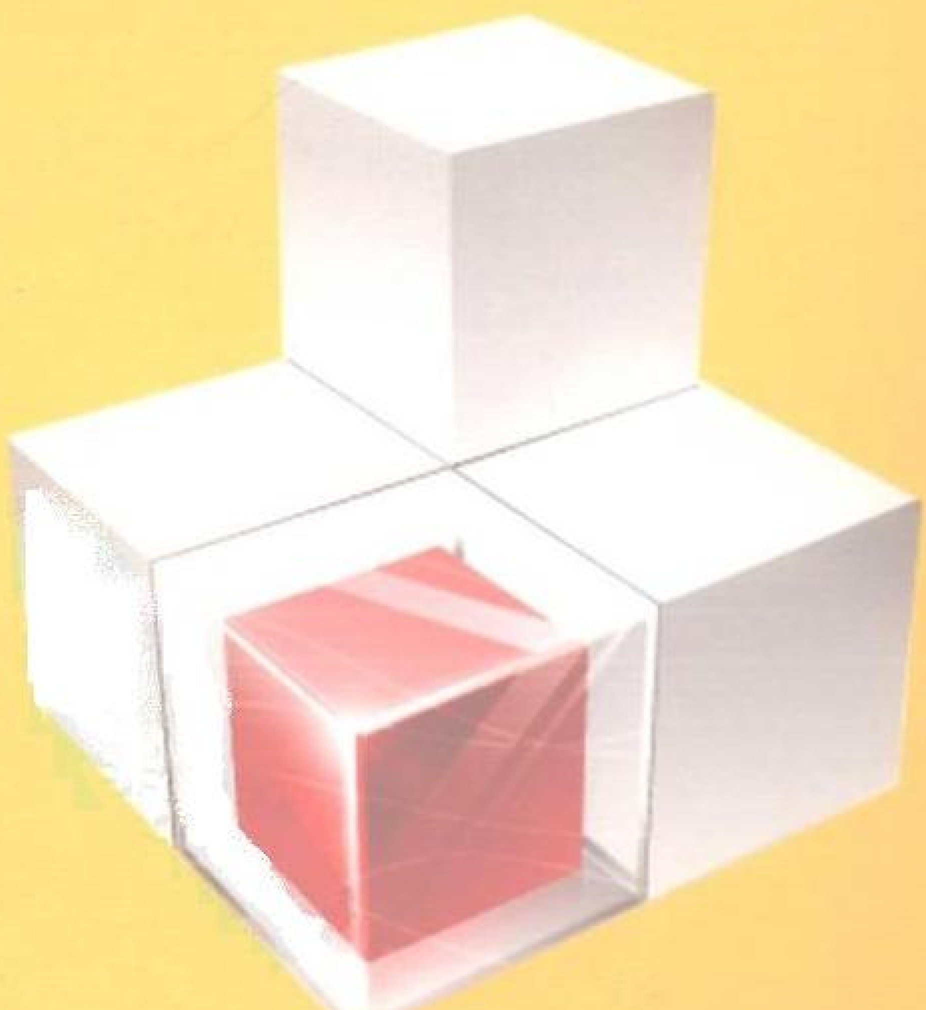
Shuxue Aosai
Fudao Congshu

数学奥赛辅导丛书

从特殊性看问题

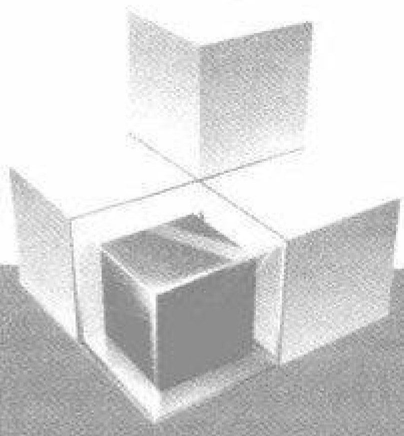
Cong Teshuxing Kan Wenti

苏 淳 编著



中国科学技术大学出版社

数学奥赛辅导丛书



从特殊性看问题

苏　淳　编著

中国科学技术大学出版社

序

目前，有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了，甚至使一些中学生感到不堪负担，所以再要出版这类读物一定要注重质量，否则"天下文章一大抄"，又无创新之见，未免有误人子弟之嫌.写这类读物如何才能确保质量呢？我想华罗庚老师的两句名言："居高才能临下，深入才能浅出"，应该成为写这类读物的指导思想，他本人生前所写的一系列科普读物，包括为中学生写的一些书，也堪称是这方面的范本.

中国科学技术大学数学系的老师们，在从事繁重的教学与科研工作的同时，一向对中学数学的活动十分关注，无论对数学竞赛，还是为中学生及中学教师开设讲座、出版中学读物都十分热心，这也许是受华罗庚老师的亲炙，耳濡目染的缘故，所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色.

我看了几本他们编写的"数学奥赛辅导丛书"原稿，感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的，所以乐之为序.

龚 昇

前　言

这是一本以介绍数学解题思想方法为目的的书.

如果说问题是数学的心脏，那么解题的思想方法就应当说是数学的灵魂.思想方法，不是指解答某道题的具体方法，也不是指数学归纳法之类的技术性方法，而是指如何看待数学世界，如何考察数学问题的带有指导性的普遍思想方法.例如大家所迫切关心的“拿到一道数学题后，该如何下手?”之类的问题，就属于需要思想方法指导的普遍性问题.

当代著名美国数学家波利亚(G. Polya)说过:“我们应该讨论一般化、特殊化和类比这些过程本身，它们是获得发现的伟大源泉.”本书的目的，就在于试图“特殊化”这一认识数学世界的重要思想方法，结合大量初等数学，尤其是各类数学竞赛试题中的例子，做一番较为细致的剖析.

从特殊性看问题的思想方法，归结起来，可以大致分为从简单情形看问题和从特殊对象看问题这样两个方面.本书将分别从不同的角度介绍这两个方面的内容.

本书在内容安排上，基本保持了各节之间的相对独立性，对于书中个别带 * 号的例题，读者如果一时读不懂，也可先撇开不看，而不会影响后面内容的阅读.

作者关于写作这样一本书的设想，可以说是由来已久.这些年来，国内数学课外活动有了较大发展，配合一年一度的全国数学竞赛，各地纷纷举办数学讲座，开办数学夏令营、冬令营，甚至

创办数学奥赛业余学校.自1986年始,我国的数学奥赛事业,也已正式走向世界,并一举取得引人注目的好成绩.在这种形势之下,如何提高数学课外活动的科学性、系统性便成了日益尖锐的、迫切需要解决的问题.作者写这本书的一个重要目的、便是试图根据作者本人最近几年来,为全国各地中学数学教师和高中学生举办数学讲座的经验,总结出一本可为听者接受的、以讲述解题思想方法为主要内容的讲座材料.因此作者在取材上,坚持以初等数学问题作为例题,并尽量结合数学竞赛的内容需求和最新动态;在写作方法上,则坚持以例题作为线索,注意循序渐进,注意对解题经验的总结,在章节设置上,则既注意了整体上的系统性,又保持了各章节间的相对独立性.但是由于作者的能力和水平有限,错误和疏漏在所难免,还望读者批评指正.

作者应当感谢常庚哲教授的指导与帮助,他不仅向作者提供了许多资料,还向作者提供了许多写作方面的指导性意见.作者还应当向盛立人、严镇军和单墫教授致谢,写作中曾不同程度地参阅了他们的著作和举办数学讲座时的讲稿,本书第7节则主要取材于单墫教授为安徽省黄山市夏令营讲课时的讲稿.最后,作者还要感谢孙立广同志,感谢我的妻子万希仁同志,是他们为我提供了寒假期间安静的写作地点和条件.

苏　淳

于中国科学技术大学

目　　次

1　一把开门的钥匙

拿起一道数学题，尤其是竞赛试题，最怕的就是摸不着头脑，不得其门而入，而正确的思想方法则可以提供开门的钥匙.“从特殊性看问题”就是这样一把百用皆灵的开门钥匙.

当代著名美国数学家波利亚把一般化、特殊化和类比并列地称为“获得发现的伟大源泉”. 波利亚专门写了一本书《数学与猜想》论述这种思想. 他在这本当代数学名著中列举了许多生动的例子，说明数学家们是如何从对简单，特殊的事物的考察中找到规律，导致伟大的发现的. 波利亚在他的书中这样写道：

如果我们要考察一个关于凸多边形的命题，那么就可以先从正多边形看起，特别地，还可以先从正三角形看起.

如果我们要检验关于素数的某个命题，那么就可以先从一些具体素数，例如从 17 看起.

如果我们讨论的是一列与一切自然数 n 有关的命题，那么最好还是先来看一看 $n=2$ 和 3 的情形.

…………

先辈们的这些宝贵经验和谆谆教诲揭示了数学学习和研究的普遍规律，是应当时刻牢记的至理名言. 可以说，只要

你真正了解了它们，记住了它们，并且在自己的学习中时刻想到运用它们，那么你就会尝到无尽的甜头.

我们来看一些例子.

【例 1】 能否把 1，2，…，10 这 10 个自然数按某顺序写成一行，使得每相邻三个数的和都不大于 15？

刚开始拿到这个问题，一般同学都会试着去排，并且往往在碰了钉子之后不知回头. 当然，先试着排一排并无不妥，问题是在碰了钉子之后应当回头，就应当认真地想一想到底是"能"还是"否"？

那么正确的做法是什么呢？我们说，那就是应当看一看某些特殊的位置上该填什么数. 为了便于说明问题，我们假定把 10 个数写成一行：

$$a_1, a_2, \cdots, a_{10}$$

显然，一头一尾是两个特殊的位置. 那么，我们就来看看 a_{10} 和 a_1 该分别是哪两个数吧！

大家知道 $1+2+\cdots+10=55$，而如果所写的方式满足题意，那么就应当有

$$\begin{aligned} a_1+a_2+\cdots+a_9 &= (a_1+a_2+a_3)+(a_4+a_5+a_6) \\ &\quad +(a_7+a_8+a_9) \leqslant 45 \end{aligned}$$

从而必定要有 $a_{10} \geqslant 55-45=10$ 因此 a_{10} 只能为 10. 同理，此时也应当有

$$\begin{aligned} a_2+a_3+\cdots+a_{10} &= (a_2+a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7) \\ &\quad +(a_8+a_9+a_{10}) \leqslant 45 \end{aligned}$$

从而就一定还要有 $a_1 \geqslant 55-45=10$，于是 a_1 也只能为 10. 上

述两点要求当然不能同时满足，所以这个问题的答案是“否”！即不能按题目要求把所给的10个自然数写成一行.

在这里，一头一尾这两个位置就是两个特殊对象. 对它们的考察就是找着了开门的钥匙.

我们再来继续考察这个问题：15不行，那么16行不行呢？事实上，16是行的，例如把10个数排列为：10,4,2,9,1,6,7,3,5,8，就可以满足要求. 那么在这种排列中有没有什么窍门呢？当然是有窍门的！首先，利用与上面类似的推理，可知第1,4,7,10个数都不能小于7，其次，要对1到6这6个数适当地两两搭配. 这里面仍然需要抓住特殊对象看问题. 读者不妨试着自己排一排，以体会其中的奥妙. 需要指出的是：我们把1到6这6个数搭配为(4,2)、(1,6)和(3,5)，使得它们的和分别为6,7和8；并且让第1,4,7,10个数分别为10,9,7和8，其中都包含有一定的用意.

我们再来看一些其它例子.

【例2】 在第一行中先按递增顺序写出自然数1,2,…,n；再在第二行中按另一种顺序写出它们. 能否使得每一列中的两个数之和都是完全平方数，如果：(1)$n=9$；(2)$n=11$；(3)$n=2000$？

无可非议，大家可以先试着写一写. 但是，如果没有指导思想地瞎试，那么，虽然对较小的n可能会找到答案，但却不能节省时间，且很难为解决较大的n提供启发.

我们来看一看如何做更为合理？

由于我们要为每个数找到一个“配偶”，使得两者相加得

到完全平方数.并且各个数的“配偶”互不相同，且都要在1，2，…，n之中.因此，一般来说，数越大，选择“配偶”时所受到的限制就越多.由此可见，比较合理的思路是按从大到小的顺序依次考虑.

先看(1)$n=9$.我们先从9看起.易知，9只能与7相配.故我们也让7与9相配.接下来考虑8，易知可让8与1互配.再接下来，不难发现，6，5，4，3可分别与3，4，5，6互配.最后，可让2与自己相配.于是我们得到了本小题的肯定答案：

1	2	3	4	5	6	7	8	9
8	2	6	5	4	3	9	1	7

通过本小题的解答，我们体会到，这种逐步自大到小的考虑顺序既合理，又方便.显然，它体现了一种从特殊对象看起的思想.

再看(2)$n=11$.仍然先从最大的数看起.显然$11+11=22<5^2$，$11>3^2$，所以只能让11与5相配，使它们之和为$16=4^2$.这一事实引起我们注意，因为在(1)$n=9$时，4是与5相配的.因此，现在能否按照题意写数的关键便是：能否让4与别的数相配？显然，4自己已是2^2，而$2+11=13<4^2$，所以唯一的选择只有$4+5=9=3^2$.于是问题的答案便一目了然了：不能按照题中要求写出这11个数，因为我们无法解决11和4都要与5相配这个矛盾.

在这里，我们分别抓住了两个特殊对象：11和4，其中一个是最大的数，另一个是讨论中暴露出的值得特别关注的对

象.通过分析它们,我们便找到了问题的答案.可见,它们正是开门的钥匙.我们再次品味到从特殊对象看问题的甜头.

在(3)$n=2000$时,我们依然先从最大的数看起.易知,可让2000,1999,…,25依次分别与25,26,…,2000相配,使得所配的二数之和都是$2025=45^2$.接下来,我们立即发现,又可让24,23,…,1依次分别与1,2,…,24相配,使得所配二数之和都是$25=5^2$.于是我们很快便得到这个看似复杂,其实却很容易解答的问题的答案.但是,如果我们没有合理的思路,那么情形又将如何呢?

【例3】 将8×8方格表中每个方格的中心点标出,共得到64个点.试问,能否用13条直线把这64个点全都两两彼此隔开?

我们知道,这64个点是被表中内部的7条水平方格线和7条竖直方格线所在的14条直线两两彼此隔开的,现在的问题便是能否减少所需直线和条数?

如果漫无目标地去想,显然会使我们不得要领.为此,我们还是来看"特殊对象"为妥.

我们来观察边框中的28个方格.显然,要是能把表中64个方格的中心点全都两两彼此隔开,那么也就能把这28个方格的中心点全都两两彼此隔开.我们知道,"边框"是两个正方形所夹成的区域.每一条直线上至多有两条线段位于该区域中.而每一条线段至多可把两个点彼此隔开.因此边框中的28个方格的中心点需要有28条线段才能把它们全都两两彼此隔开.而13条直线上至多有26条线段位于该区域中,

所以它们不足以隔开 28 个方格的中心点，因此就更谈不到把表中 64 个方格的中心点全都两两彼此隔开了. 所以本题的答案是否定的.

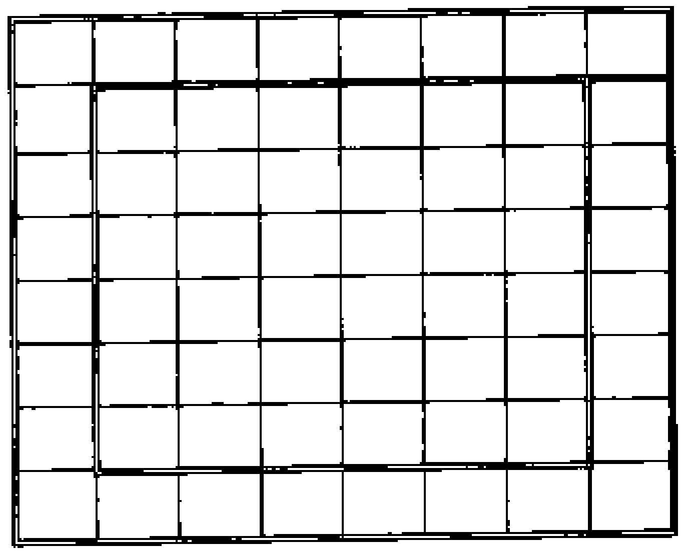


图 1.1

在这里，正是"边框中的 28 个方格的中心"这些特殊对象为我们提供了开门的钥匙. 并且借助于它们，我们即已找到了问题的答案，而无须涉及表格中间的其它点.

【例 4】 是否存在凸多面体，它的每个面都是偶数边形，而它却一共有奇数条棱?

一般来说，有关空间形体的问题要比平面图形问题复杂，尤其是这类存在性问题更会使人感到难以下手. 在这里，最可靠的做法是：先从一些最熟悉的空间形体看起. 显然，四面体不合要求，六面体也不合要求，并且六面体难于提供我们进一步思考的余地. 我们还是来看六棱柱. 当然，它也不合要求. 不过，它有六个面为四边形，两个面为六边形和 18 条棱，这就给我们留下了广阔的回旋余地，使我们有可能对其加以改造，使之变为合乎要求的形体. 经过一些思索，我们终

于找到了如图所示的合乎要求的凸多面体,它有八个面为四边形,一个面为六边形和 19 条棱,并且是从六棱柱稍加改造后得到的(见图1.2).

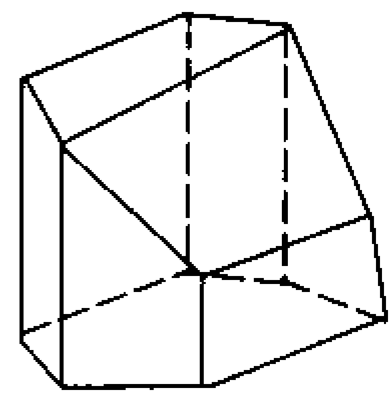


图 1.2

这个例子再次展示了从特殊对象看起这一办法的威力. 并且告诉我们,在漫无头绪之时,最好是先去观察一些最熟悉的最特殊的对象,并设法通过它们找出问题的答案. 我们再来看一个很能说明问题的例子.

【例 5】 坐标平面上的所有整点(即两个坐标 x 和 y 都是整数的点 (x,y))都被分别染为红蓝两种不同颜色. 证明,可以在该平面上找到一个具有对称中心的由同色点构成的无限集合.

乍一拿到这道题目,的确漫无头绪,令人无从下手. 怎么办? 我们还是老办法,先看一些特殊对象. 最容易想到的对象当然是"以原点为对称中心的同色点集",即

$$A = \{(x,y) \mid (x,y) \text{ 与} (-x,-y) \text{ 同色}\}$$

显然,如果该集合 A 是无限集合,则由此不难得知题中结论. 但是,如果 A 不是无限集合呢? 那么我们暂时还是不能得出进一步的结论. 怎么办? 还是老办法,再继续看一些特殊对象. 现在,最容易想到的对象之一当然是"以点 $(1,0)$ 为对称中心的同色点集",即

$$B = \{(x,y) \mid (x,y) \text{ 与} (-x+2,-y) \text{ 同色}\}$$

如果该集合 B 是无限集合,则由此亦可得知题中结论.

但是，如果 B 也不是无限集合呢？我们是否还要再继续如此看下去呢？如此下去何时是尽头呢？所以，现在我们应当认真想一想，能不能从"A 和 B 都不是无限集合"出发，证明出题中结论？因为现在我们已不是一无所知，而是有了"A 和 B 都不是无限集合"这个前提了. 好吧，就让我们来试一试！

既然"A 和 B 都不是无限集合"，所以在平面上的广大区域内就都不会有这两个集合中的点. 换句话说，集合 A 和 B 中的点的纵坐标和横坐标的绝对值都会有有限的最大值. 为此，我们将集合 $A\cup B$ 中的点的纵坐标的绝对值的最大值记作 y_0，再记 $m=y_0+1$，于是在直线 $y=m$ 和 $y=-m$ 上就都不会有 $A\cup B$ 中的点，那么，这是什么意思呢？我们应该好好推敲一下.

显然，对任何整数 x，点 (x,m) 都在直线 $y=m$ 上，所以有 $(x,m)\notin A\cup B$，即该点既不在集合 A 中，也不在集合 B 中. 因此，点 $(-x,-m)$ 和 $(-x+2,-m)$ 都与点 (x,m) 异色. 同理，由于点 $(x,-m)$ 都在直线 $y=-m$ 上，所以点 $(-x,m)$ 和 $(-x+2,m)$ 都与点 $(x,-m)$ 异色. 这样一来，我们便有了推理的基础了：

如果 $(0,m)$ 是红点，则 $(0,-m)$ 和 $(2,-m)$ 都是蓝点. 由 $(0,-m)$ 是蓝点，知 $(2,m)$ 是红点，从而 $(-2,-m)$ 是蓝点，于是 $(4,m)$ 是红点，……，如此下去，并结合归纳法，即可知，对一切正整数 n，$(2n,m)$ 都是红点. 另一方面，由于 $(2,-m)$ 是蓝点，所以 $(-2,m)$ 是红点，从而 $(4-m)$ 是蓝点，于是 $(-4,m)$ 又是红点，……，如此下去，并结合归纳法，亦可得知，对一

切正整数 n，$(-2n,m)$ 也都是红点. 综合上述两方面，我们便推得：集合

$$C=\{(2n,m)\mid n\text{ 为整数}\}$$

中的点全是红点. 该集合显然是一个无限集合，并且以点 $(0,m)$ 作为其对称中心.

这样一来，我们便证得了题中所要证明的结论.

回顾上述证明过程，我们不仅体会到了“从特殊对象看起”这一思维方法的威力，而且看到了如何借助“特殊对象”作为推理的前提，发展思维，以达到最后的目的. 这就告诉我们，要想运用好“从特殊对象看起”这一有利武器，不仅要养成自觉运用它的习惯，而且还需在培养正确的思维方式上下工夫. 无论如何，养成这一习惯是有百利而无一害的.

下面的例题取自 2001 年中国数学奥赛试题，对我们甚有启发.

【例 6】 在正 n 边形的每个顶点上各停有一只喜鹊. 偶受惊吓，众喜鹊都飞去. 一段时间后，它们又都回到这些顶点上，仍是每个顶点上一只，但未必都回到原来的顶点. 求所有正整数 n，使得一定存在 3 只喜鹊，以它们前后所在的顶点分别形成的三角形或同为锐角三角形，或同为直角三角形，或同为钝角三角形.

本题的答案是：n 可为不等于 5 的所有不小于 3 的正整数.

作出正 n 边形的外接圆. 我们来分情况讨论.

对于 $n=5$，有反例如图 1.3 所示. 其中每个原来的锐角

三角形都变为钝角三角形；而每个原来的钝角三角形都变为锐角三角形. 所以 $n\neq 5$.

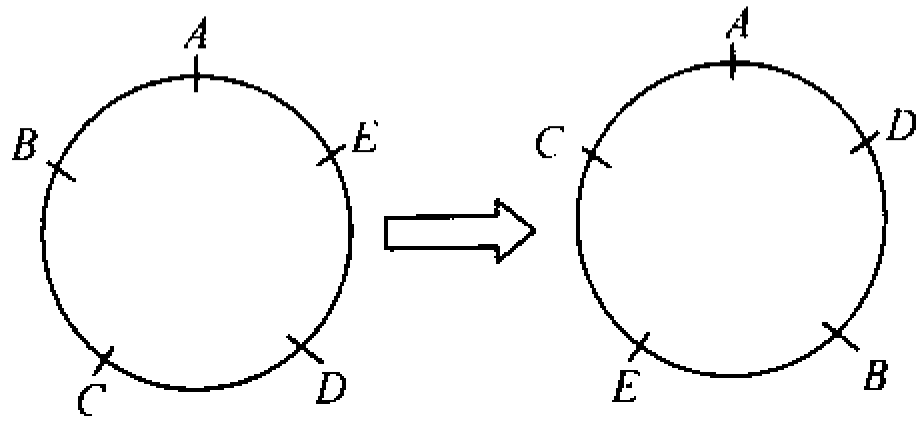


图 1.3

对于 $n=2m, m\geqslant 2$，我们抓住任意一对原来位于同一直径两端(称它们为“对径”)的喜鹊 A 和 B. 如果它们后来仍然“对径”，那么它们与任何一只别的喜鹊 C 前后所在的顶点分别形成的三角形都是直角三角形；如果它们后来不再“对径”，则后来与 A 对径的是某只别的喜鹊，设为 D. 易知 A, B, D3 只喜鹊前后所在的顶点分别形成的三角形也都是直角三角形. 所以 n 可为一切不小于 4 的偶数.

$n=3$ 的情形显然. 对于 $n=2m+1, m\geqslant 3$，我们抓住任意一只喜鹊 A，过 A 所在的顶点作外接圆的直径，称之为 AA_1. 由于 A_1 不是正 $2m+1$ 边形的顶点，所以点 A_1 处没有喜鹊. 此时在 AA_1 的两侧显然各有 m 只喜鹊. 由于 $m\geqslant 3$，所以必有 3 只喜鹊 B, C, D 原来位于 AA_1 的同一侧，它们之中的任意两只都与 A 所在的顶点形成直角三角形. 并且，由抽屉原则，B, C, D 中必有某两只后来也位于过 A 所在的顶点的直径的同一侧，因此，它们后来也与 A 所在的顶点形成直角三

角形. 所以 n 可为一切不小于 3 且不等于 5 的奇数.

这个问题的解答再次表明了抓住"特殊对象"考虑问题的好处.

2 一个行事原则

考虑任何问题都应该有一个行事原则. 那么,在遇到数学难题时,应当以什么作为行事原则呢? 我们说:先易后难,先简单后复杂,总之一句话,就是"先从好做的,容易做的事情做起",这就是我们的行事原则、我们的基本出发点,或者说,这就是我们应遵循的基本方针. 毛泽东在谈到作战原则时,反复强调的一个基本方针就是:"先打分散和薄弱之敌,后打集中和强大之敌","先吃肥肉,后啃骨头". 打仗如此,解数学题又何尝不是如此呢?

我们来看一些例子. 我们在前一节中谈到了染色问题,现在就让我们再来继续看一些染色问题.

【例 1】 直线上的每一个点都被染为红蓝二色之一,并且既有被染为红色的,也有被染为蓝色的. 证明,可以在该直线上找到一条线段,它的两个端点都与它的中点同色.

在这里,就是要我们找出三个等间距的同色点. 显然,难于直接找出这样的三个点. 那么我们就先来"做容易做的事情",先找两个同色点. 在该直线上,一定有两个同色的点. 不妨设 A 和 B 为两个红点,它们的距离为 $a>0$,并且点 A 在点 B 在左边. 接下来,我们便紧紧抓住它们不放. 我们先来看线段 AB 的中点 C. 如果 C 也为红点,则线段 AB 即为所求. 如

果 C 为蓝点，我们再来看位于点 A 的左方并且与 A 的距离为 a 的点 D. 如果 D 为红点，则线段 DB 即为所求. 如果 D 也为蓝点，我们就再看位于点 B 的右方并且与 B 的距离为 a 的点 E. 当 E 为红点时，线段 AE 即为所求，而当 E 为蓝点时，则线段 DE 即为所求. 总之，在一切情况下，我们都证得了题中的结论.

在这里，我们就是先从找两个同色点这样一件容易做到的事情做起的，并通过抓住它们逐步把讨论引向了深入.

【例 2】 平面上的每个点都被染为红蓝二色之一，并且既有被染为红色的，也有被染为蓝色的. 证明，对任意给出的 $a>0$，都可以在该平面上找到两个距离为 a 的同色点，也可以到两个距离为 a 的异色点.

我们先来证明可以找到两个距离为 a 的同色点. 注意，这里有两个要求：一是"距离为 a"，二是"同色"，我们难于一下子两全其美. 于是，我们先顾一头，"先做一件容易做的事情"，先在平面任取两个距离为 a 的点 A 和 B，然后抓住它们不放. 如果它们同色，则显然即为所求. 如果它们异色，那么我们就再找一个与它们的距离都是 a 的点 C（分别以 A 和 B 为圆心各作一个半径为 a 的圆，将所得交点之一取为 C 即可）. 由于平面上只有两种颜色的点，所以 C 必与点 A 和 B 之中的一个同色，故得所证. 在此，我们再次看到了"先做一件容易做的事情"这一方针带来的好处.

但是，为了证明可以找到两个距离为 a 的异色点，能否重蹈旧辙，仍然先任意取两个距离为 a 的点呢？大家不妨尝

试一下.相信大家很快就会发现,在几步之后,便会陷入一个难以摆脱的怪圈之中.在这里我们应当易弦更张,虽然仍是"先做一件容易做的事情",不过,不是先在平面任取两个距离为 a 的点,而是先任意取两个异色点 A 和 B,然后抓住它们不放.如果它们的距离恰好为 a,那么即为所求.如果它们的距离不是 a,但小于 $2a$,那么事情好办,只要分别以它们为圆心各作一个半径为 a 的圆,则所作二圆必定相交,将所得交点之一取为 C,则 C 必与点 A 和 B 之中的一个异色,故得所求.如果 A 和 B 的距离不小于 $2a$,则事情稍许麻烦一点.我们需作出 A 和 B 的连线,然后在线段 AB 上取一点 A_1,使 $AA_1=a$,如果 A_1 与 A 异色,则它们即为所求;如果 A_1 与 A 同色,而 A_1B 仍然不小于 $2a$,则再在线段 A_1B 上取一点 A_2,如此一直进行下去,于是我们或者在某一步上得到两个距离为 a 的异色点,或者所取之点都与 A 同色(因而都与 B 异色),但是已经得到两个距离小于 $2a$ 的异色点.于是再按前一种情况处理,通过二圆相交,得到所求.

我们看到上述两个小题采用了不同的上路途径,体现了数学问题处理办法上的灵活性.但是,它们却有一个共同点,这就是"先做一件容易做的事情":在前一小题中,先不管颜色仅顾及距离,而在后一小题中,则先不管距离仅顾及颜色.总之,都是先只顾及一个要求,而后再设法满足另一个要求.正是这种"先易后难"的处理思想,使得我们得以最终解决问题.

下面来看一个求和问题.

【例 3】 试求下式之和：

$$\left[\frac{1}{3}\right]+\left[\frac{2}{3}\right]+\left[\frac{2^2}{3}\right]\left[\frac{2^3}{3}\right]+\cdots+\left[\frac{2^{1000}}{3}\right]$$

其中$[x]$表示实数x的整数部分.

如果逐个求出各项之值，再去求和，不是一件容易的事情，而且这种办法不足取. 怎么办？我们还是老方针："先做一件容易做的事情"，即先不管方括弧，求了和再说！

题中的和式共有 1001 项，但是第一项显然为 0，所以不用管它. 于是我们先来求得：

$$A=\frac{2}{3}+\frac{2^2}{3}+\frac{2^3}{3}+\cdots+\frac{2^{1000}}{3}=\frac{2^{1001}-2}{3}$$

但是，A 并不是题目所要我们求的和数. 如果记题中所要求的和为 B，显然有 $B<A$. 然而 $A-B$ 究竟是多少呢？通过观察，不难发现，和数 A 中的每个加项都不是整数，但是每两个相邻加项的和都是整数. 事实上，对任何自然数 k，都有

$$\frac{2^k}{3}+\frac{2^{k+1}}{3}=2^k$$

这就促使我们考虑：如果 a 和 b 都不是整数，但是 $a+b$ 为整数，那么$[a]+[b]$可能是多少？显然，如果实数 x 不是整数，而$\{x\}=x-[x]$，那么就有 $0<\{x\}<1$. 既然 $a+b=[a]+\{a\}+[b]+\{b\}=([a]+[b])+(\{a\}+\{b\})$为整数，所以$\{a\}+\{b\}$就一定也是整数，并且大于 0，小于 2，从而必定是 1. 这样一来，我们就找到了问题的答案，即$(a+b)-([a]+[b])=1$. 由于和数 A 中共有 1000 个加项，所以

$$B=A-500=\frac{2^{1001}-2}{3}-500$$

在这里我们也是先从"做一件容易做的事情"开始，然后再找出这件事与我们所要做的事情之间的关系来. 虽然，在寻找这种关系时费了点劲，但是比起直接求题中之和还是省劲不少.

【例 4】 试问，能否在三维直角坐标空间中找到一个正方体和一个平面，使得正方体的八个顶点到该平面的距离恰好分别为 0,1,2,…,7?

这是一个让人一下子难以摸着门坎的问题. 还是让我们先从"做一件容易做的事情"开始.

在三维直角坐标空间中，最容易使人想到的正方体当然是"有一个顶点在原点上，有三条棱分别在三条坐标轴上的单位正方体". 我们不妨来看看它的八个顶点坐标：

$$(0,0,0)\quad(0,0,1)\quad(0,1,0)\quad(0,1,1)$$
$$(1,0,0)\quad(1,0,1)\quad(1,1,0)\quad(1,1,1)$$

仅仅凭这八个坐标，当然很难一下子看出是否有某个平面满足要求. 但是如果我们仔细看看，再仔细看看这些坐标，就会发现它们与 0,1,2,…,7 这八个数有着联系：因为如果把它们理解为八个二进制数 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111，那么它们不就恰好是 0,1,2,…,7 吗? 这个发现太使人振奋了! 因为如果把每个一维坐标值都是 0 或 1 的三维坐标 (x,y,z) 看成为一个二进制数 $\overline{xyz}$，再把它按照十进制读出来，那么它的值不就是 $4x+2y+z$ 吗? 而这个表达式又使我们自然地看到了它与平面方程之间的联系. 事实上，如果我们就将平面 α 取为

$$4x + 2y + z = 0$$

那么空间任何一点(t, u, v)到α的距离就是

$$\frac{|4t + 2u + v|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 1}} = \frac{|4t + 2u + v|}{\sqrt{21}}$$

而为了正方体的八个顶点到α的距离分别是$0, 1, 2, \cdots, 7$，那么就只要让该正方体的棱长是一开始考察那个单位正方体的棱长的$\sqrt{21}$倍就行了.由此看来，我们已经找到了本题的答案，这就是：存在一个正方体，它的八个顶点到某个平面的距离分别为$0, 1, 2, \cdots, 7$.事实上，只要取“有一个顶点在原点上，有三条棱分别在三条坐标轴上的棱长为$\sqrt{21}$的正方体”即可，因为它的八个顶点到平面$4x + 2y + z = 0$的距离刚好分别为$0, 1, 2, \cdots, 7$.

这个例子再一次生动地告诉我们，在漫无头绪时，可以做些什么，以及怎样来做？充分展示了“先做一些容易做的事情”所带来的好处，表明它有时甚至可以带来“意外惊喜”.我们再来看一个例子.

【例 5】 同在省城一家公司打工的 33 个打工仔来自不同的县份，待他们相互熟悉后，询问他们每个人，在其余 32 个人中各有几个同县的，各有几个同年龄的.结果发现，在所得到的回答中包括了从 0 到 10 的所有整数.证明，他们中有两个人既来自同一县份，又同年龄.

要一下子找出这两个人很不容易.我们先来“做容易做的事情”.什么事情最容易做？当然莫过于设一些未知数，并用字母表示它们了.好吧，我们就来先做一做.

设他们分别来自 n 个不同县份，各县依次有 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 个人. 当然，还可以设他们中有 m 种不同的年龄，依次分别有 $b_1, b_2, \cdots, b_m$ 个人. 显然应当有 $n \geqslant 1, m \geqslant 1$.

这样设定完之后，我们立即发现有许多事情可做. 首先，我们可以写出如下两个关系式：

$$A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 33$$

$$B_m = b_1 + b_2 + \cdots + b_m = 33$$

其次，我们知道，在数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots b_m$ 中包括了由 1 到 11 的所有整数(因为每个人的回答中都没有包括自己). 我们暂时还不知道该数组中还有没有其它整数. 但是，上述两个和式引起我们的注意. 于是，我们再来做一件"容易做的事情"，就是来求一求由 1 到 11 的所有整数的和. 结果发现

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + 11 &= 66 = A_n + B_m \\ &= a_1 + \cdots + a_n + b_1 + \cdots + b_m \end{aligned}$$

这个事实无疑于告诉我们：在数组 $a_1, a_2, \cdots, a_n, b_1, b_2, \cdots, b_m$ 中已不可能再有其它整数，并且它们恰好只能是由 1 到 11 的整数每样一个. 或者说，恰有

$$\{a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_m\} = \{1, 2, \cdots, 11\}$$

这个发现太"伟大"了！ 它告诉我们 $n + m = 11$，并且还告诉我们：11 这个数一定含在集合 $\{a_1, \cdots, a_n\}$ 或集合 $\{b_1, \cdots, b_m\}$ 中，并且只能含在其中一个集合之中. 于是，我们可以不妨设 $11 \in \{a_1, \cdots, a_n\}$. 这样一来，我们就又知道了如下信息：(1)有某 11 个人来自同一县份；(2)他们中最多只有 $m = 11 - n \leqslant 10$ 种不同的年龄. 所以在这 11 个来自同一县份的人中必定有

两个人年龄相同，从而他们既同县又同龄．于是得到所求．

这个例子的解答过程是从设字母开始上路的．而设字母又是一件再容易不过的事情了．由此看来，我们在不知该做什么事情时先做做它也是有好处的．

在以上两节中，我们介绍了解答数学问题时应当注意的两个基本要点，即教给了大家一把开门的钥匙："从特殊对象看起"和一个应当遵循的行事原则："先做容易做的事情"．并且通过一些简单例子说明了它们的威力和若干应当注意的问题．的确，要真正学会它们是不可能一蹴而就，仅凭一两句话就奏效的，需要通过大量的实践，需要不断地总结经验，还需要不断地用新的数学知识武装自己．我们将在本书的以下各节中进一步介绍"从特殊性看问题"这一百战不殆的有力武器．

3　退下来看问题

当一个问题看不清时，一般人们都会想到先把问题简化一下．简化了问题，突出了关键，那么也就有利于看清问题了，这是一个人所共知的道理．我国伟大的数学家华罗庚生动地把简化问题称做“退”，他不止一次地说过：“善于‘退’，足够地‘退’，一直退到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀窍”．华先生这段话一语道破天机，为我们指点出了学好数学的最最宝贵、最最重要的窍门．他的这一段至理名言应当成为我们的座右铭．

我们来看一些例子．

【例 1】 以 Z 表示所有整数之集．证明，对任何 $b,c\in Z$，都存在 $p,q\in Z$，使得如下二集合没有公共元素：

$$A=\{z^2+bz+c \mid z\in Z\},\quad B=\{2z^2+pz+q \mid z\in Z\}$$

注意，在这里并不只是要证明对任何 $z\in Z$，都有

$$z^2+bz+c\neq 2z^2+pz+q$$

而是要证明 $A\cap B=\varnothing$，其内涵要深刻得多．因此，我们要把问题看看清楚．为此，我们先退下来，首先看看一些“最原始而不失去重要性”的情形．

如果 $b=c=1$，那么当然是一种“最原始”的情形．我们注意到，此时有

$$z^2+z+1=z(z+1)+1$$

显然，对任何 $z\in Z$ 而言，z 与 $z+1$ 都一定是一奇一偶，因此 $z(z+1)$ 一定为偶数，从而 z^2+z+1 一定是奇数. 这就是说，此时集合 A 中全都是奇数. 这就启发我们，如果适当选择整数 p 和 q，使得集合 B 中全都是偶数，那么，当然就会有 $A\cap B=\varnothing$ 了. 而这一点并不难做到，我们只要令 $q=p=0$ 即可达到目的.

通过这样一番分析，我们不仅找到了 $b=c=1$ 这种"最原始"情形的答案，而且使我们明白了："原来这道题就是要我们在奇偶性上面做文章"！那么，好吧，就让我们来对一般情况试试看吧！

我们仍写

$$z^2+bz+c=z(z+b)+c$$

不难看出，如果 b 为奇数，那么，对任何 $z\in Z$，乘积 $z(z+b)$ 都仍然一定为偶数. 从而集合 A 中的数都与 c 的奇偶性相同，于是只要取 $p=0,q=c+1$. 则就可使得集合 B 中的数都与 c 的奇偶性不同，故而就可有 $A\cap B=\varnothing$ 了.

但如果 b 为偶数，那么情况就不妙了. 因为当 z 为奇数时，$z+b$ 也是奇数，故 $z(z+b)$ 为奇数；而当 z 为偶数时，$z(z+b)$ 显然为偶数. 这样一来，z^2+bz+c 的奇偶性便随着 z 的奇偶性的不同而不同，于是集合 A 中既有奇数也有偶数，从而光做奇偶性分析就显然不够了. 我们应该怎么办？当然还是应当"退下来"看问题，不妨先看看 $b=2,c=1$ 的情形.

易知

$$z^2+2z+1=(z+1)^2$$

从而对任何 $z\in Z$，z^2+2z+1 都是完全平方数. 这使得我们眼睛一亮！因为完全平方数被 4 除的余数只能为 0 和 1，从而集合 A 中都是被 4 除余 0 和 1 的整数. 于是，此时我们只要取 $p=2$，$q=3$，那么就有 $2z^2+pz+q=2z(z+1)+3$，由于 $z(z+1)$ 一定为偶数，所以此时集合 B 中的数被 4 除的余数就只能为 3，于是就又有 $A\cap B=\varnothing$ 了. 受到这种启发，我们便对如何处理"b 为偶数"的情况心中有数了.

设 b 为偶数，我们记 $b=2m$，于是就有

$$z^2+bz+c=z^2+2mz+c=(z+m)^2+(c-m^2)$$

假定 $c-m^2$ 被 4 除的余数是 r，那么由于完全平方数被 4 除的余数只能为 0 和 1，所以此时集合 A 中的数被 4 除的余数都与 r 或 $r+1$ 被 4 除的余数相同. 于是，我们只要取 $p=2$，$q=r+2$，那么就有 $2z^2+pz+q=2z(z+1)+(r+2)$，从而集合 B 中的数被 4 除的余数就只能与 $r+2$ 被 4 除的余数相同. 由于"r 或 $r+1$ 被 4 除的余数"与"$r+2$ 被 4 除的余数"不同，所以 $A\cap B=\varnothing$.

通过这个例子，我们感受到"退下来看问题"的好处. 并且我们体会到，所谓"退下来看问题"，就是先从问题的一些最简单而又能说明道理的特殊情况看起，通过分析这些简单的特殊情况寻找规律，取得经验，再运用所找到的规律返回去解决问题本身. 这里应注意两点，一是要退到"最原始"的简单情况，二是该简单情况要"不失去重要性"，即必须是要能够说明道理的尽可能简单的特殊情况.

下面我们就来通过一些例子进一步展示可以如何“退下来看问题”.

【例 2】 证明,任何面积等于 1 的凸四边形的周长及两条对角线的长度之和不小于 $4+\sqrt{8}$.

尽管这是一道普通类型的题目,而且容易使人想到需要使用算术一几何平均不等式,但是却有一个令人感觉棘手之处,就是难以将周长和对角线之长放在一起考虑.我们知道,这两者之间虽然可通过余弦定理建立联系,但却为使用平均不等式带来不便.因此,一个自然地闪入脑际的想法便是“能否能将两者分开考虑、各算各的账?”而要分开,当然就有一个能否分和怎样分的问题.为了做到心中有数,还是先退下来考察一下面积为 1 的正方形和菱形吧!

在正方形中,刚好有:周长 $=4$;对角线之和 $=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$.

在菱形中:如果记两条对角线的长度分别为 l_1 和 l_2,则因有 $S=\frac{1}{2}l_1l_2=1$(其中 S 表示面积),故知 $l_1+l_2\geqslant 2\sqrt{l_1l_2}=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$;而周长 $=4\sqrt{\left(\frac{1}{2}l_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}l_2\right)^2}=2\sqrt{l_1^2+l_2^2}\geqslant 2\sqrt{2l_1l_2}=4$.

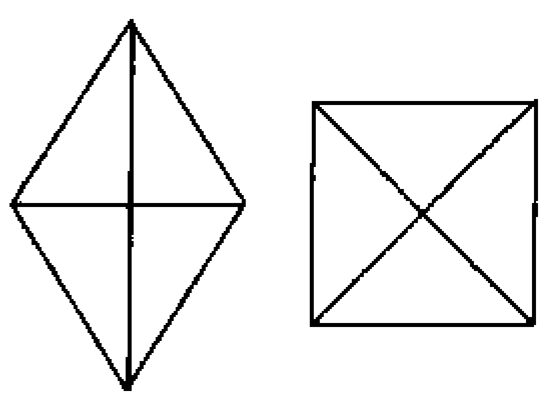


图 3.1

既然这两种最简单的凸四边形都表明了可将周长和对角线分开考虑,可以相信,分开考虑的想法确实是有一定的道理的,何况这些简单情形还启示了如何分开的具体方式.那么我们就按

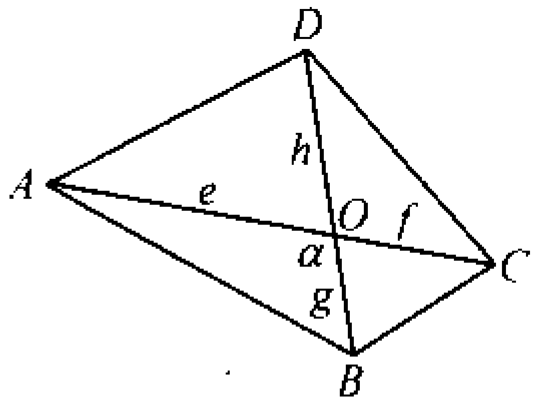


图 3.2

照这种分开考虑的方式来试一试吧！

设 $ABCD$ 是任意一个面积是 1 的凸四边形，按图 3.2 的方式将有关线段、角和点标上字母，于是就有

$$
\begin{aligned}
1 = S_{ABCD} &= \frac{1}{2}(eg + gf + fh + he)\sin\alpha \\
&\leqslant \frac{1}{2}(e+f)(g+h) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{e+f+g+h}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

即有对角线长度之和 $= e+f+g+h \geqslant 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$；再按图 3.3 的方式重新将图形中的有关线段和角标上字母，于是就又有

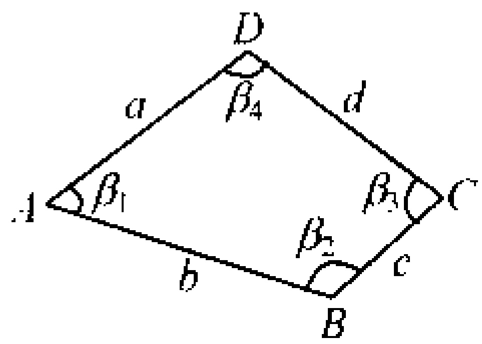


图 3.3

$$
\begin{aligned}
2 = 2S_{ABCD} &= \frac{1}{2}ab\sin\beta_1 + \frac{1}{2}bc\sin\beta_2 \\
&\quad + \frac{1}{2}cd\sin\beta_3 \\
&\quad + \frac{1}{2}da\sin\beta_4 \\
&\leqslant \frac{1}{2}(ab+bc+cd+da) \\
&= \frac{1}{2}(a+c)(b+d) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a+c+b+d}{2}\right)^2
\end{aligned}
$$

从而又知

$$周长 = a + b + c + d \geqslant 4$$

综合上述两个方面，即知周长与两条对角线长度之和不小于 $4+\sqrt{8}$，完全达到了预想的目的.

通过上述两个例子，我们品尝到了“退下来看问题”的甜头，也体会到了向简单情况寻求启示的重要性. 因为正是这些启示为我们指点了迷津，提供了解答一般情况的方法. 可以说，“退下来”的一个重要目的就是为了从简单情况中寻求启示.

下面再来看几个稍为复杂一些的例子.

【例 3】 把边长为 1 的正三角形 ABC 的各边都 n 等分，过各分点作平行于其他两边的直线，将这个三角形等分成小三角形. 各小三角形的顶点都称为结点，在每一结点上放置了一个实数. 已知

(1) A, B, C 三点上放置的数分别是 a, b, c；

(2) 在每个由有公共边的两个最小三角形组成的菱形之中，两组相对顶点上放置的数之和相等. 试求：

(1) 放置最大数的点与放置最小数的点之间的最短距离 r；

(2) 所有结点上的数的总和 S_n.

这个题目的文字叙述很长，为了能正确理解题意，可以多看上几遍. 题意弄明白后，一般会自然地想到先从 $n=2$ 的情形看起. 这种想法是可取的，因为它有利于看清问题，并且体现了退下来看问题的思想.

当 $n=2$ 时，$\triangle ABC$ 的各边上都只有中点这样一个分点，

如图 3.4 所示，我们依次记 AB，BC，CA 中点上放置的数为 x，y，z. 于是就可由题意得到 $x+y=b+z$，$y+z=c+x$，将这两个式子相加，并消去等式两端相同的项，就有 $2y=b+c$，也就是

$$y=\frac{b+c}{2}$$

根据同样的道理，也可以知道

$$x=\frac{a+b}{2},\quad z=\frac{c+a}{2}$$

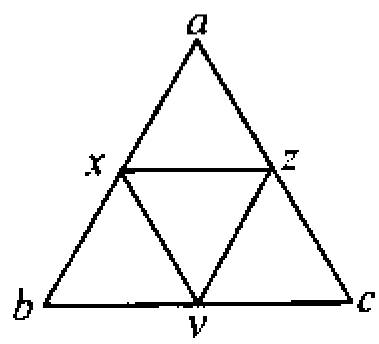


图 3.4

这就说明 x，y，z 全都介于 a，b，c 中的最大数和最小数之间，所以图形中所放的 6 个数中的最大数和最小数也就是 a，b，c 中的最大数和最小数. 因此知，如果 a，b，c 不全相等，则有 $r=1$，如果 $a=b=c$，则有 $r=0$. 并且不难算出（将 S 记作 S_2）有

$$S_2=2(a+b+c)$$

对于 $n=2$ 情形的考察到此即已告终，剩下的问题是如何进一步解答一般场合下的问题，特别是如何求出 S_n？通常有人会继续对 $n=3,4,5,\cdots$ 作考察，试图由 S_2，S_3，S_4，S_5，$\cdots$ 之中发现规律，求得关于 S_n 的表达式后再用归纳法证明. 这固然不失为一种办法，但却未必很佳. 考察简单情形并不是考察得越多越好，更重要的是注意从中寻求启示. $n=2$ 的情形固然已经考察完了，但其中所能提供的启示并未寻求完毕. 我们应当记住一点，就是不要轻易舍弃已经做过的考察，应当抓住它不放，从中挖掘出尽可能多的启示来.

在 $n=2$ 时的第一步推导中，我们并没有涉及 a，所以其

推导过程完全适用于如图 3.5 所示的任何图形中的 5 个数 α,β,t,u,v. 这就是 $n=2$ 情形为我们提供的最重要的启示!

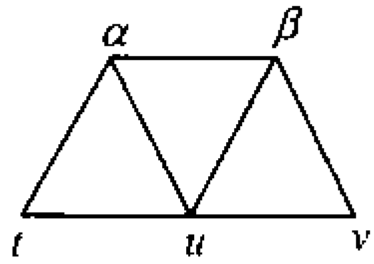


图 3.5

根据这一启示,或者说经过类似的推导,我们立即得到了关系式

$$2u = t + v$$

这就表明,图形中的任何一条直线上的数都依次构成了等差数列. 所以我们不用再去考察 $n=3,4,5$ 之类,即可立即断言:不论 n 为何值,图形内部的任何一个数都不大于 a,b,c 中的最大者,也不小于它们之中的最小者. 从而全图中的最大数就是 a,b,c 中的最大数. 全图中的最小数也就是 a,b,c 中的最小数. 所以,只要 a,b,c 全都相等,便有 $r=0$;只要它们不全相等,便有$r=1$.

接下来的问题是求出 S_n. 由于我们已经对数的排列规律了解清楚,所以求出 S_n 也就已经没有原则性的困难了. 不过如果我们只是停留在这种认识水平上,那么就还需要求出这些等差数列的和,因而需要面对较大的计算量,并需考虑各种细节.

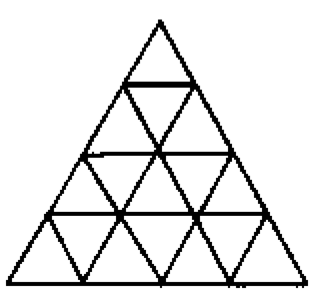


图 3.6

能不能有更好的解决办法? 当然有,这就要看我们能不能坚持由简单情形考虑起,并从中寻求启示了. 我们可以设想:如果 $a=b=c$,那么显然只要求出图形中的结点数目,就可以求出 S_n,因为这时图形中放置的数全都相等. 而结点的数目是容易求的,由图 3.6 立即看出它们共有 $1+2+\cdots+(n+1)$

$=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$个.所以知道此时有 $S_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)a$,或者写成

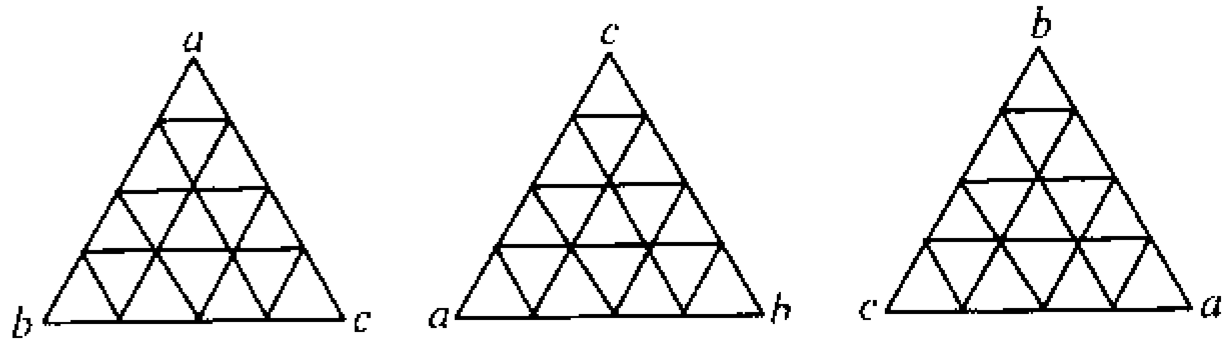


图 3.7

$$S_n = \frac{1}{6}(a+b+c)(n+1)(n+2)$$

上述情形处理中简洁明了的特点是十分诱人的,它使我们想到:"能否将 a、b、c 不全相等的情形化归上述简单情形?"不要以为这只是一种不可能实现的天方夜谭,问题是要找到办法把它化为现实.

我们来观察图 3.7 中的 3 个正三角形.它们都是同一个三角形,不过放置的角度有所不同.它们中的数字之和当然都是 S_n.如果设想将这 3 个三角形迭置起来,迭置时不改变它们原来的放置角度,然后将这 3 个三角形每一相迭结点上的 3 个数都加起来,显而易见,其和都是 $a+b+c$,于是我们就得到了一个与简单情形完全类似的三角形.利用前面的计算结果就立即可以知道,该三角形中所有数字之和为 $3S_n=\frac{1}{2}(a+b+c)(n+1)(n+2)$,这样我们也就求得了

$$S_n = \frac{1}{6}(a+b+c)(n+1)(n+2)$$

于是，我们完成了例 3 的全部解答.

回顾例 3 的解答过程，我们有许多体会可谈. 概括起来，最主要的有以下 3 点：

(1)考察简单情形的一个重要目的是为了寻求启示，因而我们不要轻易离开已经考察过的简单情形，而应抓住它，仔细观察它，反复推敲它，从中发掘出尽可能多的信息，寻找出尽可能多的启示.

(2)何谓简单情形？这本没有一个明确的含义，大凡是易于入手，而又对解决问题有益的情形都可算入其列. 因此在考察中就又有一个如何选择的问题. 拿例 3 来说，我们先后考察过两种不同意义上的简单情形，一种是 $n=2$ 的情形，还有一种是 $a=b=c$ 的情形，两种情形各有各的用处，在解答中都不可缺少. 在其它问题中该作何种选择，当以解题的需要为准则.

(3)将一般情形化归简单情形，是以简单情形为钥匙解决问题的一种重要形式. 要用好这把钥匙，就要在转化上狠下功夫，而这往往需要有一番精巧的构思，例如将 3 个三角形迭置等等.

我们再来看一个认真地从简单情况寻求启示的典型例子.

【例 4】 30 张卡片上分别写有编号 1，2，…，30，它们被任意地等间距地摆放在一个圆周上. 容许交换任何两张相邻卡片的位置. 在经过一系列这种交换之后，发现每张卡片都位于原来位置的对径点上(同一直径的两端互为对径点). 证

明，必在上述交换过程中的某一步上，两张交换位置的卡片上的号码之和等于 31.

在这里，30 张卡片不能算多，也不能算少. 但是，相对于我们看清问题来说，还是太多了点. 为了能看清问题，我们还是减少卡片的张数，先来看一看最简单的情况. 为此，我们将卡片的张数记作 n. 并且要来看看是否在上述交换过程中的某一步上，两张交换位置的卡片上的号码之和等于 $n+1$. 由于每张卡片最后都被换到原来位置的对径点上，所以卡片的张数 n 只能为偶数.

$n=2$ 的情况当然最简单，此时两张卡片上分别写有编号 1 和 2，要把它们都换到对径点上，势必要交换它们的位置，此时两张卡片上的号码之和恰好为 $n+1=3$，知此时命题成立. 但是这种情况过于简单，不能给我们提供什么启示. 所以，我们来看 $n=4$ 的情形.

有趣的是，当 $n=4$ 时，命题并不成立.

此时，4 张卡片等间距地分布在圆周的上下左右 4 个位置上. 我们从右方位置开始，按顺时针顺序依次记录卡片的编号. 容易举出如下反例：

一开始为(1,3,2,4)，交换 1 和 3，得到(3,1,2,4)；再交换 1 和 2，得到(3,2,1,4)；再交换 3 和 4，得到(4,2,1,3)；最后交换 2 和 4，得到(2,4,1,3). 此时各张卡片均已到达原来位置的对径点(见图 3.8).

检查上述交换过程，发现任何时刻交换位置的两张卡片的号码之和都不等于 $n+1=5$.

这种情况令我们深思.它表明命题中的断言并不是对一切偶数 n 都成立.面对这种情况,我们应当怎么办?一种很自然的想法是:再看看 $n=6$ 的情形.这当然未尝不可.但是 $n=6$ 的情形已不十分简单,做起来很需下一番功夫.一种较为合算的办法是:紧紧抓住 $n=2$ 和 $n=4$ 的情形不放,以求从中发掘信息!试想,我们已经在这些情况上花了那么多劲,轻易放弃它不是太可惜了吗?那么,$n=2$ 和 $n=4$ 的情形能告诉我们些什么呢?

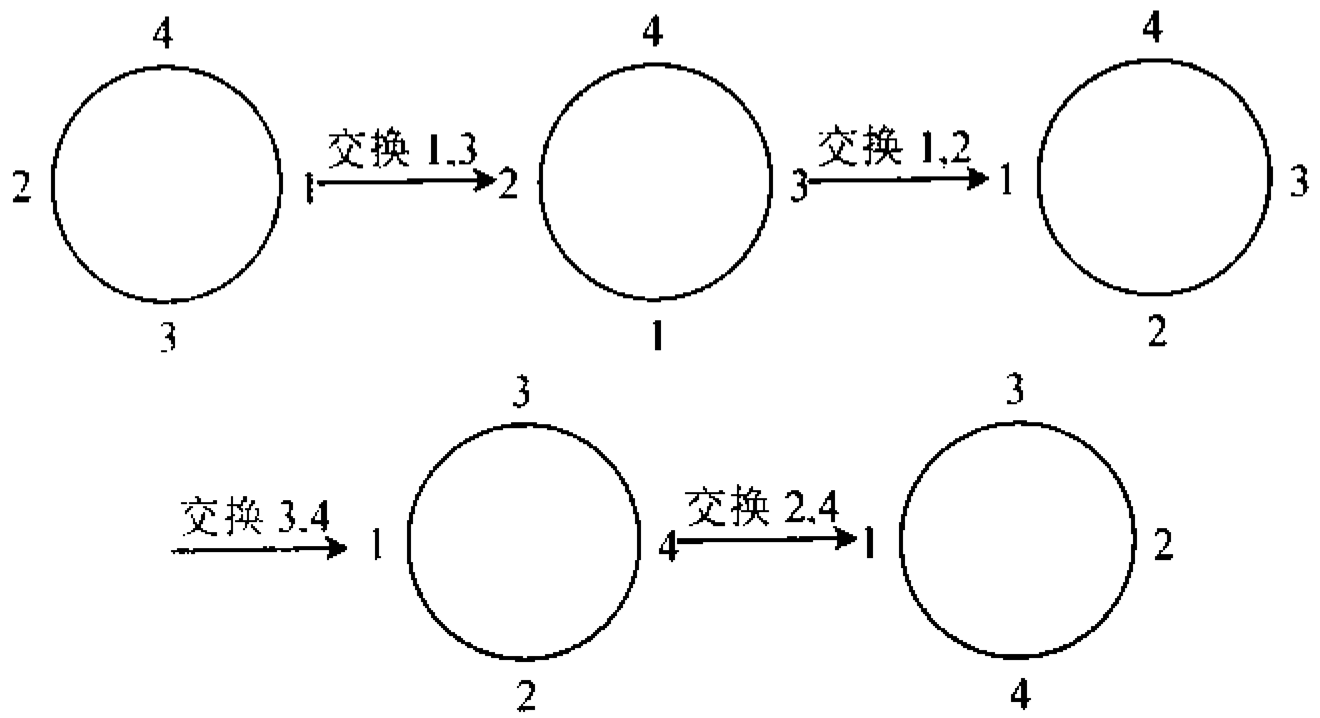


图 3.8

首先,$n=2$ 时命题成立,$n=4$ 时不成立,这可能预示着命题仅对非 4 的倍数的偶数 n 成立,因为题中的 n 等于 30,不是 4 的倍数.这就是一条重要的启示!为了弄清楚究竟是否如此,我们当然还是来仔细研究 $n=4$ 时的反例为妥.

经过仔细观察,我们发现,在上述反例中,1 和 4 号卡片都是经过顺时针方向运动一步步到达对径点的,而 2 和 3 号卡片则都是经过逆时针方向运动一步步到达对径点的,由于

它们的运动方向相同，所以它们不会交换相互位置. 这就是问题的关键之所在. 由此，我们获知：

(1)由于每张卡片都要在运动之后到达原来位置的对径点，所以每张卡片的有效运动距离(扣除往返运动中所多余移动的距离)都是半个圆周，所以归根到底每张卡片都是在一个方向比另一个方向上多移动了半个圆周. 我们把顺时针方向多运动半个圆周的卡片称为"顺向"移动的，而把逆时针方向多运动半个圆周的卡片称为"逆向"移动的. 由于卡片们都是通过两张两张互换位置来运动的，所以一定有一半卡片是"顺向"移动的，一半卡片是"逆向"移动的.

(2)每两张同为"顺向"移动的卡片不会交换位置，每两张同为"逆向"移动的卡片也不会交换位置；而任何两张不同方向移动(即一张"顺向"移动，另一张"逆向"移动)的卡片则都会在移动中的某一时刻交换位置.

当然，上述想法还需严格论证(留给读者自己完成). 但是利用这些想法，我们就可以给出题目的解答了.

因为一共有 30 张卡片，所以其中一定有 15 张卡片"顺向"移动，也有 15 张卡片"逆向"移动. 而为了避免两张交换位置的卡片上的号码之和等于 31，应当使每两张号码之和等于 31 的卡片都同向运动. 这就是说，如下每个括号中的两张卡片都应同向运动：(1,30)，(2,29)，…，(15,16)，但是这样一来，每个方向上移动的卡片数目都应为偶数. 上述两件事情是矛盾的，从而无法办到. 于是必然会有某个括号中的两张卡片作不同方向的移动，故而它们会在移动中的某一时刻

交换位置，从而使得交换位置的两张卡片上的号码之和等于31.

显然，这个证明思路可以移植到一共有 $n=4k+2$ 张卡片的场合.

这个例子再清楚不过地向我们展示了向简单情况寻求启示的重要性.它告诉我们，千万不要轻易放弃已经考察过的简单情况，不管它展示的是正面的结论，还是反面的结论，深入研究它都有好处，都有可能给我们带来启发.

在数学竞赛中常有一些以“开放型问题”(Open problems)形式出现的试题，要求应试者自行寻求答案.我们知道，学习数学，主要是学习解决由他人提出并已有了答案的问题；而独立从事数学研究的阶段，则是试图解决自己提出的或是由他人提出但至今还没有答案的问题.这类以开放型问题形式出现的试题，虽然在命题者已经有了答案，但在试题中却不明言指出，因此是对应试者的探索能力的一种很好的锻炼和检测，有利于提高其科学素养.毫无疑问，坚持以考察简单情形作为探索的起点，注意从中寻求启示，是解决这类问题的有效手段.

大家知道，只要在平面上给出一些点以及连结它们的一些线段，便得到了一个平面图.这些点叫做图的顶点，线段叫做图的边，由一个顶点连出的线段数目叫做该顶点的度数.在作下面的讨论中，我们约定图中的边都是一些直线段.

下面来看一道1985年奥地利和波兰联合数学竞赛试题，它就是以“开放型问题”的形式出现的.虽然我们在前面

也介绍过一些以“能否”“是否存在”等问题形式出现的题目，但它们在寻求答案时的难度和思考方面的深度都不及下面的例题.

【例 5】 某个图具有 $n\geqslant 8$ 个顶点，试问，这些顶点的度数可否分别为 $4,5,6,\cdots,n-4,n-3,n-2,n-2,n-2,n-1,n-1,n-1$？

由于 $n\geqslant 8$，所以最简单的情形就是 $n=8$. 由图 3.9 看出这时存在着合乎要求的图. 事实上该图中的 A_1，A_2，A_3 各为 7 度，A_4，A_5，A_6 各为 6 度，A_7 为 5 度，A_8 为 4 度，恰好符合要求.

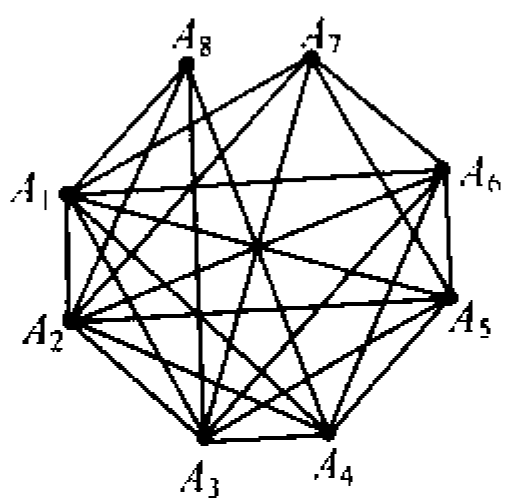


图 3.9

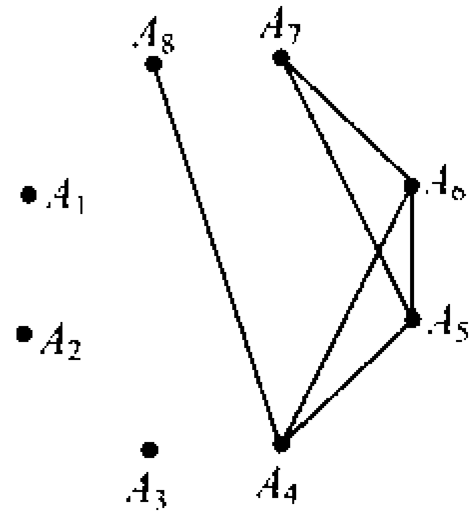


图 3.10

从图 3.9 的绘制过程，我们发现，真正需要解决连线问题的只是那些不足 7 度的点，即 A_4—A_8，所以可将图 3.9 简单地画成图 3.10 的形式.

在图 3.9 和图 3.10 的基础上，我们又立即可以得出图 3.11. 事实上，只要再将新增加的顶点分别与 A_1—A_6 相连，即可使 A_1—A_3 分别为 8 度，A_4—A_6 分别为 7 度，A_9 为 6 度，而 A_7 和 A_8 分别保持为 5 度和 4 度. 于是知 $n=9$ 时也存在

着合乎要求的图.

我们所以要在图 3.9 和图 3.10 的基础上去构筑图3.11，目的乃是试图为"如何由 $n=k$ 的图形得出 $n=k+1$ 的图形"寻得一些启示，以作为归纳证明时的基础. 然而由 $n=8$ 得 $n=9$ 的过程却并不使人感觉乐观，因为所用的方法过于依赖于图的顶点数目了. 事实上，如果再沿用这一方法，就已不能由 $n=9$ 的图形得出 $n=10$ 的图了. 这就使我们再次面临困境，从而不得不对"当 $n\geqslant 10$ 时，究竟是否存在合乎要求的图?"的问题再作审慎的考虑. 这样，我们的面前就仍然存在两种可能的前景：要么是作图上所遇到的困难，这只是技术性的，可以通过努力得到解决；要么是无法克服这种困难，因为所述的图形根本就不存在. 但究竟是何种前景，一时尚无从断言. 面对这种局面，如果继续纠缠于具体图形的画法，则恐弊多利少，我们应当换一个角度来考虑问题.

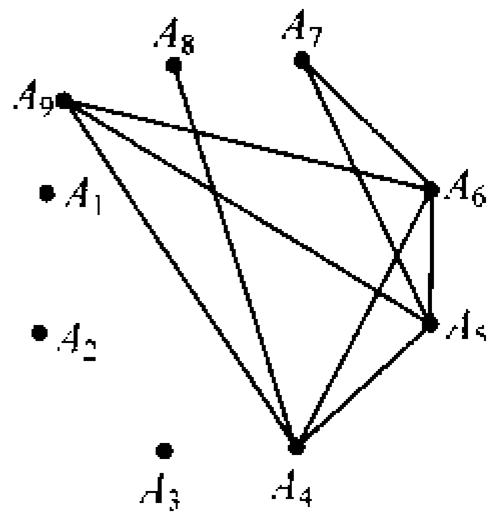


图 3.11

设 $n\geqslant 10$，我们将顶点分作三个子集合，分别记为

$$M_1=\{A_1,A_2,A_3\},M_2=\{A_4,A_5,A_6\}$$

$$M_3=\{A_7,A_8,\cdots,A_n\}$$

并使得 M_1 中 3 个顶点皆为 $n-1$ 度，M_2 中 3 个顶点皆为 $n-2$ 度，M_3 中 $n-6$ 个顶点依次为 $n-3,n-4,\cdots,4$ 度. 显然，M_1 中每个顶点都应与其余顶点相连，M_2 中每个顶点都至少与 M_3 中 $n-2-3-2$ 个顶点相连，这种由 M_2 连向 M_3 的线

段不会少于

$$3(n-7)=3(n-8)+2+1$$

条.由于 A_n 和 A_{n-1} 的度数分别是 4 和 5,它们又都已与 M_1 中连有 3 条线段,所以只能分别再与 M_2 中 1 个点和 2 个点相连.这说明 M_3 中其余的顶点都必须同 M_2 中每个顶点相连,才能使连线数目达到 $3(n-7)$ 条.这样一来,由 A_n,A_{n-1},A_{n-2} 所连出的线段数目就已分别达到 4,5,6 条,因而不能再同其他顶点相连了.然而 A_7 是一个 $n-3$ 度的顶点,除了已与 M_1 和 M_2 中连有的 6 条线段外,至少还应与 M_3 中 $n-3-6=n-9$ 个顶点相连.但是,纵然它与 A_8,A_9,…,A_{n-3} 都相连,也至多仅有 $n-10$ 个顶点可以相连,可见 A_7 的连线问题无从解决.这是一个本质性的困难.由此说明了,当 $n\geqslant 10$ 时所述的图不可能存在.

综合上述,我们得到如下结论:当 $n=8$ 和 9 时,存在着具有所述性质的图,而当 $n\geqslant 10$ 时,不存在这种图.

像这种"前面两种情况肯定,后面情况否定"的问题在数学竞赛中是不多见的,在数学上也不常见到,所以值得我们好好总结.

回顾该例题的解答过程,有如下几条经验值得我们记取:

(1)在考察简单情况时仍然存在简化的问题,例如将图 9 简化为图 10 后更有利于观察.

(2)考察简单情况乃是为了解决一般问题寻求启示,因此在对较小的 n 获得答案后,应立足于考察能否将答案推广

到较大的 n 去，能否找到不依赖于 n 的具体值的一般性方法，等等.

(3)在沿用原来的方法遇到困难时，应当变换考察角度以作进一步的探讨，一般不宜一条道跑到黑. 例如，在发现由 $n=9$ 不能用旧法得到 $n=10$ 之图后，我们改为考察顶点之间的连线与度数之间的关系，并因此寻得矛盾. 如果这样还不能解决问题，那么一般来说还应当再变换角度考察问题.

(4)在考察中一般应抓住性质特殊的对象下手，例如 M_9 中度数最大的 A_7，度数最小的 A_n，A_{n-1} 之类，这样比较有利于暴露线索，发现规律. 关于这一点，我们还要在后面专门论述.

下面我们要来看一个例题，它在处理简单情况时所表现出来的前瞻后顾精神很具特色. 它时时不忘为后面开路，处处注意找出前后情况的有机联系，充分展示了考察简单情况时所需注意的一个重要方面.

【例 6】 证明，存在无穷多个自然数 n，使得可把 $1,2,\cdots,3n$ 这 $3n$ 个数排成如下形式的数表：

$$a_1,a_2,\cdots,a_n$$

$$b_1,b_2,\cdots,b_n$$

$$c_1,c_2,\cdots,c_n$$

使之满足条件 $a_1+b_1=c_1,a_2+b_2=c_2,\cdots,a_n+b_n=c_n$.

显然，为了证明有无穷多个这样的自然数 n，我们首先应当找出一些这样的自然数 n，并从中发现它们的规律. 为便于说话起见，我们把“这样的”自然数 n 称为具有性质 A.

易见，$n=1$ 就具有性质 A，但是 2 和 3 都不具有性质 A. 那么，下一个具有性质 A 的自然数该是哪一个呢？为了看清问题，我们还是先来分析一下“性质 A”的含义.

由于“性质 A”与求和有关，所以我们还是通过“和数”来考察它. 为此，我们记

$$A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n,\quad B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$$

$$C_n=c_1+c_2+\cdots+c_n$$

于是当 n 具有“性质 A”时，有 $A_n+B_n=C_n$，并且有

$$1+2+\cdots+3n=\frac{1}{2}3n(3n+1)=A_n+B_n+C_n=2C_n$$

从而，当 n 具有“性质 A”时，必有

$$3n(3n+1)=4C_n$$

这就是说，$3n(3n+1)$一定是 4 的倍数. 又由于 3 和 4 互质，所以 $n(3n+1)$一定是 4 的倍数. 由此不难知，n 或者是 4 的倍数，或者是被 4 除余 1 的自然数.

如此看来，我们要找的下一个目标就是 4 或 5，先看 $n=4$. 经过试探，不难对 $n=4$ 排出多种满足要求的数表(读者不妨自己试一试). 但是，应当注意，我们不仅仅是要通过排表来看看 $n=4$ 是否具有“性质 A”，更重要的是，我们需要为证明有无穷多个自然数 n 具有“性质 A”寻找规律，所以我们要在对 $n=4$ 时的数表排法上多下功夫. 换句话说，我们不仅要把 $n=4$ 时的数表排出来，还要让它昭示“下一个 n 是谁，”“下一张表该怎样排”. 而要做到这一点，我们就应该使 $n=4$ 时的数表与 $n=1$ 时的数表有联系. 因为只有它同前面的 n

有联系，那么它后面的 n 才会同它有联系. 为此，我们要给出 $n=4$ 时的数表的一种排法，使得它与 $n=1$ 时的数表有密切的联系：

$n=1$		$n=4$		
1	2	1	3	5
2	4	9	8	7
3	6	10	11	12

显然，$n=1$ 时的数表本质上只有上述的一种排法，而在排 $n=4$ 的数表时，我们要使它与 $n=1$ 时的排法有联系，那么最直接的做法就是把 1，2，3 这三个数放在同一列中. 但是这样一来，我们就把三个最小的数都用完了，从而使其余的数不能再排. 这就是说，我们不能把 $n=1$ 时的数表直接搬到 $n=4$ 的数表中作为它的一个部分. 既然不能照搬，但是又要建立联系，那么我们就来变通地利用它. 为此，我们把 2，4，6 这三个数放在同一列中. 这样，既没有把三个最小的数都用完，又本质上利用了 $n=1$ 时数表的排法. 此时我们发现，前 6 个自然数中的所有偶数全已排定. 接下来，我们把前 6 个自然数中的所有奇数 1，3，5 按照递增顺序排在第一行，形成公差为 2 的等差数列. 再接下来，在它们下面依次排上 9，8，7，形成公差为 -1 的等差数列. 于是上下相加后，刚好形成公差为 1 的等差数列，也就是 10，11，12. 如此排定的数表使我们深受鼓舞. 我们不妨再按此办法排出下一张表来. 现在的问题是该对哪一个 n 来排？注意到 $n=4$ 是 $n=1$ 的 4 倍，于是为了利用所找到的规律，我们来对 4 的 4 倍，即 $n=16$ 来排为

妥.仿前所做，我们把 $n=4$ 时的数表中的每一个数都乘以 2 后作为 $n=16$ 时数表的前 4 列，于是用完了前 24 个自然数中的所有偶数.再把前 24 个自然数中的所有奇数排在第 5 列至第 12 列中的第一行，形成公差为 2 的等差数列；然后在它们下方的第二行中依次排上 36，35，…，25，形成公差为 -1 的等差数列.于是上下相加后，刚好形成公差为 1 的等差数列，也就是 37，38，…，48.具体写出来，就是：

4	2	6	10	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
8	18	16	14	36	35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25
12	20	22	24	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48

值得指出的是，我们不仅排出了又一张表，而且验证了我们所找到的规律.并且，该规律适用于一切形如 4^m 的自然数 n，其中 m 为非负整数.相信读者有能力写出关于 m 的归纳证明.

由于 m 可为一切非负整数，所以我们找到了无穷多个具有“性质 A”的自然数 n.

在这里，我们需要指出两点：

1）由于我们只需证明有无穷多个具有“性质 A”的自然数 n，而不是要求出一切具有“性质 A”的自然数 n，所以我们只要证明“一切形如 4^m 的自然数 n 都具有性质 A，其中 m 为任何非负整数”即可，而无须再去考察被 4 除余 1 的自然数.

2）本题的解答关键是排好 $n=4$ 时的数表，使之起到承上启下的作用.从而再次表明认真考察简单情况的重要性.

最后，作为本节的结束，我们来看一个关于算术平均值的刻画问题，它是1959年美国普特南数学竞赛中的一道试题.

大家知道，n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的算术平均值是

$$\overline{X}_{(n)} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

算术平均值的许多性质，读者是熟知的，尤其算术—几何平均不等式更是经常运用. 但是这个例题却是关于算术平均值的性质刻画问题的. 未见得广为人知. 由于这个问题具有一定的难度，一时读不懂它的读者可以先撇开它不看，这并不妨碍阅读后面的内容.

【例 7】 设 $f_1(x_1), f_2(x_1, x_2), \cdots, f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n), \cdots$ 是一列实变数函数，具备下述性质：

(1)对每个正整数 n 及每对实数 t, y，都有

$$f_n(tx_1 + y, \cdots, tx_n + y) = tf_n(x_1, \cdots, x_n) + y$$

(2)对每个正整数 n 及 n 个实数 $x_1, \cdots, x_n$ 的任一排列 $x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}$，都有

$$f_n(x_{i_1}, \cdots, x_{i_n}) = f_n(x_1, \cdots, x_n)$$

(3)对每个正整数 $n>1$，都有

$$\begin{aligned} & f_n(x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n) \\ = & f_n(\underbrace{f_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1}), \cdots, f_{n-1}(x_1, \cdots, x_{n-1})}_{\text{共} n-1 \text{个}}, x_n) \end{aligned}$$

证明，对一切正整数 n 都有

$$f_n(x_1, \cdots, x_n) = \overline{X}_{(n)} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

解答这个问题的自然想法是采用数学归纳法. 然而略经思索就会发现,由 $n=k$ 向 $n=k+1$ 的过渡将会十分棘手.

我们先来看 $n=1$ 的情形. 任取实数 x_1,由性质(1)即得

$$f_1(x_1)=f_1(0+x_1)=f_1(0\times 1+x_1)$$
$$=0\times f_1(1)+x_1=x_1=\overline{X}_{(1)}$$

可见命题是成立的. 但要立即转入从 $n=k$ 向 $n=k+1$ 的过渡,却使人感觉信心不足. 因为 $n=1$ 的情形过于简单,推导中甚至连性质(2)和性质(3)都没有触及. 这两个性质,尤其是性质(3)该如何运用,我们仍然心中无数. 妥当的办法是先由 $n=2$ 和 3 看起,以便寻得启示和积累经验.

当 $n=2$ 时,我们可以先由性质(1)得到

$$f_2(x_1,x_2)=f_2(x_1-\overline{X}_{(2)}+\overline{X}_{(2)},x_2-\overline{X}_{(2)}+\overline{X}_{(2)})$$
$$=f_2(x_1-\overline{X}_{(2)},x_2-\overline{X}_{(2)})+\overline{X}_{(2)}$$
$$=f_2\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_2-x_1}{2}\right)+\overline{X}_{(2)}$$

于是为证 $f_2(x_1,x_2)=\overline{X}_{(2)}$,只需再证

$$f_2\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_2-x_1}{2}\right)=0$$

但因 $f_2\left(\frac{x_1-x_2}{2},\frac{x_2-x_1}{2}\right)=\frac{x_1-x_2}{2}f_2(1,-1)$,所以又归结到证明 $f_2(1,-1)=0$. 而这并不困难,因由性质(2)知 $f_2(1,-1)=f_2(-1,1)$,而由性质(1)却又知 $f_2(1,-1)=-f_2(-1,1)$,所以就有 $f_2(1,-1)=-f_2(1,-1)$,即 $f_2(1,-1)=0$. 至此即知当 $n=2$ 时命题也成立.

当 $n=3$ 时,先由性质(1)知道

$$f_3(x_1,x_2,x_3)=f_3(x_1-\overline{X}_{(3)},x_2-\overline{X}_{(3)},x_3-\overline{X}_{(3)})+\overline{X}_{(3)}$$

再对上式右端用一次性质(3)即得$\left(仍以\ \overline{X}_{(2)}\ 记\dfrac{x_1+x_2}{2}\right)$

$$\begin{aligned}&f_3(x_1,x_2,x_3)\\&=f_3(f_2(x_1-\overline{X}_{(3)},x_2-\overline{X}_{(3)}),f_2(x_1-\overline{X}_{(3)},x_2-\overline{X}_{(3)}),x_3\\&\quad-\overline{X}_{(3)})+\overline{X}_{(3)}\\&=f_3(\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)},\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)},x_3-\overline{X}_{(3)})+\overline{X}_{(3)},\end{aligned}$$

于是问题仍归结为证明

$f_3(\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)},\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)},x_3-\overline{X}_{(3)})=0$. 注意到 $2(\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)})+(x_3-\overline{X}_{(3)})=x_1+x_2+x_3-3\overline{X}_{(3)}=0$,及 $f_2[2(\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)}),0]=\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)}$,所以只要再反向运用一次性质(3),就可以看到

$$\begin{aligned}&f_3(\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)},\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)},x_3-\overline{X}_{(3)})\\&=f_3(f_2(2(\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)}),0),f_2(2(\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)}),0),x_3-\overline{X}_{(3)})\\&=f_3(2(\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)}),0,x_3-\overline{X}_{(3)})\\&=2(\overline{X}_{(2)}-\overline{X}_{(3)})f_3(1,0,-1)\end{aligned}$$

于是仍将问题归结到证明 $f_3(1,0,-1)=0$,其证明过程与上述证明 $f_2(1,-1)=0$ 的过程类似,无须赘述,即知当 $n=3$ 时命题也成立.

有了上述关于 $n=2$ 和 3 的经验,我们就可以实行由 $n=k$ 向 $n=k+1$ 的过渡了. 首先假设 $n=k$ 时命题成立,即有

$$f_k(x_1,\cdots,x_k)=\overline{X}_{(k)}=\frac{x_1+\cdots+x_k}{k}$$

要来证明 $n=k+1$ 时命题也成立.

先来用一次性质(1),得到

$$f_{k+1}(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})=f_{k+1}(x_1-\overline{X}_{(k+1)},\cdots,x_k-\overline{X}_{(k+1)},x_{k+1}-\overline{X}_{(k+1)})+\overline{X}_{(k+1)}$$

再对上式右端运用性质(3)和归纳假设,得到

$$f_{k+1}(x_1,\cdots,x_k,x_{k+1})=f_{k+1}(\underbrace{\overline{X}_{(k)}-\overline{X}_{(k+1)},\cdots,\overline{X}_{(k)}-\overline{X}_{(k+1)}}_{\text{共}k\text{个}},x_{k+1}-\overline{X}_{(k+1)})+\overline{X}_{(k+1)}$$

然后再反向用一次性质(3)于上式右端,就有

$$\begin{aligned}&f_{k+1}(x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1})\\&=f_{k+1}(k(\overline{X}_{(k)}-\overline{X}_{(k+1)}),\underbrace{0,\cdots,0}_{k-1\text{个}0},x_{k+1}-\overline{X}_{(k+1)})+\overline{X}_{(k+1)}\end{aligned}$$

再注意到 $k(\overline{X}_{(k)}-\overline{X}_{(k+1)})+(x_{k+1}-\overline{X}_{(k+1)})=0$,知问题仍然归结为证明 $f_{k+1}(1,0,\cdots,0,-1)=0$.

再运用同证明 $f_2(1,-1)=0$ 完全类似的办法即可证得该式,知当 $n=k+1$ 时命题也成立. 于是由归纳法原理得证命题,证毕.

回顾上述证明过程,我们可以深切体会到考察 $n=2$ 和 3 的情形对于顺利实现归纳证明所起的重要作用. 一般来说,$n=1$ 的情形过于简单,其中蕴藏不了多少信息. 而 $n=2$ 和 3 的情形则不然,它们往往是 $n=k$ 和 $k+1$ 情形的缩影,其中蕴涵的信息通常足以帮助实现 n 由 k 向 $k+1$ 的过渡. 正如我们由上述证明所看到的,$n=2$ 的情形提供了 $f_2(1,-1)=0$ 的证法,而 $n=3$ 则提供了对于性质(3)的用法. 如果没有这些启示,尤其是对于性质(3)的反向运用办法,要想实现归纳

过渡确是不可能的.另外,考察 $n=3$ 通常还要比 $n=2$ 多一个目的,就是一般还想从中寻求如何运用归纳假设的启示,所以考虑 $n=3$ 时一般不应另起炉灶,而应把它的推导建立在 $n=2$ 时命题已成立的基础之上,这一点也是需要注意的.

通过以上的讨论,我们已经明白了:认真解决简单的情形,是解决许多数学问题的至关重要的一环.其实不只是背景具体的古典问题,而且在很多极为抽象的现代数学的问题中也都是这样.一旦认真解决了简单的情形,而又认真解决了由具体向抽象的过渡问题,那么对抽象的概念的理解便不存在原则性的困难了.这便是考察简单情形对解决数学问题所起的一种启示作用.后面我们还要举一些生动例子来说明这种作用.

读者们或许听说过 n 维欧氏空间的提法.对于 4 维以上的空间,一般已不再有具体的几何背景,不过可以赋以物理解释.但是尽管如此,对高维空间仍然可以运用几何语言、并通过几何式的方法来加以研究,其原因便是由于它们是建立在 $n=2$(平面)和 $n=3$(立体)时的欧氏几何的基础上的.事实上,人们通常就是从对 $n=2$ 及由 $n=2$ 向 $n=3$ 的推广的角度,去比照和认识 n 维空间的理论和性质的.

善于从简单情形去认识复杂事物,善于将抽象理论放到具体而简单的背景之下去考察,是数学上的一种极其可贵的品格,也是使得抽象的数学命题变得有血有肉、丰满充实起来的一种有效手段.应当尽早养成这种品格,久而久之,你便会获益匪浅.

4　由简单情形提供对比

人们以简单情形作为考察问题的起点的另一个重要目的，是试图由简单情形为一般情形提供对比. 所以在考察问题时，往往首先摆出一种可使结论显然成立的简单情形来，作为一面镜子来为一般情形造成某种对比，然后由对比中发现出两种情形间的最本质的不同之处，再对症下药，求得问题的彻底解决. 这也是一种解决数学问题的常用方法.

我们先来看两个例题，然后再来解释这种方法.

【例 1】 有 $2n$ 个人($n\geqslant 2$)参加一个会议，现知其中每个人都至少有 n 个熟人. 证明，可以从中找出 4 个人来围着圆桌坐下，使得每两个邻座都是熟人.

我们来分两种情形考虑：

(1)如果与会者中每两人都互相熟识，则命题显然成立，因为任意叫出 4 人都能满足要求.

(2)如果与会者不都互相熟识，则其中有某甲和某乙互不熟识，于是他们在其余 $2n-2$ 个与会者中至少有 n 个熟人，从而其中至少有 2 人是他们的共同熟人. 于是可让这 2 人相对坐下，再让某甲和某乙相对坐下，即可满足要求.

综上讨论，在任何情形下都能找出 4 人满足要求.

【例 2】 平面上给出了 $2n+1$ 个点，现知其中每 3 个点

中都至少有两个点的距离不大于 1. 证明，可用某个半径是 1 的圆至少盖住其中 $n+1$ 个点.

我们也来分两种情形考虑：

(1)如果其中任意两点间的距离都不大于 1，这时以其中任意 1 个点为圆心作一个半径是 1 的圆，就都可以盖住所有的点. 故命题成立.

(2)如果其中有某两个点 A 和 B 的距离大于 1，则由题意知，对于其余 $2n-1$ 个点中的任意一点 C，如果不是 $AC\leqslant 1$，就一定有 $BC\leqslant 1$. 于是只要分别以 A,B 为圆心各作一个半径是 1 的圆$\odot A$ 和$\odot B$，则$\odot A\cup\odot B$ 就可盖住所有 $2n+1$ 个点，从而$\odot A$ 和$\odot B$ 至少有一者盖住了不少于 $n+1$ 个点.

所以在一切情形下命题都成立.

我们已经看到，上述两个例题都遵循同样的解题思路，即利用对比的手法，达到暴露线索的目的. 如果把它们所利用的对比集中在一起，就可以看得更为清楚一些：

“如果与会者中**每**两人**都互相**熟识，则……；

如果与会者**不都**互相熟识，则**有**某甲和某乙**互不**熟识，…….”

“如果其中**任意**两点间的距离**都不大于** 1，则……；

如果其中**有**某两个点 A 和 B 的距离**大于** 1，则…….”

这里都将问题分为两种情形考虑，然而却不是随意地化分为两种情形. 从逻辑关系上说，两种情形构成了互为补充的两个方面；然而从份量上说，两种情形却处于极不相称的位置. 第一种情形一般极为简单，第二种情形则往往较为复

杂. 在第一种情形之下，命题的成立通常一目了然，因此其作用并不是为了给解决后一种情形提供启示，而是为了解决后一种情形指示突破口. 在后一种情形的处理中，正是沿着这个突破口发展战果，抓住由对比中暴露出来的特殊对象穷追猛打，达到最终解决问题的目的. 事实上，在例 1 中，正是抓住了某甲和某乙，而在例 2 中，则是抓住了 A 和 B 两点，发展战果，取得突破的. 在以后的进一步学习中，大家将会看到，这是一种在高等数学中经常采用的方法.

我们再来看一个用类似的方法解答的问题.

【例 3】 围棋训练赛中每两人都下两盘棋，每人执白执黑各一盘. 在每盘中，胜者得一分，败者得 0 分，若为平局，则各得半分. 比赛结束后，发现所有参赛者都得到同样多的分数. 证明，他们中有两个人以执白战胜了同样多的对手.

我们设共有 n 个人参加了这次训练赛，从而每个人都有 $n-1$ 个对手，并且每个人最终都得了 $n-1$ 分. 为了证明题中结论，我们分两种情况讨论：

情况 1　无人以执白战胜了所有对手. 此时，各人执白所战胜的对手数目都不多于 $n-2$ 个，也不少于 0 个，从而一共只有 $n-1$ 种不同情况. 所以由抽屉原则知，n 个参赛者中必有两人以执白战胜了同样多的对手.

情况 2　有人以执白战胜了所有对手. 由于两人对弈时，若此人执白，则彼人必执黑，所以有可能有多人均以执白战胜了所有对手. 而当至少有二人以执白战胜了所有对手时，题中结论已经成立，所以只需看仅有一人（称其为某甲）以执

白战胜了所有对手的情形. 值得注意的是,由于某甲以执白战胜了所有 $n-1$ 个对手,所以他的所有分数(共 $n-1$ 分)全是靠执白得来的,这也就是说,他每逢执黑必败(也不可能有平局,否则总分超过 $n-1$ 分). 从而,其余 $n-1$ 个人都以执白赢了某甲,所以这 $n-1$ 个人每人以执白所战胜的对手人数都不少于 1 个,但也都不会多于 $n-2$ 个(因为除某甲之外,再无人以执白战胜了所有对手),所以最多只有 $n-2$ 种不同情况. 于是,再由抽屉原则知,在其余 $n-1$ 人中有两个人以执白战胜了同样多的对手.

我们在这里也是先列出一种简单情况——无人以执白战胜了所有对手,并且仅用三言两语就得到了此种情况下的结论. 然后再涉及较复杂的情况——仅有一人(某甲)以执白战胜了所有对手的情形. 此时我们紧紧抓住某甲不放,以黑白的相对性(甲以执黑败给乙,等于乙以执白赢了甲)作为武器,考察各人以执白所战胜的对手人数的最大可能值和最小可能值. 虽然在这里两种情况的对比不像前两个例题那么强烈,但是在暴露突破口上所起的启示作用却是一样的. 正是由于在第一种情况中,无人以执白战胜了所有对手,所以在最后的情况中,唯一的以执白战胜了所有对手的某甲才成了我们特别关注的对象. 另外,还需指出的是,我们没有在解答过程中纠缠得分,而是始终在"人数"上做文章,是为了避免平局所可能造成的麻烦,这也是值得读者注意的.

下面来看一个关于平面上 5 个给定点间的位置关系的例题. 由 5 个点构成的点集,是平面点集中简单而又富有代

表性的特殊情形，许多有关平面点集的命题，都可以首先由 5 个点的情形考察起，所以我们还将另辟一节专作介绍. 现在我们仅来看一个例子，在第 4 节中，还将介绍它的另一种解法.

【例 4】 在平面上给出了 5 个点，现知其中任何 3 点都不共线. 证明，存在一个以上述点为顶点的凸四边形.

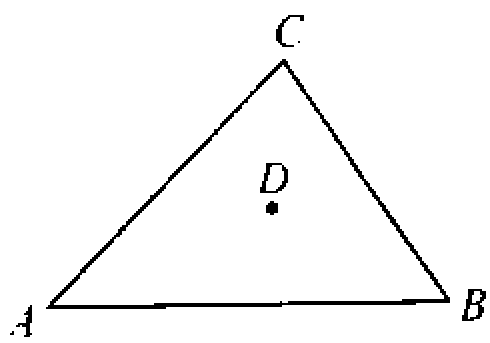


图 4.1

分两种情形考虑：

(1) 如果其中任意 4 点都构成凸四边形，则命题显然成立.

(2) 如果其中某 4 点 A,B,C,D 不构成凸四边形，则其中必有一点位于其余 3 点构成的三角形内部，不妨设 D 在 $\triangle ABC$ 内部(图 4.1). 我们来作一些直线和射线，将平面分割为一些区域，并如图 4.2 所示，分别将它们标上 1,2,3,4 四种记号. 点 E 必位于这些区域中的某一内部. 当 E 位于标有 1 的区域内时，A,B,D,E 构成凸四边形；当 E 位于标有 2 的区域内时，B,C,D,E 构成凸四边形；当 E 位于标有 3 的区域内时，A,C,D,E 构成凸四边形；当 E 位于标有 4 的区域内时，A,B,C,E 构成凸四边形.

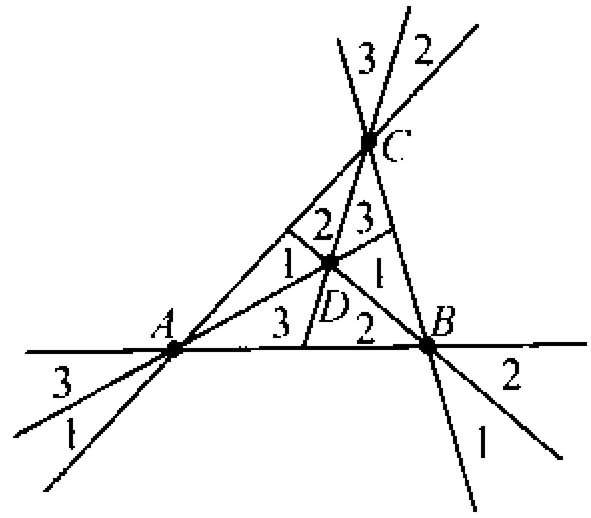


图 4.2

总之在一切情形下都存在以上述点为顶点的凸四边形.

在这个问题的解答中，我们仍然是抓住了 A,B,C,D 这

四个对象穷追猛打,不过只是对 E 的可能位置采取了枚举手法,所以基本思路与前面几个例题略有差异.

【例 5】 在一个面积为 1 的正三角形内部,任意放 5 个点. 证明,在此正三角形内,一定可以作 3 个正三角形盖住这 5 个点,这 3 个三角形的各边平行于原三角形的边,并且它们的面积之和不超过 0.64.

应当注意,这里说的是在三角形的内部放 5 个点,就是说这些点不能放在三角形的顶点上和边上. 其实,只要对下述证明略作修改,就可看出这种限制并不是必要的.

设 $\triangle ABC$ 是一个面积为 1 的正三角形,我们在它的每条边上各取两个点如图 4.3 所示,使得这些点到最近的顶点的距离都是边长的 1/5. 于是 $\triangle AB_2C_1$, $\triangle BC_2A_1$ 和 $\triangle CA_2B_1$ 都是各边平行于原三角形的边的正三角形,且面积都是0.64. 分两种情形考虑问题.

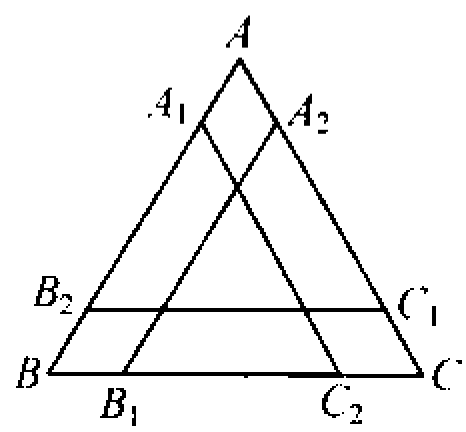
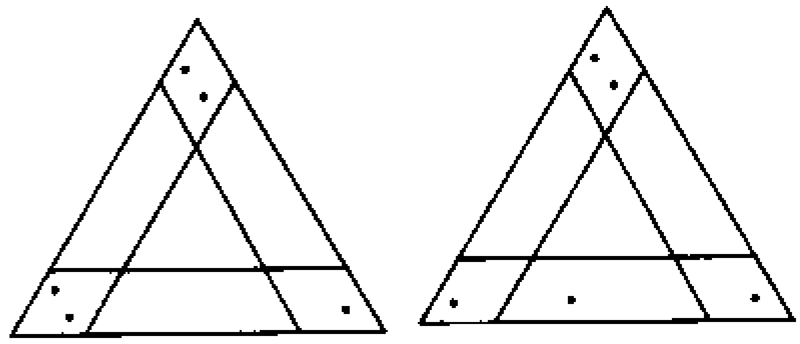


图 4.3

(1)如果 $\triangle AB_2C_1$, $\triangle BC_2A_1$, $\triangle CA_2B_1$ 中有一个至少盖住了所放 5 个点中的 3 个,则命题显然成立. 因为这 3 个点都在 $\triangle ABC$ 内部,所以当将盖住它们的三角形的某条边适当平移,而使三角形面积小于 0.64 后,仍能将它们盖住,然后再适当作两个小正三角形盖住其余两个点,便可使 5 个点全都盖住,且可保证所用的三个正三角形的面积之和不超过 0.64.

(2)如果上述 3 个面积为 0.64 的正三角形中任何一者都

最多盖住了两个点，则不难验证，5 个点的分布情况（从本质上说）只可能有图 4.4 所示的两类不同情况，即



(a)　　　　(b)

图 4.4

(a)5 个点分布在$\triangle ABC$3 个顶点处的 3 个菱形中，且每个菱形中都不超过两个点. 这时只要过每个菱形的位于$\triangle ABC$内部的顶点，作平行于$\triangle ABC$第三边的直线（因过每个这样的顶点处都已经有平行于$\triangle ABC$另外两条边的直线），即可由$\triangle ABC$中截得 3 个面积都是 0.16 的正三角形，它们盖住了全部 5 个点（图 4.5）.

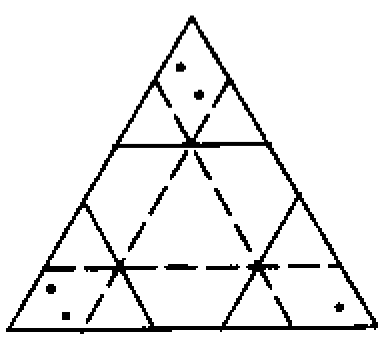


图 4.5

(b)有一个顶点处的菱形中有两个点，另外两个菱形中各有 1 个点，而在这两个菱形之间的梯形中还有 1 个点. 这时视梯形中的点距$\triangle ABC$的哪个顶点最近，而过其作该顶点对边的平行线，可自$\triangle ABC$截得一个过该顶点的、面积不超过 0.36 的正三角形，它盖住了该顶点处的菱形中的点和梯形中的点；对于含有两个点的菱形按(a)款处理，用一个面积为 0.16的正三角形盖住它们；再适当作一个小正三角形盖住剩下的点，即可完成覆盖任务（图 4.6）.

总之在一切情形下都可按照规则盖住 5 个点.

这个例题与前面 4 个例子比较起来,有一些不同之处.

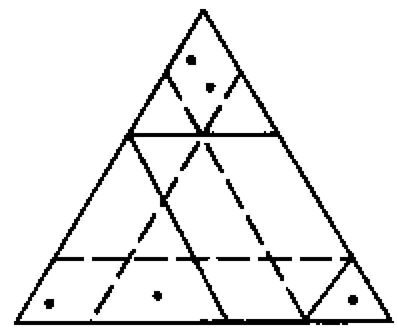


图 4.6

(1)本题一开始就引入了 3 个面积都是 0.64 的正三角形,这使人感觉有些突然,而以往则无此情况,在一开始时都只考虑一种极为平凡的因而易于想到的情形.但是应当指出,这种突然性只是一种外在的表现,而内在的思路却实际是十分自然的.事实上,解答一开始就紧紧扣住了 0.64 这个特殊的、引人注目的数字来思考问题,正是一种合乎逻辑而又易于想到的思考方式.因为这种一上来就设法将 0.64 落到实处的做法,正是一种开启思路的有益措施.

(2)对第二种情形的处理较前复杂,突出表现在归结成(a)及(b)两种情况时,需要有一番深入的思索和检验过程.

通过例 5,我们看到了运用对比手法解题中的一些复杂而需要灵活性的场合.在我国首届中学生数学冬令营的竞赛试题中,还有一道更加复杂和更加需要灵活性的试题,这道试题如下.

【例 6】 用任意的方式给平面上的每一个点染上黑色或白色.证明,一定存在一个边长为 1 或$\sqrt{3}$的正三角形,它的 3 个顶点是同色的.

我们先来给出本题的一种解法.分两种情形考虑:

(1)如果平面上存在一个边长为 1 的顶点同色的正三角形,则结论显然成立.

(2)如果不存在边长为1的顶点同色的正三角形，则一定存在两个不同色的距离为1的点 A 和 B. 我们来以 AB 为底作一个腰长为2的等腰$\triangle ABC$，则其顶点 C 或与 A 异色，或与 B 异色，不妨设 C 与 A 异色. 取 AC 中点 O，则 O 与 A，C 之一同色，不妨设 O 与 C 同色. 再以 OC 为边往两侧各作一个三角形$\triangle OCD$ 和$\triangle OCE$，由于 $OC=1$，而平面上又不存在边长为1的顶点同色的正三角形，知 D，E 皆与 O，C 异色，从而都与 A 同色. 于是知道$\triangle ADE$ 即是一个顶点同色的正三角形，且边长是$\sqrt{3}$(图4.7).

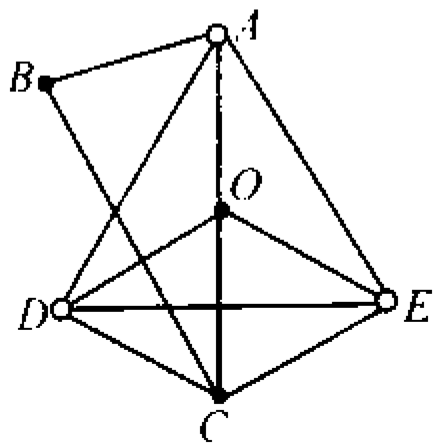


图 4.7

综合上述两个方面，即知问题中的结论成立.

这无疑是一个很简洁很漂亮的证明. 有些人读了这个证明后，可能会认为这道题很容易，其实并不尽然. 我们再来看一些证法，然后作些对比和分析，便会使人看清其中的礁石.

下面先介绍一种曾为我国首届数学冬令营中的许多营员所采用的证法，这也是一种很好的证明方法.

先任意作一个半径是1的圆，然后分两种情形考虑：

(1)如果圆周上的点皆同色，则结论显然成立，因为圆的内接正三角形的边长刚好为$\sqrt{3}$，且顶点同色.

(2)如果圆周上的点不全同色，则可找出一点 B 与圆心 A 异色. 于是再以 AB 为底边作一个腰长为2的等腰$\triangle ABC$. 其后的证明步骤即与前一种方法大同小异，以至或者得到边

长为 1 的顶点同色的正三角形$\triangle OCD$或$\triangle OCE$，或者得到边长为$\sqrt{3}$的顶点同色的正三角形$\triangle ADE$，因而得证命题.

上述两种证法除了起步时的出发点不同之外，论证中的思路发展并没有很大差异. 尽管第一种解法比较起来更为简单自然，但都摆脱不了"由两个距离为 1 的异色点出发，作腰长为 2 的等腰三角形"这一关键步骤. 由此看来，我们可以说：

(1)运用对比手法解题时的出发点不一定唯一，有时可以从不同的角度提出作为对比用的简单情况.

(2)在通过对比暴露出突破口之后，仍有一个如何发展思路的问题. 如果在某些关键的步骤上发生差错，则仍然不能把问题解答到底. 下面就来进一步解释这句话.

不少采用第二种方法解题的营员，在找出单位圆圆周上与圆心 A 异色的点 B 之后，便按照如下的步骤发展思路：反向延长 AB 交圆周于C. 如果 C 与 B 异色，则再以 AC 为边往两侧各作一个正证三角形$\triangle CAD$和$\triangle CAE$，如果两者中有一者的顶点同色，则命题获证；如果 D，E 皆与 C 异色，则$\triangle BDE$就是一个边长为$\sqrt{3}$的顶点同色的正三角形，命题亦获(图 4.8)但若 C 与 B 同色，而 D，E 两者中又至少有一者与 C

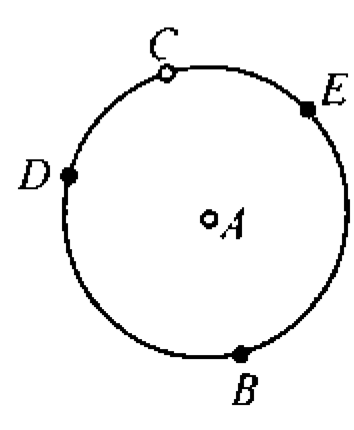


图 4.8

异色(图 4.9)，则仍然无可断言. 于是不少营员就又分别以AD和AE为边作正三角形，得到点 F 和点G. 如果 G 与A，E同色，则命题获证. 否则，如果 G 与它们异色，而 F 与它们异

色，则$\triangle CFG$也是一个边长为$\sqrt{3}$的顶点同色的正三角形，命题也可获证. 但是如果G与A异色，F却与A同色，则仍然无可断言. 至此，思路已告搁浅，如不易弦更张，便已无法再发展了. 有些营员在碰壁之后，正确地总结了经验，看出"若要摆脱困境，必须找出两个距离为2的异色点，"而走上了正确的思路. 但有些营员在困难面前丧失信心，就此偃旗息鼓、承认失败、鸣金收兵，致使整个解答半途而废. 由此也可以看出，正确总结解题过程中的经验以及信心和毅力对于摆脱困境是多么的重要！可喜的是，有一部分营员在正确总结经验教训之后，提出了如下解法：

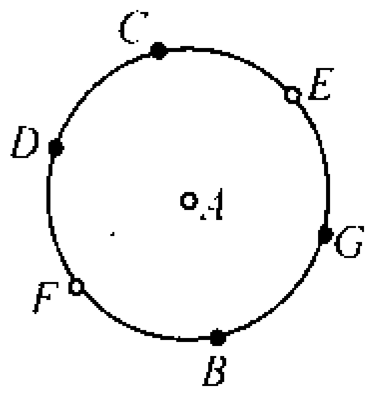


图4.9

(1)如果平面上的点全都同色，则命题显然成立.

(2)如果平面上的点不全同色，我们来证明必然存在两个距离为2的异色点，用反证法. 设任何两个距离为2的点都同色，我们来任取平面上的两个点A和B，便可证明A和B一定同色. 因为若以A，B为圆心各作一个半径为2的圆，则圆周上的点都与圆心同色. 如果这两个圆相交，便知A与B同色. 如果这两个圆不相交，则只要按图4.10所示的方式作出有限个半径为2的圆以形成链条，便可知这些圆周上的点都同色，从而知A与B同色. 这说明平面上的任意两个点都同色，因而全都同色. 这与平面上的点不全同色的假定产生矛盾，由此可见平面上一定存在着两个距离为2的异色点.

接下来的证明步骤与第二种证法相同，略去.

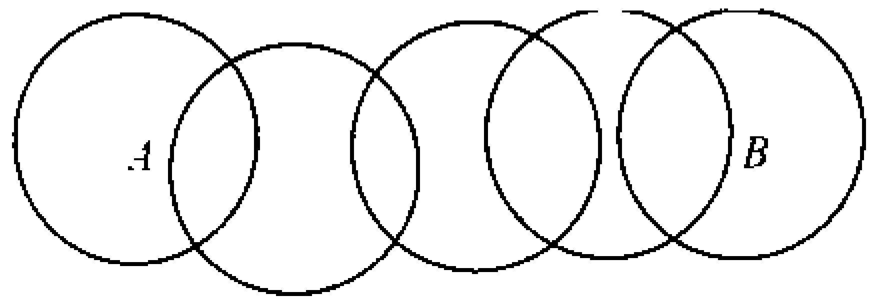


图 4.10

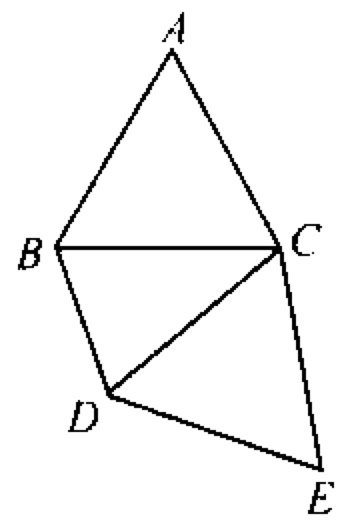


图 4.11

无可非议，这也是一种很好的证法，虽然不如前两种证法简单，但在起步的自然和思路的清晰方面都是很好的.

应当指出的是，我们在第 2 节例 2 中也给出过一种距离为 2 的异色点的存在性的证明方法，那里采用的直接证明，先从找两个异色点开始，再逐步调整到距离为 2. 异途同归，孰优孰劣，留给读者评价.

通过以上几种不同的证法，我们可以看出，对于同一个问题，即使是采用相同的思考方法，也可以有多种不同的处理方式. 这反映出数学问题处理上的灵活性和方法上的多样性.

我们已经介绍了不少由简单情形入手，通过对比方法来解题的例子，看到了这是一种用途广泛的数学解题方法. 但是也应该看到，任何方法都有一定的适用范围，不能不拘场合地随意乱用. 为了引起大家的注意，我们来看一个例子.

【例 7】 在平面上给出了 5 个点，已知其中任意 4 点中都有某 3 个点构成一个正三角形. 证明，这 5 个点中必有某 4

个点构成一个有一个角是 60° 的菱形.

初看起来,容易使人想到可按下述思路解题:

(1)其中任意 3 点都构成正三角形,…….

(2)其中有 3 个点不构成正三角形,…….

乍一看来,会感觉思路似乎很合理,其实并非如此.因为平面上不可能存在“其中任意 3 点都构成正三角形”的 4 个点,更不要说是 5 个点了,可见上述的情况对比是无依据的.这道题的正确解法是采用反证法.

显然,如果有某两点的连线同时是两个不同的正三角形的边的话,则所言的菱形一定存在.所以我们只要证明有这样的两个点存在就可以了,用反证法,设任何两点的连线都至多是一个正三角形的边.

在 A,B,C,D 这 4 点中,设 $\triangle ABC$ 是正三角形;则在 B,C,D,E 这 4 点中,不能有以 BC 为边的正三角形,从而其中的正三角形只能为 $\triangle CDE$ 或 $\triangle BDE$,不妨设为 $\triangle CDE$;这样一来,在 A,B,D,E 中,既不能有以 AB 为边的正三角形,又不能有以 DE 为边的正三角形,从而就不会有正三角形了,而这与已知的事实矛盾.

5 化归简单情形

从前面几节的有关例题中，我们已经看到，将一般情形化归简单的情形是处理数学问题的一种有力途径. 而为了有效地利用这一途径，必须抓好两个环节. 其一是通过观察，恰当地选出一种简单情形作为基本情形，并首先对它作出解答；其二是在“化”字上下功夫，有时还需作一番精巧的构思，才能将各种不同的一般情形化成简单情形来处理. 第 3 节中的例 3，就是说明这种方法的很好的例子.

为了使读者能进一步了解这种方法，我们再来看一些例子.

【例 1】 设 a,b,c 是正实数. 证明，$a^ab^bc^c\geqslant(abc)^{\frac{a+b+c}{3}}$.

直接证明这个不等式具有一定难度，我们可以先来考虑几个简单的不等式，然后再以它们作为桥梁来证明上述不等式. 这些简单的不等式就是

$$a^ab^b\geqslant a^bb^a,\quad b^bc^c\geqslant b^cc^b,\quad c^ca^a\geqslant c^aa^c$$

这些不等式的证明都很容易，仅以证明 $a^ab^b\geqslant a^bb^a$ 为例.

记 $k=a^ab^b/a^bb^a=a^{a-b}b^{b-a}$，于是就有

$$\lg k=\lg(a^{a-b}b^{b-a})=(a-b)(\lg a-\lg b)$$

由于 $\lg x$ 是 x 的增函数，所以知 $a-b$ 与 $\lg a-\lg b$ 具有相同的符号，从而知$\lg k\geqslant0$，也就是 $k\geqslant1$，即 $a^ab^b\geqslant a^bb^a$.

现在我们来将这 3 个简单的不等式相乘，得到

$$a^{2a}b^{2b}c^{2c} \geqslant a^{b+c}b^{c+a}c^{a+b}$$

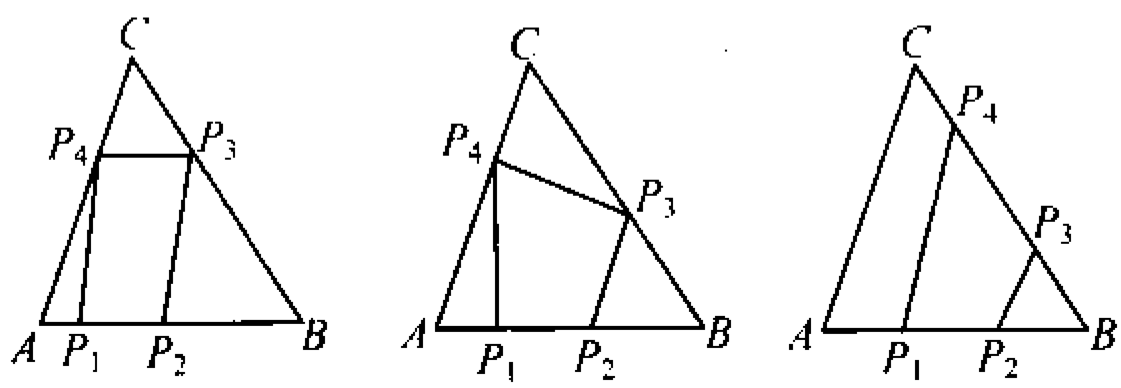
再在上式两端同乘 $a^a b^b c^c$ 后同时开立方，即得所证之不等式.

在这个证明中，原不等式的证明被分解成 3 个简单不等式的证明，达到了分散难点、化难为简的目的. 不仅如此，我们实际上还得到了证明更一般的不等式

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} \geqslant (a_1 a_2 \cdots a_n)^{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}}$$

的方法.

【例 2】 已知四边形 $P_1P_2P_3P_4$ 的 4 个顶点位于$\triangle ABC$ 的边上. 证明，4 个三角形$\triangle P_1P_2P_3$，$\triangle P_1P_2P_4$，$\triangle P_1P_3P_4$，$\triangle P_2P_3P_4$ 中，至少有一个的面积不大于$\triangle ABC$ 的$\frac{1}{4}$.



(a) (b) (c)

图 5.1

按照惯例，我们用 $S_{\triangle ABC}$ 表示$\triangle ABC$ 的面积，其余类推. 容易知道，P_1，P_2，P_3，P_4 4 个点中必有两个点位于$\triangle ABC$ 的同一边上. 为确定起见，我们设 P_1 和 P_2 位于 AB 边上. 于是 P_3，P_4 的所在位置还有如下几种情形：

情形 1　P_3、P_4 分别位于其余两条边上，且 $P_3P_4 /\!/ P_1P_2$，如图 5.1(a)所示. 我们把这种情形作为基本情形，先来

加以解决.

由平行截线定理知 $BP_3:BC=AP_4:AC$,记此比值为 λ,则有 $0<\lambda<1$. 而因 $S_{\triangle P_1P_2P_3}=S_{\triangle AP_2P_3}$(同底等高),又由高底比例关系知 $S_{\triangle AP_2P_3}=\lambda S_{\triangle AP_2C}=\lambda(1-\lambda)S_{\triangle ABC}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,即 $S_{\triangle P_1P_2P_3}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,同理知 $S_{\triangle P_4P_2P_3}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$. 故情形 1 下命题获证.

情形 2　P_3、P_4 分别位于其余两边上,但 $P_3P_4\nparallel P_1P_2$,如图 5.1(b)所示. 我们来设法将其化归情形 1.

为确定起见,设 P_3 距 AB 比 P_4 近. 如图 5.2 所示,作 $P_3E/\!/AB$ 交 AC 于 E,交 P_1P_4 于 D. 由于$\triangle P_1P_2P_3$,$\triangle DP_2P_3$ 和$\triangle P_4P_2P_3$ 都以 P_2P_3 为底,而顶点 P_1,D 及 P_4 共线,又因 D 介于 P_1 和 P_4 之间,故知 $S_{\triangle DP_2P_3}$ 介于 $S_{\triangle P_1P_2P_3}$ 和 $S_{\triangle P_4P_2P_3}$ 之间,也就是

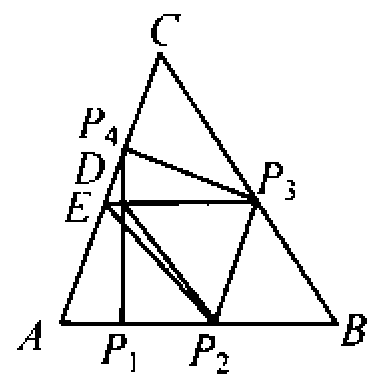


图 5.2

$$\min\{S_{\triangle P_1P_2P_3},\quad S_{\triangle P_4P_2P_3}\}\leqslant S_{\triangle DP_2P_3}$$

而由情形 1 知 $S_{\triangle EP_2P_3}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$,又显然 $S_{\triangle DP_2P_3}\leqslant S_{\triangle EP_2P_3}$,所以即有

$$\min\{S_{\triangle P_1P_2P_3},\quad S_{\triangle P_4P_2P_3}\}\leqslant S_{\triangle EP_2P_3}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$$

情形 3　P_3,P_4 同位于另一条边上,如图 5.1(c)所示. 我们仍来将其化归情形 1. 设 P_3,P_4 都在 BC 边上.

为确定起见，设 P_1 距 P_2P_3 比 P_4 近，作 $P_1P_4' /\!/ P_2P_3$ 交 BC 于 P_4'，如图 5.3 所示. 剪去图中的阴影部分，先在 $\triangle P_4'P_1B$ 中考虑. 于是就有 P_4' 和 P_1 位于该三角形的同一条边 $P_4'P_1$ 上，而 P_2 和 P_3 分别位于其余两条边上，且 $P_2P_3 /\!/ P_4'P_1$. 于是由情形 1 立知 $S_{\triangle P_1P_2P_3}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle P_4'P_1B}$，又显然有 $S_{\triangle P_4'P_1B}\leqslant S_{\triangle ABC}$，故知 $S_{\triangle P_1P_2P_3}\leqslant\frac{1}{4}S_{\triangle ABC}$.

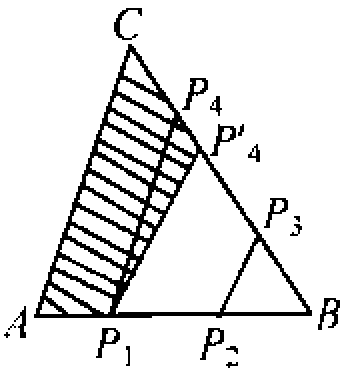


图 5.3

既然上述诸款包括了一切可能情形，知命题获证.

上述两个例题都是以较为简单的情形作为解题的基础，而将其余两种情形化归简单情形处理. 但是，正如我们所看到的，即使是在同一个例题中，两种不同的一般情形中所用的转化手段也不尽相同. 由此可见，用好这种解题方法的关键乃是做好转化工作，而且应当注意转化的技巧性.

【例 3】 设 a,b 为任意实数，$0\leqslant P\leqslant 1$. 证明，$|a+b|^P\leqslant |a|^P+|b|^P$.

情形 1　$P=0$. 此时只要 $a\neq 0$，$b\neq 0$ 及 $a+b\neq 0$，则不等式左端为 1，右端为 2，命题显然成立.

上述情形固已证毕，但是由于它过于简单，不具备应有的代表性，故仍不能以它充当解题中的基本情形. 为此我们再来认真解决下述情形，以便用它来作为处理其他情形的基础.

情形 2　$P=1$，此时若 $ab\geqslant 0$，即 a,b 同号，则显然有，

$|a+b|=||a|+|b||=|a|+|b|$；若 $ab<0$，即 a,b 异号，则有 $|a+b|<|a+(-b)|=|a|+|b|$. 知对一切实数 a,b 都有 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$.

情形 3　$0<P<1$，我们来设法将其化归情形 2. 首先，若 $a+b=0$，则因 $|a|^P+|b|^P\geqslant 0$，知不等式成立；其次，若 $ab=0$ 或 $0<|a+b|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$，则因 $|a+b|^P\leqslant\max\{|a|^P,|b|^P\}\leqslant|a|^P+|b|^P$，知不等式也成立；最后，若 $|a+b|>\max\{|a|,|b|\}$ 且 $a\cdot b\neq 0$，则可用情形 2 作基础得

$$|a+b|^P=\frac{|a+b|}{|a+b|^{1-P}}\leqslant\frac{|a|}{|a+b|^{1-P}}+\frac{|b|}{|a+b|^{1-P}}$$

$$\leqslant\frac{|a|}{|a|^{1-P}}+\frac{|b|}{|b|^{1-P}}=|a|^P+|b|^P$$

综合上述，即知对任何 $0\leqslant P\leqslant 1$ 及任何实数 a,b，不等式都成立.

在这个例题中，我们碰到了一种前面两例所未曾遇到的现象，即需要在"选择何种简单情形作为解题基础"的问题上作出回答. 这就告诉我们，不是任何简单情形都可以成为解题中的基础和成为一般情形转化的归宿的. 我们必须慎重考虑，选择那些确有代表性而又易于处理的情形来充当这种基础. 另外，从上述情形 3 的处理中，我们还遇到了所谓"排除干扰"的问题. 即只有当我们分别处理了 $a+b=0$，$ab=0$ 及 $0<|a+b|\leqslant\max\{|a|,|b|\}$ 等起干扰作用的简单情形之后，才使得情形 3 化归情形 2 的道路变得畅通起来. 这些也都是在化归简单情形的过程中所应当注意的. 下面再来看一些例子.

【例 4】 设无穷数列$\{a_n\}$满足关系式$(2-a_n)a_{n+1}=1$，$n\in\mathbf{N}$. 证明，至多在有限项以后，数列成为递增的.

这是一个以递推关系式给出的数列. 不难看出，只要有某一项 a_n 满足条件 $0<a_n\leqslant 1$，那么自此项往后的每一项就都保持这一性质，这是因为 $0<a_{n+1}=\frac{1}{2-a_n}\leqslant\frac{1}{2-1}=1$，而且数列也就一直保持着递增的趋势，事实上

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=\frac{1}{2-a_n}-a_n=\frac{1-2a_n+a_n^2}{2-a_n}\\&=\frac{(1-a_n)^2}{2-a_n}\geqslant 0\end{aligned}$$

所以归根到底，我们就要来证明数列中存在一项 a_n，满足条件 $0<a_n\leqslant 1$. 下面分若干情形来讨论.

情形 1　$0<a_1\leqslant 1$，则 a_1 即为所求.

情形 2　$a_1\leqslant 0$，此时 $0<a_2=\frac{1}{2-a_1}\leqslant\frac{1}{2}<1$，知 a_2 即为所求.

情形 3　$a_1>2$，此时 $a_2=\frac{1}{2-a_1}<0$，于是由情形 2 可知 a_3 即为所求.

情形 4　$1<a_1\leqslant 2$，此时可以找到某个正整数 $k>1$，使得 $\frac{k+1}{k}<a_1\leqslant\frac{k}{k-1}$，但若 $a_1=\frac{k}{k-1}$，则有 $a_2=\frac{1}{2-a_1}=\frac{k-1}{k-2}$，由此并结合归纳法可知 $a_{k-1}=\frac{k-(k-2)}{k-(k-1)}=2$，于是使得关系式 $(2-a_{k-1})a_k=1$ 不能成立，可见这样的 a_1 不合题意. 从而知

有$\frac{k+1}{k}<a_1<\frac{k}{k-1}$，因而$\frac{k}{k-1}<a_2<\frac{k-1}{k-2}$，…，$\frac{k-(k-2)}{k-(k-1)}<a_k$，即$a_k>2$. 这样，再由情形3就可知道$a_{k+2}$即为所求.

综合上述各款，知数列中一定存在一项a_n满足条件$0<a_n\leqslant 1$，自此项后，数列便一直保持上升趋势.

下面我们来看一个有关格点三角形面积计算公式的例子. 大家知道，一旦在平面上取定了一个直角坐标系之后，平面上的点便都唯一地对应为一对实数(x,y)，这对实数叫做点的坐标. 习惯上，把两个坐标值x和y都是整数的点叫做格点，也叫整点. 于是相应地，便把3个顶点都是格点的三角形叫做格点三角形. 如果把三角形内部和边界上的格点数目分别记作I和B. 则关于格点三角形的面积S有一个有趣的计算公式，这就是：

【例5】 在格点三角形中，有$S=I+\frac{1}{2}B-1$.

我们将格点三角形按形状分成图5.4所示的5种类型，分别加以证明. 不难验证，它们包括了一切可能形状的格点三角形，其中：

情形1　有两条边分别平行于坐标轴，这是我们将要重点考察的基本情形.

情形2　有一条边平行于坐标轴，但该边上的高线位于三角形内. 因而只要将该边上的高线CD作出，就可以表示为两个第一种类型的格点三角形$\triangle ADC$和$\triangle BDC$的并(图5.5(2)).

情形3　有一条边平行于坐标轴，但该边上的高线位于

三角形外.如果将该边上的高线 AD 作出,则可以视作两个第一种类型的格点三角形 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ADB$ 的差(图 5.5(3))

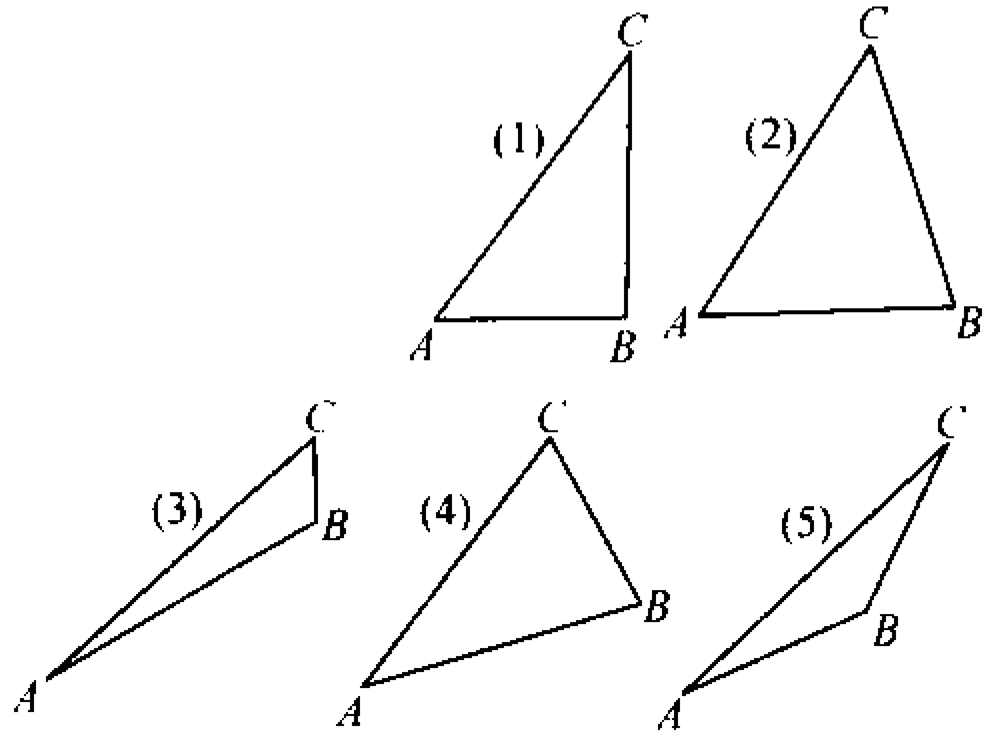


图 5.4

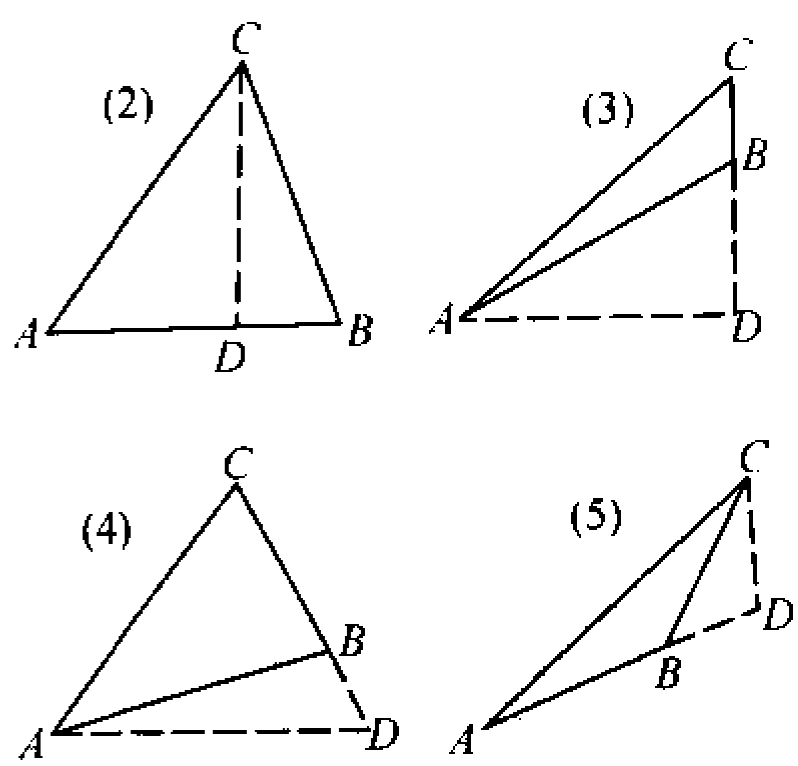


图 5.5

情形 4　三条边皆不平行于坐标轴,但在适当添加辅助

线后，可表示为两个第二种类型的格点三角形$\triangle ADC$与$\triangle ADB$的差(图 5.5(4)).

情形 5　三条边皆不平行于坐标轴，但在适当添加辅助线后，可表示为两个第三种类型的格点三角形$\triangle ADC$与$\triangle BDC$的差(图 5.5(5)).

综合上述各款，即知只需对情形 1 证明公式.

我们来将直角三角形$\triangle ABC$扩充为矩形$ABCD$(图 5.6)，则有$S_{ABCD}=2S_{\triangle ABC}$

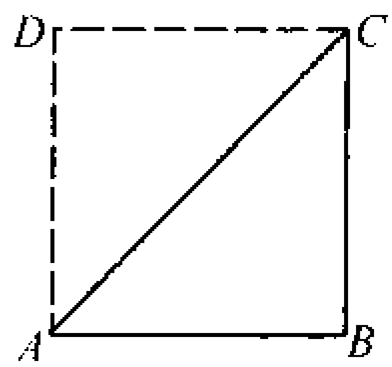


图 5.6

设AB和BC边各含有a个和b个格点(不包括端点)，则知$AB=a+1$，$BC=b+1$，从而就有

$$S_{ABCD}=(a+1)(b+1)=ab+a+b+1$$
$$=ab+\frac{1}{2}(2a+2b+4)-1$$

其中ab刚好是矩形$ABCD$内部的格点数目. 如果再记边AC所含的格点数目c(不包括端点)，则知

$$ab=2I+c,\ B=a+b+c+3$$

这是因为I表示$\triangle ABC$内部的格点数目，而$\triangle ACD$内的格点数目与$\triangle ABC$内相等；又因为B表示$\triangle ABC$边界上的格点数目，除了各边所含的格点数目外，还应加上 3 个端点. 这样一来就有

$$S_{ABCD}=2I+c+a+b+1=2I+B-2=2\left(I+\frac{1}{2}B-1\right)$$

即$S_{\triangle ABC}=I+\frac{1}{2}B-1$，知命题获证.

我们来看一道有关格点多边形面积的较为复杂的数学题目的解答,其中采用的办法也是先处理一种较为简单的情形,再把其它情形化归这类简单情形.而在对较为简单情形的处理中,又是先从对最简单的具体情况的考察开始.

【例 6】 在方格平面上任意给定一个格点凸 $2n$ 边形,证明,其面积不小于 $n^3/100$,其中小方格的边长等于 1.

我们先来观察一些简单情况.先看中心对称的格点凸多边形.

中心对称的格点凸 4 边形必为平行四边形.

中心对称的格点凸 6 边形值得仔细推敲,说不定其中就藏着开门的钥匙.

设 $A_1A_2\cdots A_6$ 为中心对称的格点凸 6 边形.容易看出,以下三组边分别平行且相等:A_1A_2 与 A_4A_5,A_2A_3 与 A_5A_6,A_3A_4 与 A_6A_1.这启示我们,有可能把凸 6 边形分解为若干个平行四边形.于是,我们过 A_6 作 A_1A_2 的平行线,再过 A_2 作 A_1A_6 的平行线,二平行线相交于点 B,连 BA_4,由凸 6 边形的中心对称性可知 BA_4 平行于 A_5A_6,且不难证明 $A_1A_2BA_6$,$A_2A_3A_4B$ 和 $BA_4A_5A_6$ 都是平行四边形.这就告诉我们,的确可以把 $A_1A_2\cdots A_6$ 划分为 3 个平行四边形,而且,它们分别以 A_1A_2 和 A_6A_1,A_2A_3 和 A_3A_4,A_4A_5 和 A_5A_6 为边.这个发现十分令人鼓舞.

在此基础上,我们可以再观察中心对称的格点凸 8 边形,并能得到类似的结论.而且从中还可找到证明如下结论的归纳途径:可以把中心对称的格点凸 $2n$ 边形 $A_1A_2\cdots A_{2n}$ 划

分为 C_n^2 个平行四边形，使得这些平行四边形分别全等于由（有向线段）$A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_{n+1}$ 中按各种可能的方式两两形成的所有平行四边形. 所谓有向线段，是指既有长度又有方向的线段，在这里我们注重的是保持它们的长度和夹角.

这样一来，中心对称的格点凸 $2n$ 边形的面积 S 就是所有这些平行四边形的面积之和. 于是，我们就只要分别求出以（有向线段）$A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_{n+1}$ 之中任何两条为边的平行四边形的面积，再把它们相加即可. 为便于讨论，不妨设

$$A_1A_2 \geqslant A_2A_3 \geqslant \cdots \geqslant A_nA_{n+1} \qquad (*)$$

上式各项表示相应线段的长度.

任意取定 A_iA_{i+1}，我们来考察以它和 A_jA_{j+1} 为边的平行四边形，其中 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$，并将其面积记作 $S_i(j)$. 注意，这里及以下说的都是有向线段，即保持它们的长度和夹角.

以 A_i 为坐标原点，沿着方格线建立直角坐标系，并过 A_i 作 A_jA_{j+1} 的平行线段. 设在线段 A_iA_{i+1} 上共有 $k+1$ 个格点，每两个相邻格点之间的距离为 q，于是 A_iA_{i+1} 的长度为 kq. 易知 $S_i(j)$ 为整数，且是 k 的倍数，其中 $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$，这是因为这些平行四边形在 A_iA_{i+1} 边上的高一定是 $1/q$ 的整数倍（请读者自己证明）.

显然，对于不同的 $j > i$，$S_i(j)$ 的值有可能相同. 但由于此时平行四边形都以 A_iA_{i+1} 为底边，所以面积相等的平行四边形的高一定相等. 因此，使得面积 $S_i(j)$ 相等的不同的线段 A_jA_{j+1} 的端点 A_{j+1} 必都落在与 A_iA_{i+1} 所在直线平行的两条

直线上(因为它们的另一个端点 A_j 都与 A_i 重合).我们要来观察有多少个面积相等的此类平行四边形.注意到(*)式,并且实际地画一画,即可发现,不可能有多于 $4k$ 个此类平行四边形的面积相等.

事实上,如果存在 $S_i(j_1)=S_i(j_2)=\cdots=S_i(j_{4k+1})$.那么,由于 $A_{j_1+1},A_{j_2+1},\cdots,A_{j_{4k+1}+1}$ 都一定落在两条与 A_iA_{i+1} 平行的直线上,从而其中一条直线上至少落有它们之中的 $2k+1$ 个点.由于它们都是由格点凸 $2n$ 边形中的互不平行的边平移得来的,所以它们必然落在该直线上的不同格点之上.由于该直线与 A_iA_{i+1} 所在的直线平行,所以该直线上相邻格点之间的距离也是 q,因此,它们之中必有某两者之间的距离不小于 $2kq$.而这样一来,我们便可由(*)式和三角形不等式(两边之和大于第三边)得出矛盾,故为不可能.

这样,我们便证明了,对一切 $1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$,$S_i(j)$ 中重复取每个相同值的次数都不超过 $4k$ 次.这一结论对于我们估计平行四边形的面积之和十分重要.

由于满足不等式 $1\leqslant i<j\leqslant n$ 的 j 共有 $n-i$ 个.我们记 $n-i=4ks+r$,其中 r 是 $n-i$ 被 $4k$ 除的余数.由上所证,我们知道,在这样的 j 中,$S_i(j)$ 取每个相同值的次数都不超过 $4k$ 次,并且它们的值都是 k 的倍数,所以其中至少有 r 个 j,使得

$$S_i(j)\geqslant(s+1)k$$

于是就有

$$\sum_{j=i+1}^{n}S_i(j)\geqslant 4k(k+2k+\cdots+sk)+r(s+1)k$$

$$= (s+1)(2ks+r)k$$

而由 $n-i=4ks+r$ 立知 $2ks+r\geqslant\frac{1}{2}(n-i)$，$s+1>\frac{n-i}{4k}$，所以由上式知

$$\sum_{j=i+1}^{n} S_i(j) > \frac{(n-i)^2}{8}$$

这样一来，我们便得到了

$$S=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} S_i(j) > \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(n-i)^2}{8}$$

$$=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{1}{48}(n-1)n(2n-1) > \frac{n^3}{100}$$

这就表明，对中心对称的格点凸 $2n$ 边形题中结论成立.

现在，我们记 $f(n)=n^3/100$，再来证明对非中心对称的格点凸 $2n$ 边形题中结论也成立.

连出格点凸 $2n$ 边形的一条直径，并将其记作 d（凸 $2n$ 边形上距离最大的两点间的连线称为其直径）. 设 d 将该格点凸 $2n$ 边形分为一个凸 l 边形和一个凸 m 边形，其中 $l+m=2n$. 分别作出这两个多边形关于 d 的中点 O 的对称图形，得到以 O 为对称中心的中心对称的格点凸 $2l$ 边形和格点凸 $2m$ 边形. 由前所证，它们的面积分别不小于 $f(l)$ 和 $f(m)$，容易证明，原来的格点凸 $2n$ 边形的面积等于该中心对称的格点凸 $2l$ 边形和格点凸 $2m$ 边形的面积之和的一半. 于是，再由函数 f 的（下）凸性 $\frac{1}{2}\{f(l)+f(m)\}\leqslant f\left(\frac{l+m}{2}\right)=f(n)$，即可得证题中结论.

上述证明过程值得我们总结.

(1)我们首先从中心对称的格点凸多边形入手，而其中又是先看一些最简单的情况.尤其是从对中心对称的格点凸6边形的考察中，找到了“开门的钥匙”，使得我们可把问题化归为平行四边形来考虑.这是一个极大的飞跃，奠定了整个解答的基础.如果没有这种化归，其中的问题便只能是一团乱麻，漫无头绪.

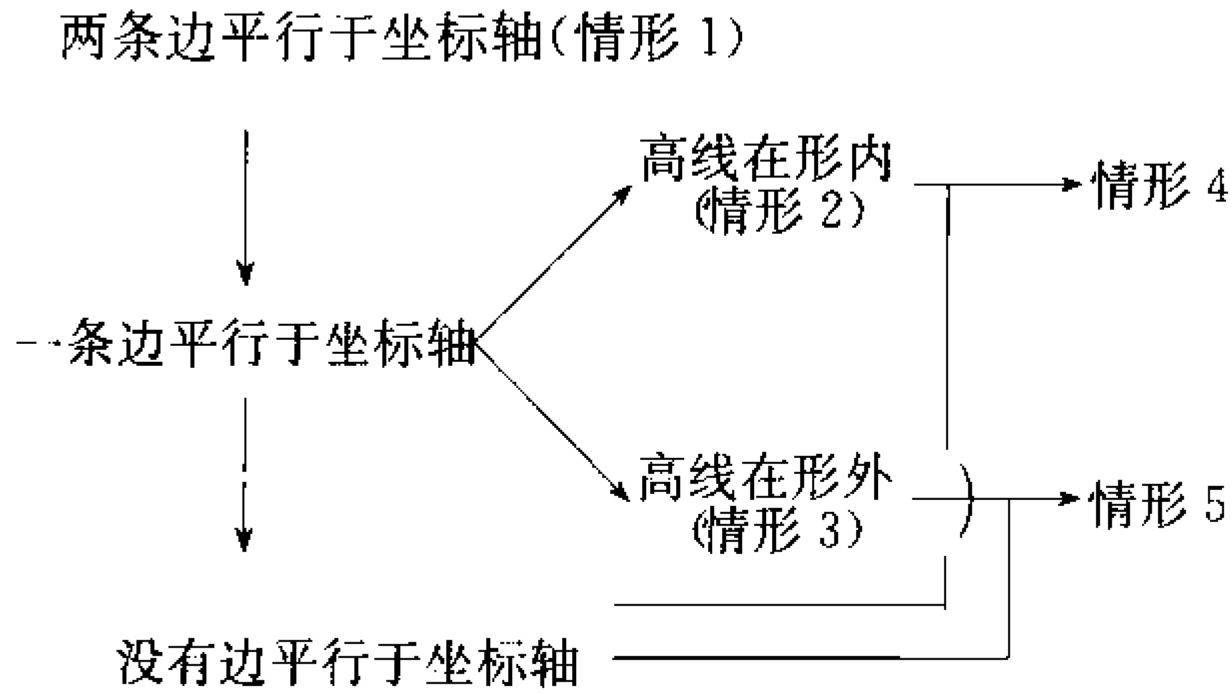
(2)我们所作的(＊)式中的假定原本是非常普通非常平常的，但是却给后面的讨论带来了很多方便.在计算面积相等的平行四边形的个数当中起了很大作用.

(3)计算面积相等的平行四边形的个数是承上启下的一步，它是利用抽屉原则，(＊)式和三角形不等式得到的.在此之前，我们通过具体画图，发现个数的上界是 $4k$，然后再给予严格证明.这种先发现再证明的做法，在解答比较复杂的数学问题时经常用到，值得重视.

(4)在得到关于中心对称的格点凸多边形的结论之后，我们采用一个函数 $f(n)$ 来表示结论，有利于后面的应用.而在对非中心对称的格点凸多边形的讨论时，为了把它们化归中心对称的格点凸多边形来处理，我们抓住了凸多边形的“直径”这个特殊对象，不仅有利于构造出两个以其中点为对称中心的中心对称的格点凸多边形，而且保证了它们的面积之和等于原格点凸多边形面积的二倍.这是得以将非中心对称情况化归中心对称情况处理的关键.

总之一句话，时时处处从简单情形看起，认认真真向简单情形寻求启示，是我们解答复杂数学问题的有效途径.

以上三个例题均较开头的三个例题复杂.例6的功夫主要下在对中心对称图形这类较为简单情形的处理上，虽然在“化归”方面颇有特色，甚具匠心，但条理比较清楚，易于看清.而例4和例5则在“化归”时的条理和层次上均较前面例子复杂.例4以情形2为基本情形，但是在处理情形4时却是直接与情形3挂钩.例5的条理则更为复杂，在情形的分类上渐次深入，呈现出如下的逻辑关系：



这种严密的逻辑关系是做到情况分类既不重复又不遗漏的可靠保证，值得读者学习和思考.

最后，作为本节的结束，我们来看一道1972年的国际奥赛数学竞赛题.它在处理手法上别有一番特色.

【例7】 设$n \geqslant 4$为正整数.证明，每个有外接圆的四边形，都可以分成n个都有外接圆的四边形.

大家知道，每一个等腰梯形都有外接圆，所以我们就来以这种四边形作为解答问题的出发点.

情形1 如果原来的四边形就是等腰梯形，那么只要用

平行于底边的平行线段将其分为 n 个等腰梯形，即可保证它们都有外接圆.

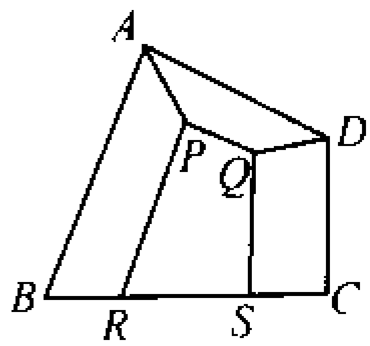


图 5.7

情形 2　如果原来的有外接圆的四边形 $ABCD$ 不是等腰梯形(图 5.7). 则因有 $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^\circ$，故若设 $\angle A\geqslant\angle C$ 及 $\angle D\geqslant\angle B$，即知 $\angle A$ 与 $\angle D$ 非锐角，$\angle B$ 与 $\angle C$ 非钝角，所以有 $\angle A\geqslant\angle B$，$\angle D\geqslant\angle C$.

于是可作 $\angle BAP=\angle B$，$\angle CDQ=\angle C$，且使 P，Q 均在 $ABCD$ 内部及有 $PQ/\!/AD$. 再作 $PR/\!/AB$，$QS/\!/CD$，分别与 BC 交于 R 和 S. 即得 $ABRP$ 和 $CDQS$ 为等腰梯形，而由 $\angle PAD=\angle A-\angle B=\angle D-\angle C=\angle QDA$，知 $PQDA$ 也是等腰梯形；又因在 $RSQP$ 中可证得 $\angle SQP+\angle SRP=\angle D+\angle B=180^\circ$，知 $RSQP$ 有外接圆. 这样我们便将 $ABCD$ 分成了 4 个都有外接圆的四边形，其中有 3 个还是等腰梯形. 然后再按情形 1，将其中一个等腰梯形再分成 $n-3$ 个等腰梯形即可.

6　有趣的五点问题

在这一节中，要讨论一些与平面上5个点有关的有趣问题. 在这些问题的处理中，体现了以简单情形作为起点来解决问题的思想方法. 本来，5个点就是平面有限点集的简单而有代表性的情形，而5个点本身的问题，又可化成对一些更为基本的情形的讨论. 正是5点问题的这些特点，引起了我们进行专门讨论的兴趣.

我们先来介绍平面有限点集的一个基本概念. 设有一个由平面上有限个点组成的集合 G，如果存在一个以 G 中的点作为顶点的凸多边形，使得 G 中其余的点都在它的内部，则将这个凸多边形叫做 G 的凸包，又叫周界多边形. 关于平面有限点集的周界多边形，我们有如下命题：

【例1】 任何由有限个点组成的平面点集 G，只要其中任意3点都不共线，就存在有一个周界多边形.

记点集 G 中的点的数目为 n，我们来对 n 作归纳证明.

若 $n=3$，则结论显然成立. 假设 $n=k$ 时结论成立，我们来考察 $n=k+1$ 的情形. 任取平面上一点 P，设 A_1 是 G 中距 P 最远的点. 连 PA_1，并过 A_1 作直线 $l\perp PA_1$. 则知 G 中其余点均与 P 位于 l 的同一侧. 于是可找出 G 中两点 A_2 和 A_3，使得 G 中的所有点均在 $\angle A_2A_1A_3$ 内部及其两边上. 显然除

A_1,A_2,A_3 外，在射线 A_1A_2 和 A_1A_3 上不再有 G 中的其他点. 连 A_2A_3，如果 G 中其余点均在 $\triangle A_1A_2A_3$ 内部，则 $\triangle A_1A_2A_3$ 就是 G 的周界多边形. 否则，G 中必有一部分点位于三角形以外. 我们来对 G 中除 A_1 之外的 k 个点使用归纳假设，知它们存在周界多边形. 而由 A_2,A_3 的性质知道，这两个点一定是该周界多边形上的顶点. 于是连线 A_2A_3 或为该周界多边形的一条边，或为它的一条对角线. 不论哪种情形，我们都保留上述周界多边形位于 $\triangle A_1A_2A_3$ 以外的部分，而接上 A_2A_1 和 A_1A_3 两条边，使其成为一个新的凸多边形. 不难想见，该凸多边形就是点集 G 的周界多边形. 于是由归纳法原理，知命题获证.

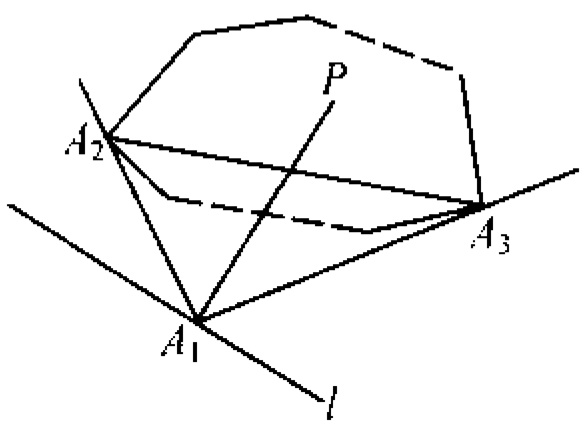


图 6.1

上述有关周界多边形存在性的命题，是平面有限点集的一个重要的基本性质，我们将依据它来解决一些有趣的例题. 类似例 1 的存在性问题，也是数学中的一种重要的问题类型，在后面章节中还要专作介绍. 在例 1 的解答过程中，所体现的抓住点 A_1，以及 A_2 和 A_3 来考虑问题的办法，也是一种富有特色的解题办法，后面也将另作介绍.

【例 2】 在平面上任意给出 5 个点，以 λ 表示这些点间最大距离与最小距离之比. 证明，$\lambda \geqslant 2\sin 54^\circ$，并讨论等号成立的充分必要条件.

我们仍然分情形来讨论.

情形 1　5 个点中至少有 3 个点 A_1, A_2, A_3 共线，这是最简单的情形. 不妨设 A_2 在 A_1 和 A_3 之间，而且 $A_1A_2 \leqslant A_2A_3$，于是就有

$$\lambda \geqslant \frac{A_1A_3}{A_1A_2} \geqslant \frac{A_1A_2 + A_2A_3}{A_1A_2} \geqslant 2 > 2\sin 54^\circ$$

在其余的情形中，5 个点中的任意 3 点都不共线，也就是说其中任 3 点都可构成三角形. 这些情形解答都与下述引理有关：

引理　若 $\triangle ABC$ 中最大角不小于 108°，则它的最长边与最短边之比不小于 $2\sin 54^\circ$，等号当且仅当最大角为 108° 且其余两角相等时成立.

设 $\angle A$ 为最大角，$\angle C = x$ 为最小角，则有 $x \leqslant \dfrac{180^\circ - \angle A}{2} \leqslant 36^\circ$，等号当且仅当 $\angle A = 108^\circ$ 且 $\angle B = \angle C$ 时成立. 另由正弦函数性质如

$$\sin A = \sin(B + C) \geqslant \sin 2x = 2\sin x\cos x$$

于是只要对 $\triangle ABC$ 运用正弦定理，并根据余弦函数性质即知

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} \geqslant \frac{2\sin x\cos x}{\sin x} = 2\cos x \geqslant 2\cos 36^\circ = 2\sin 54^\circ$$

由证明过程可知，等号当且仅当 $\angle A = 108^\circ$ 且 $\angle B = \angle C$ 时成立.

有了这个引理，我们就只要再对 5 个点的位置区分各种情形，分别讨论以它们作为顶点的三角形中，是否存在如引理所述的三角形就可以了. 情形的区分则基本依据例 1 进行.

情形 2　5 个点恰好形成正五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$. 这时，五边形的 5 个内角皆为 $108°$，而 5 条边和 5 条对角线也都分别相等. 所以 5 个点之间的距离只有两种情况：或等于边长、或等于对角线长. 鉴于这种情况，由引理即知 $\lambda=2\sin54°$.

情形 3　5 个点形成凸五边形但不是正五边形. 我们再来分两种情形考虑：如果 5 个内角都相等（即都等于 $108°$），那么由于 $A_1A_2A_3A_4A_5$ 不是正五边形，所以必有两条邻边不相等，不妨设 $A_1A_2<A_2A_3$，于是由引理即知 $\lambda\geqslant\frac{A_1A_3}{A_1A_2}>2\sin54°$. 如果 5 个内角不都相等，则必有一个内角大于 $540/5=108°$，不妨设 $\angle A_2>108°$，于是由引理仍知 $\lambda\geqslant\max\cdot\left\{\frac{A_1A_3}{A_1A_2},\frac{A_1A_3}{A_2A_3}\right\}>2\sin54°$.

情形 4　5 个点的周界多边形为凸四边形为 $A_1A_2A_3A_4$，而 A_5 在其内部. 我们来任意作出周界四边形的一条对角线，将其分为两个三角形. 由于 5 个点中的任意 3 点都不共线，知 A_5 必落在上述两个三角形之一的内部，不妨设 A_5 在 $\triangle A_1A_2A_3$ 内部. 再连 A_1A_5，A_2A_5 和 A_3A_5，将 $\triangle A_1A_2A_3$ 分成 3 个三角形（图 6.2）. 由于这 3 个三角形的以 A_5 为顶点的 3 个内角之和为 $360°$，知必有其一不小于 $360°/3=120°$，从而结合引理便知 $\lambda>2\sin54°$.

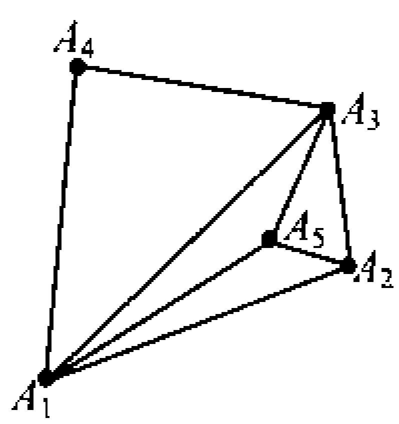


图 6.2

情形 5　5 个点的周界多边形为 $\triangle A_1A_2A_3$，而 A_4 和 A_5 在其内部（图 6.3）. 于是只要对 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 A_5 作与情形 4

相应的讨论，即知仍有 $\lambda>2\sin54^{\circ}$.

由于上述 5 种情形概括了平面 5 点的一切可能的位置情况，所以综合上述即知所证不等式恒成立. 又由于等号在情形 2 中一定成立，而在其余情形中都不可能成立，所以又可得出结论：等号成立的充分必要条件是 5 个点构成正五边形.

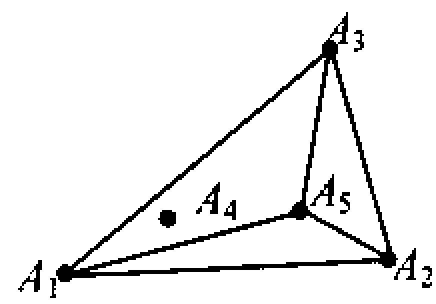


图 6.3

【例 3】 设 A,B 是平面上的两个有限点集，无公共元素，并且 $A\cup B$ 中任意 3 个不同的点都不共线. 如果 A,B 中至少有一者的点数不少于 5 个，证明存在一个三角形，它的顶点全在 A 中或全在 B 中，它的内部没有另一集合中的点.

设集合 A 中的点不少于 5 个，我们来从中选出 5 个点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5，使得这 5 个点的周界多边形的内部没有 A 中的其他点(否则就用内部的点代替原来的某些点)，于是就有：

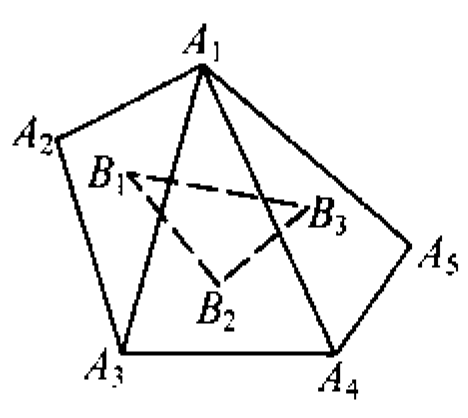


图 6.4

情形 1　5 个点的周界多边形恰为凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$，如图 6.4 所示. 我们来连 A_1A_3 和 A_1A_4 而将五边形分成 3 个三角形. 如果这 3 个三角形中有一者的内部没有集合 B 的点，则它即为所求；如果这 3 个三角形分别含有 B 中的点 B_1,B_2,B_3，则$\triangle B_1B_2B_3$ 即为所求.

情形 2　5 个点的周界多边形是凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$，而

A_5 在其内部，如图 6.5 所示. 我们来将 A_5 与周界四边形的 4 个顶点连接起来，而将周界四边形分成 4 个三角形. 如果 4 个三角形中有一者的内部没有集合 B 的点，则它即为所求；如果 4 个三角形内部分别含有 B 的点 B_1，B_2，B_3 和 B_4，则再对这 4 个 B 中点的周界多边形作分析，而知在以这 4 个点作顶点的 4 个三角形中，至少有一者的内部不含 A_5，于是该三角形即为所求.

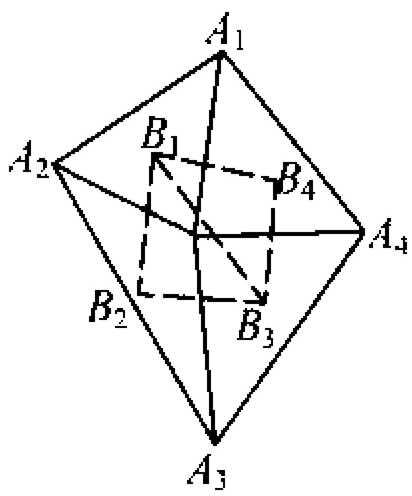


图 6.5

情形 3　5 个点的周界多边形是$\triangle A_1A_2A_3$，而 A_4，A_5 在其内部，如图 6.6 所示. 我们来连 A_4A_5，并按图 6.6 的方式将它们与$\triangle A_1A_2A_3$ 的顶点相连，而将$\triangle A_1A_2A_3$ 分成 5 个三角形. 如果 5 个三角形有一者的内部没有集合 B 的点，则它即为所求；如果 5 个三角形内部分别含有 B 的点 B_1，B_2，B_3，B_4，B_5，则至少有 3 个这样的点位于直线 A_4A_5 的同一侧，它们构成的三角形即为所求.

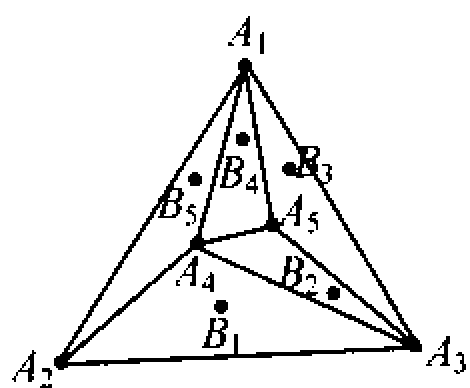


图 6.6

综合上述各款，即知命题证毕.

以上两个例题都与平面上 5 个点间的位置关系有关. 正如我们已经看到的，根据周界多边形的形状划分情形讨论，是解决它们的有效办法.

在各种数学竞赛试题中，常出现平面有限点集的问题，它们中相当多数可以把 5 点的情形当作基本情形来讨论，对解题起着钥匙和桥梁的作用.

【例 4】 在平面上给出了 n 个点($n>4$)，现知其中任意 3 点不共线. 证明，至少存在 C_{n-3}^2 个以上述点为顶点的凸四边形.

这里 C_{n-3}^2 是组合数符号，表示从 $n-3$ 个不同物件中任意取出两个的所有不同取法的数目.

在第 2 节的例 3 中，我们证明过如下的命题："在平面上给出 5 个点，如果其中任意 3 点不共线，则至少存在一个以上述点为顶点的凸四边形". 现在我们就来以这个命题作为解答本例的基础.

若 $n=5$，则由上述命题知本例结论成立，因 $C_{5-2}^3=C_3^3=1$.

如果 $n>5$，则自 n 个点中任意取出 5 个点来，其中都有某 4 个点构成凸四边形. 所以连同重复计算在内，至少有 C_n^5 个凸四边形. 但因每个这样的凸四边形的 4 个顶点，都可归属于 C_{n-4}^1 个不同的 5 点组，所以每个凸四边形，最多可能被重复计算了 $C_{n-4}^1=n-4$ 次. 故知不同的凸四边形的数目不会少于 $C_n^5/(n-4)\geqslant C_{n-3}^2$ 个，证毕.

通过这个例题，我们看到了 5 点组对解题所起的重要作用，学到了解决平面点集问题的一个重要方法.

刚才提到的第 2 节的例 3，也可以用本节介绍的方法，即通过考虑周界多边形的形状而划分情形来证明.

情形 1　如果 5 个点的周界多边形为凸五边形或凸四边形，则结论显然成立.

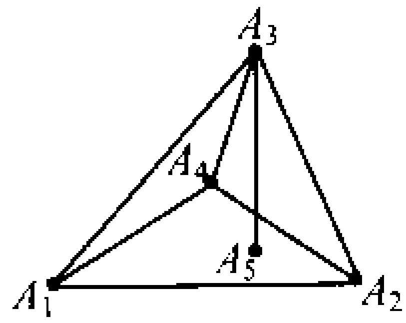


图 6.7

情形 2　如果 5 个点的周界多边形为$\triangle A_1A_2A_3$，而 A_4 和 A_5 在其内部，如图 6.7 所示，我们可来连接 A_1A_4，A_2A_4 和 A_3A_4，而将$\triangle A_1A_2A_3$ 分为 3 个三角形. 由于 5 个点中无 3 点共线，知 A_5 必落在上述 3 个三角形之一的内部，不妨设在$\triangle A_1A_2A_4$ 内部. 再连 A_3A_5，则线段 A_3A_5 必与线段 A_1A_4 或 A_2A_4 相交，且交点不在这些线段的端点处. 不妨设 A_3A_5 与 A_2A_4 相交，于是知 $A_2A_3A_4A_5$ 就是一个凸四边形（图 6.7）.

【例 5】　在平面上给出 100 个点，其中任何 3 点都不共线. 考察以上述点为顶点的所有可能的三角形. 证明，其中至多只有 70%的三角形可能是锐角三角形.

仍以 5 点情形作为解题的基础，首先证明，“平面上给出的 5 个点中，如果任何 3 点都不共线，则至少存在 3 个以上述点为顶点的非锐角三角形.”仍用老办法考虑.

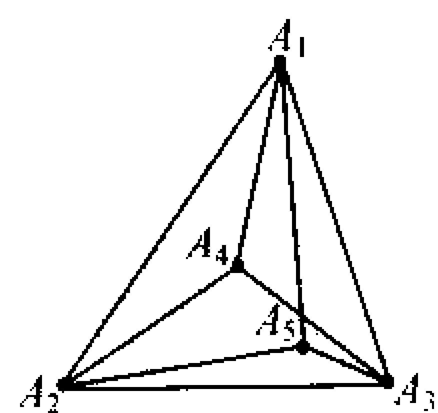


图 6.8

情形 1　5 个点的周界多边形是$\triangle A_1A_2A_3$，而 A_4，A_5 在其内部，如图 6.8 所示. 连 A_1A_4，A_2A_4 和 A_3A_4，可得 3 个以 A_4 为顶点的三角形，它们在顶点 A_4 处的 3 个内角之和为 360°，于是可知其中至少有两个是非锐角，从

而这 3 个以 A_4 为顶点的三角形中至少有两个是非锐角三角形. 同理,通过连 A_1A_5, A_2A_5 和 A_3A_5, 又至少可得两个以 A_5 为顶点的非锐角三角形.

情形 2　5 个点的周界多边形是凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$, 而 A_5 在其内部,如图 6.9 所示. 则因凸四边形 4 个内角之和是 $360°$, 知其中至少有一个非锐角,不妨 $\angle A_1$ 是之,于是 $\triangle A_1A_3A_4$ 即是一个非锐角三角形. 又 A_5 必在 $\triangle A_1A_3A_4$ 或 $\triangle A_1A_2A_3$ 内部,不妨设它在 $\triangle A_1A_2A_3$ 内部. 于是又可对 $\triangle A_1A_2A_3$ 和 A_5 作类似于情形 1 的讨论,知至少存在两个以 A_5 为顶点的非锐角三角形.

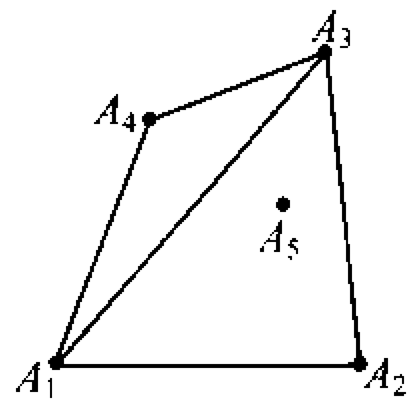
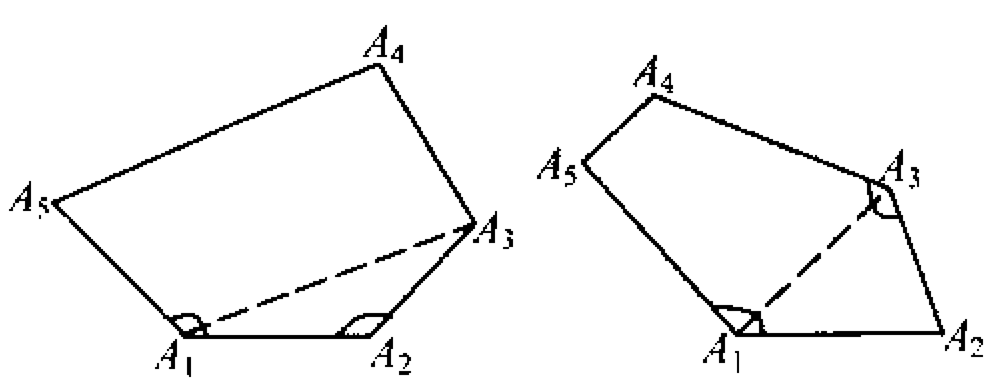


图 6.9

情形 3　5 个点的周界多边形是凸五边形 $A_1A_2A_3A_4A_5$. 由于凸五边形的 5 个内角之和是 $540°$, 知至少有两个内角为非锐角. 这两个内角可能相邻,不妨设为 $\angle A_1$ 和 $\angle A_2$; 也可能不相邻,不妨设为 $\angle A_1$ 和 $\angle A_3$, 它们分别如图 6.10(a)和(b)所示. 在两种情形下,凸四边形 $A_1A_3A_4A_5$ 的内角中,都至少还有另一个非锐角. 故至少亦有 3 个非锐角三角形.



(a)　　(b)

图 6.10

下面我们即来以这个命题作为基础，解答例 5 本身.

100 个点中共有 C_{100}^{5} 个不同的 5 点组，每个 5 点组中都至少有 3 个非锐角三角形. 但每个非锐角三角形的 3 个顶点都可归属 C_{97}^{2} 个不同的 5 点组，所以最多都可能被重复计算了 C_{97}^{2} 次，因此以这 100 个点为顶点的三角形中，至少有 $3C_{100}^{5}/C_{97}^{2}$ 个非锐角三角形，容易算出，它们至少占三角形总数 C_{100}^{3} 的 30%. 所以其中锐角三角形所占的比例不会超过 70%.

7 爬坡式推理

爬坡式推理也是一种常见的以考察简单情形作为起点的解题方式. 它虽然仍是将问题划分为种种不同情况来处理,但是情况的划分原则却不同于前面的各种方法. 在爬坡式推理中,所划分出的情况之间存在着密切的逻辑联系,有着明显的层次上的差别,它们讨论时的前后顺序是不能随意变更的,往往后者依赖于前者,就像爬坡一样逐级上升. 下面通过一些例子来解释这种解题方式.

【例 1】 一个定义在有理数集上的实值函数 f,对一切有理数 x 和 y,都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 证明,对一切有理数 x,都有 $f(x)=kx$,其中 k 是某个实常数.

这是一个解函数方程的问题,爬坡式推理对处理这类问题很有效.

(1)先由 $x=0,1,2$ 等看起. 在等式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$中令 $x=y=1$,就有 $f(2)=f(1)+f(1)=2f(1)$;若取 $x=y=0$,则有 $f(0)=f(0+0)=f(0)+f(0)=2f(0)$,即有 $f(0)=0=f(1)\cdot 0$.

这些事实令人猜测 $k=f(1)$,即对一切有理数 x 有 $f(x)=f(1)\cdot x$.

(2)再考察 x 为任意整数的情形. 首先若 x 为正整数 n.

当 $n=1$ 时，有 $f(1)=f(1)\cdot 1$. 假设当 $n=k$ 时，已有 $f(k)=f(1)\cdot k$. 那么当 $n=k+1$ 时就有

$$\begin{aligned} f(k+1) &= f(k)+f(1)=f(1)\cdot k+f(1) \\ &= f(1)\cdot(k+1) \end{aligned}$$

即对一切正整数 n，都有 $f(n)=f(1)\cdot n$；又由于

$$f(0)=f(n-n)=f(n+(-n))=f(n)+f(-n)$$

知 $f(-n)=-f(n)=f(1)\cdot(-n)$. 从而对一切正整数 x，都有 $f(x)=f(1)\cdot x$.

(3)再考虑 x 是正整数的倒数的情形. 设 n 为正整数，反复运用等式 $f(x+y)=f(x)+f(y)$ 可得

$$\begin{aligned} f(1) &= f\left(\frac{n}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-1}{n}\right)=2f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{n-2}{n}\right) \\ &= \cdots = nf\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

即 $f\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)\cdot\frac{1}{n}$. 又因 $f(0)=f\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(-\frac{1}{n}\right)$，知 $f\left(-\frac{1}{n}\right)=-f\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)\cdot\left(-\frac{1}{n}\right)$故知对一切为正整数倒数的有理数 x，也都有 $f(x)=f(1)\cdot x$.

(4)最后设 x 为任意有理数. 记 $x=\frac{m}{n}$，其中 m 和 n 是两个互质的整数，$m>0$，就有

$$\begin{aligned} f\left(\frac{m}{n}\right) &= f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{m-1}{n}\right)=2f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{m-2}{n}\right) \\ &= \cdots = mf\left(\frac{1}{n}\right)=f(1)\cdot\frac{m}{n} \end{aligned}$$

终于知对一切有理数 x,都有 $f(x)=f(1)\cdot x$.

由这个例子的解答过程,我们可以明显地看出 4 种情形之间的层次上的逐渐加深的关系,也可以看出推理上的逐级上升的爬坡趋势.人们正是通过这种逐步深入,逐级上升的处理方式,收到了分散难点,逐层突破的效果.在有了微积分知识之后,就还可以再上一个层次,把刚才所得的结论再推广到所有实数集合之中.

我们再来看一个与例 1 有某种联系的例题.

【例 2】 试问,对怎样的实数 a,存在函数 $f:R\to R$,使得对一切实数 x 和 y,都有

$$f(a(x+y))=f(x)+f(y)$$

并且 f 不恒为常数?

我们来看,怎样一步步地找出结论来.

首先,易见当 $a=1$ 时,存在满足要求的函数 f.事实上,令 $f(x)=x$ 即可.

其次,如果 $a=0$,则对任何实数 x 和 y,都有 $f(0)=f(x)+f(y)$.特别地,如果再取 $y=0$,则可知对一切实数 x,都有 $f(0)=f(x)+f(0)$.从而恒有

$$f(x)=f(0)-f(0)=0$$

这显然不合要求.可见,当 $a=0$ 时不存在满足要求的函数 f.

如上的推导引起我们的注意,使我们想到,如果 $a\neq 1$ 和 0,则对一切实数 x,只要实数 y 满足等式 $a(x+y)=y$,即只要

$$y=\frac{ax}{1-a}$$

那么，就会有

$$f(x)=f(a(x+y))-f(y)=f(y)-f(y)=0$$

这就表明，当 $a\neq 1$ 和 0，仅有恒为 0 的函数才能使题中的等式对一切实数 x 成立，亦不合要求. 所以，此时也不存在合乎要求的函数 f.

综合上述，知当且仅当 $a=1$ 时，存在满足要求的函数 f.

在这道题上，一个易犯的常见毛病是照套例 1 的模式. 结果是花了半天牛劲，也得不到所需的结论. 事实上，上述解答中的第一、第二步是容易想到的，它们都是考虑的特殊情况. 而第三步则是在仔细观察，认真琢磨第二步的推导过程的基础上想出来的. 由此可见，在爬坡式推理过程中，应当注意前面步骤的启示作用.

爬坡式推理是一种由特殊对象入手来考虑问题的好方式，它总是首先从一种最简单的情况开始验证或猜测结论，然后逐步扩大验证或探索的范围、加大推理的难度. 在每一步验证中，都把推理建筑在前一步验证出的结果或所用的方法的基础之上. 每一步都针对新暴露出来的问题进行讨论，每一步都只往上攀登一个台阶，所以每一步都不很难，但是却能步步上升，直到最终达到目标. 正是由于它的这种特点，所以人们在探索未知规律时，总是按照这种模式进行的.

【例 3】 设 M 为有限数集，今知从它的任何 3 个不同元素中都可以找出两个数来，使它们的和也属于 M. 试问，数集 M 中最多可能有多少个元素？

初初想来，M 中的元素个数必定不会太多. 但最多可能

有多少个元素,却一时难以回答.

我们先来从最简单,也是最容易想到的具有所述性质的集合看起.

显然,集合$\{1,2,3\}$就具有所述性质.问题是还能不能往里面添加元素?显然,可以把0添加进去,于是得到具有所述性质的集合$\{0,1,2,3\}$.

这样一来,便使我们想到集合$\{-3,-2,-1,0\}$也具有所述性质.这又使得我们想到,这两个集合的并集是否也具有所述性质?经过检验,发现集合

$$\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$$

的确也具有所述性质.于是,我们得知,具有所述性质的数集M中有可能不少于7个元素.

现在的问题是,具有所述性质的数集M中的元素个数能否多于7?经过一些尝试,我们发现已经不能再往所找到的7元集合中添加任何其他数了.

在我们爬坡爬到这里之前,一直没有遇到困难,一路节节上升.而现在是应当反思的时候了.我们要来认真想一想,具有所述性质的数集M中的元素个数究竟能否多于7?

为此,我们注意到,在所找到的具有所述性质的数集中,有3个正数,3个负数和0.不论往它里面添加什么元素,都只能是非0数,即不是正数就是负数.于是,问题归结为:"在具有所述性质的数集M中,能否有不少于4个正数,或不少于4个负数"?

为此,我们来看看含有不小于4个正数的数集会是

怎样的?

设某个数集 K 中有不少于 4 个正数,而最大的四个正数是

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$$

那么,a_4 就是数集 K 中的最大元.易知

$$a_3 + a_4 > a_2 + a_4 > a_1 + a_4 > a_4$$

所以,和数 $a_1 + a_4$,$a_2 + a_4$ 和 $a_3 + a_4$ 都不可能是 K 中的元素.又因为在数集 K 中,大于 a_3 的元素只有 a_4 一个,然而却有

$$a_2 + a_3 > a_1 + a_3 > a_3$$

所以,在 $a_1 + a_3$ 与 $a_2 + a_3$ 这两个数中,至多只能有一个属于数集 K.这样一来,我们发现,在数集 K 的两个 3 元子集$\{a_1, a_3, a_4\}$和$\{a_2, a_3, a_4\}$中,必然会有一个之中的任何两个数的和数都不属于数集 K.从而数集 K 不具有所述的性质.

这样一来,我们便明白了,任何含有不少于 4 个正数的数集都不具有所述的性质.同理可知,任何含有不少于 4 个负数的数集也都不具有所述的性质.于是,只要数集具有所述的性质,则其中至多可有 3 个正数,也至多可有 3 个负数,再加上一个 0,最多只能有 7 个元素.

又由于我们确实找到过含 7 个元素的具有所述性质的数集.所以,我们的结论是:在具有所述性质的数集 M 中,最多可能有 7 个元素.

在上述解答中,我们先是一路爬坡,找到了含有 7 个元素的具有所述性质的数集.然后,在遇到困难之后,易弦更

张，回头反思，通过认真考察至少含有 4 个正数的数集，发现它们都不可能具有所述的性质. 从而得到最终的断言. 这是一个运用爬坡式推理解答的比较具有特色的题目.

【例 4】 将自然数 n 的所有正约数的和数记作 $\sigma(n)$，试求出 $\sigma(n)$ 的一个表达式.

容易对 $n=1,2,3,4,5,6,7$ 分别算出相应的 $\sigma(n)$ 之值：1,3,4,7,6,12,8，但是却很难找出它们的规律. 因此，难于先看出通项公式，再设法证明它. 我们还是先来看简单情况，再设法逐步扩大观察范围.

显然，n 为质数时最简单. 事实上，如果 n 为质数 p，那么它只有 1 和 p 两个正约数，所以 $\sigma(p)=1+p$. 而如果 n 为质数的方幂时也比较简单. 因为，如果 $n=p^m$，其中 p 为质数，m 为正整数，则 n 共有 $m+1$ 个正约数：$1,p,\cdots,p^m$，所以就有

$$\sigma(p^m)=1+p+\cdots+p^m=\frac{1-p^{m+1}}{1-p}$$

上述结果提醒我们考虑 n 是某两个不同的质数 p_1 和 p_2 的正整次方幂的乘积，即 $n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}$ 的情形. 由于 $p_1^{m_1}$ 有 m_1+1 个正约数 $1,p_1,\cdots,p_1^{m_1}$，而 $p_2^{m_2}$ 有 m_2+1 个正约数 $1,p_2,\cdots,p_2^{m_2}$. 每两个这样的正约数的乘积都是 n 的正约数，所以不难看出 $n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}$ 的所有正约数如下表所列：

$$\begin{array}{lllll}
1, & p_1, & p_1^2, & \cdots, & p_1^{m_1} \\
p_2, & p_1p_2, & p_1^2p_2, & \cdots, & p_1^{m_1}p_2 \\
p_2^2, & p_1p_2^2, & p_1^2p_2^2, & \cdots, & p_1^{m_1}p_2^2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
p_2^{m_2}, & p_1p_2^{m_2}, & p_1^2p_2^{m_2}, & \cdots, & p_1^{m_1}p_2^{m_2}
\end{array}$$

它们共有$(m_1+1)(m_2+1)$个，它们的和，即$\sigma(p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2})$，等于

$$(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{m_1})(1+p_2+p_2^2+\cdots+p_2^{m_2})$$
$$=\frac{1-p_1^{m_1+1}}{1-p_1}\cdot\frac{1-p_2^{m_2+1}}{1-p_2}$$

由上述结果，我们就立即可以猜出，对$n=p_1^{m_1}\cdot p_2^{m_2}\cdots p_k^{m_k}$，有

$$\sigma(n)=\frac{1-p_1^{m_1+1}}{1-p_1}\cdot\frac{1-p_2^{m_2+1}}{1-p_2}\cdot\cdots\cdot\frac{1-p^{m_k+1}}{1-p_k}$$

于是只要再结合数学归纳法，便可确知这是关于$\sigma(n)$的一个普遍适用的表达式.

【例 5】 设$a_1,\cdots,a_n$是n个实数，分别记$A=(a_1+\cdots+a_n)/n$；$D=[(a_1-A)^2+\cdots+(a_n-A)^2]/n$. 显然$A$就是这$n$个实数的算术平均值，简称均值；而$D$叫做这$n$个实数的方差，它描述了这$n$个实数相对于均值$A$的离散程度，具有重要的概率统计意义.

取两个实数$\alpha<\beta$，并对实数$a_1,\cdots,a_n$逐一进行检查，凡数值介于α和β之间的，一律保持不动；凡小于α的，一律换成α；凡大于β的，则一律换成β. 这在概率统计上叫做对$\{a_1,\cdots,a_n\}$截尾. 现将截尾后得到的n个数记作$b_1,\cdots,b_n$，于是又可对这n个实数计算均值和方差，我们将计算结果分别记作A'和D'.

证明，$D'\leqslant D$，即截尾后的方差不会超过原有方差.

这个命题的直观意义是很明显的，因为截尾后所得到的

n 个实数在分布上更为集中在均值周围. 下面即来用爬坡式推理的方式给出证明. 为确定起见, 设 a_1 和 a_n 分别是数组 $a_1,\cdots,a_n$ 中的最小数和最大数, 且设 $A=0$. 易见这些假设并不影响问题的一般性.

(1)我们先来考察 $\alpha\leqslant a_1$ 且 $0<\beta\leqslant a_n$ 的情形.

这相当于仅对 $a_1,\cdots,a_n$ 作上方截尾, 即仅把其中大于 β 者一律换作 β, 其余者则一律不动. 不妨设截尾后的数组是

$$b_1=a_1,\cdots,b_k=a_k,b_{k+1}=\cdots=b_n=\beta$$

于是知有 $S'=b_1+\cdots+b_n\leqslant a_1+\cdots+a_n=nA=0$. 为方便计, 我们记

$$S_1=a_1+\cdots+a_k,\ S_2=a_{k+1}+\cdots+a_n,\ S=S_1+S_2$$

$$A'=\frac{1}{n}S'$$

于是就有(注意 $a_{k+1}\geqslant\beta>0,\cdots,a_n\geqslant\beta>0$).

$$\begin{aligned}D-D'&=(a_1^2+\cdots+a_n^2)/n-[(b_1-A')^2\\&\quad+\cdots+(b_n-A')^2]/n\\&=[a_{k+1}^2+\cdots+a_n^2-(n-k)\beta^2]/n+A'^2\geqslant 0\end{aligned}$$

知此时结论成立.

(2)我们再来考察 $\beta>a_n$ 且 $\alpha\geqslant0\geqslant a_1$ 的情形.

这时仅对 $a_1,\cdots,a_n$ 作下方截尾, 即仅把其中小于 α 者一律换成 α, 其余者则一律不动. 不妨设截尾后的数组是

$$b_1=\cdots=\cdots b_k=\alpha,b_{k+1}=a_{k+1},\cdots,b_n=a_n.$$

沿用前面的记号, 注意到 $S_2\geqslant(n-k)\alpha\geqslant0$, 便知

$$n(D-D')=(a_1^2+\cdots+a_n^2)-[(b_1-A')^2$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+(b_n-A')^2]\\
=&(a_1^2+\cdots+a_k^2)-k\alpha^2+nA'^2\\
=&(a_1^2+\cdots+a_k^2)-k\alpha^2+\frac{1}{n}(k\alpha+S_2)^2\\
=&(a_1^2+\cdots+a_k^2)+\frac{1}{n}S_2^2+\frac{1}{n}k^2\alpha^2\\
&+\frac{2}{n}k\alpha S_2-k\alpha^2\geqslant(a_1^2+\cdots+a_k^2)+\frac{1}{n}S_2^2\\
&+\frac{k}{n}k\alpha^2+\frac{n-k}{n}k\alpha^2-k\alpha^2\geqslant 0
\end{aligned}
$$

即 $D\geqslant D'$，知此时结论亦成立.

(3)如果 $\alpha\leqslant a_1$ 而 $\beta<0\leqslant a_n$ 或者 $0\geqslant\alpha\geqslant a_1$ 而 $\beta\geqslant a_n$，则可对 $-a_1,\cdots,-a_n,-\alpha,-\beta$ 分别按上述两款处理，知仍有 $D'\leqslant D$.

(4)一般情形，即 $\alpha\geqslant a_1$ 且 $\beta\leqslant a_n$ 的情形.

此时只要将路分作两步走，先仅对 $a_1,\cdots,a_n$ 作上方截尾，得出 $c_1,\cdots,c_n$ 即知由该组数算出的均值 A_1 和方差 D_1，有 $D_1\leqslant D$；再对 $c_1,\cdots,c_n$ 作下方截尾，得出 $b_1,\cdots,b_n$，又有 $D'\leqslant D_1$. 于是就有 $D'\leqslant D_1\leqslant D$，知结论恒成立.

读者们可以由上述推导过程看到明显的逐级爬坡过程. 如果在这里不是这样逐级爬坡，而是直接向目标冲刺的话，那么在估计 $D'-D$ 的值时，仅就我们所考虑的问题而言，未必会遇到太大的困难. 但是我们所考虑的只是概率统计中的一个极特殊场合，在对其他的场合考虑时，爬坡式推理便显示出其优越性了. 不过由于这些场合要涉及过多的概念，我

们就不再作介绍了.

下面来看一道1985年奥地利和波兰联合数学竞赛的试题.其出题的形式颇有特色,体现了对应试者探索能力的考核和测试.

【例6】 试对一切不全为0的实数x,y,z,w,给出代数式$\frac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}$的一个上界(你所给出的上界越小,你得的分数就越高.)

下面我们仍用爬坡式推理方法一步步去找出一个最好的上界来.应当说明的是,我们的目的不是为了寻求一种最简洁的解答方式,而是为了展示寻求最佳上界的逐步爬坡的过程.所以在爬坡的过程上多花些笔墨.

容易看出,只用对x,y,z,w均非负且不全为0的场合寻找,因为这样找出的上界,也一定适用于不全非负的场合.故下面恒设$x\geqslant0,y\geqslant0,z\geqslant0,w\geqslant0$,且$x^2+y^2+z^2+w^2>0$.

首先容易看出3/2是代数式的一个上界.这是因为

$$xy\leqslant\frac{1}{2}(x^2+y^2),\ 2yz\leqslant y^2+z^2,\ zw\leqslant\frac{1}{2}(z^2+w^2)$$

所以就有

$$\begin{aligned}xy+2yz+zw&\leqslant\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}y^2+\frac{3}{2}z^2+\frac{1}{2}w^2\\&\leqslant\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2+w^2)\end{aligned}$$

但是这个上界得之过易,很难相信它是一个好的上界.

下面再来分情况考虑,看看能否降低这个上界.

(1)如果 $y\leqslant x$ 且 $z\leqslant w$. 则显然有 $xy\leqslant x^2$, $zw\leqslant w^2$, 于是知

$$xy+2yz+zw\leqslant x^2+(y^2+z^2)+w^2$$

这表明此种情形下,1 即为上界,所以只需再考虑其他场合.

(2)如果 $y>x$ 且 $z>w$. 则可有

$$\begin{aligned}xy+2yz+zw&=x^2+x(y-x)+2yz+(z-w)w+w^2\\&\leqslant x^2+\left[\frac{x+(y-x)}{2}\right]^2+(y^2+z^2)\\&\quad+\left[\frac{(z-w)+w}{2}\right]^2+w^2\\&=x^2+\frac{5}{4}y^2+\frac{5}{4}z^2+w^2\\&\leqslant\frac{5}{4}(x^2+y^2+z^2+w^2)\end{aligned}$$

这表明此种情形下,5/4 是代数式的一个上界

(3)如果 $y>x$ 而 $z\leqslant w$,或是 $y\leqslant x$ 而 $z>w$. 则可综合运用上述两款的处理技术,而知仍有

$$xy+2yz+zw\leqslant\frac{5}{4}(x^2+y^2+z^2+w^2)$$

综合上述各款,即知 5/4 是代数式的一个上界.

现在得到的上界 5/4 已经比 3/2 更小了. 但是,5/4 是否就是不能再减小的最好的上界了呢? 仍尚未可知. 考虑到在上述情形(2)的处理中,仍对 x^2 和 w^2 的系数做了放大(由 1 放大为 5/4),因此有理由相信,还可能得到比 5/4 更小的上界的,问题是应该如何来着手改进?

回顾情形(2)的推导过程,可使我们看到,改进的希望乃

在于使 x^2,w^2 的系数变得和 y^2,z^2 的系数一样. 这就启发我们采用引入待定系数 α 的办法来考虑:

设 $y\geqslant \alpha x, z\geqslant \alpha w$,就有

$$
\begin{aligned}
xy+2yz+zw &= \alpha x^2+x(y-\alpha x)+2yz+(z-\alpha w)w+\alpha w^2 \\
&\leqslant \alpha x^2+\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\alpha x+(y-\alpha x)}{2}\right]^2+(y^2+z^2) \\
&\quad +\frac{1}{\alpha}\left[\frac{(z-\alpha w)+\alpha w}{2}\right]^2+\alpha w^2 \\
&= \alpha x^2+\left(\frac{1}{4\alpha}+1\right)y^2+\left(\frac{1}{4\alpha}+1\right)z^2+\alpha w^2
\end{aligned}
$$

从而只要选取 α,使得 $\alpha=\frac{1}{4\alpha}+1$,就可使得 x^2,y^2,z^2,w^2 的系数成为一样. 于是我们来解方程 $4\alpha^2-4\alpha-1=0$,得其正根为

$$\alpha=(1+\sqrt{2})/2$$

这表明 $(1+\sqrt{2})/2<5/4$ 可能就是我们所欲寻求的最小的上界. 但是我们首先应当证明它是代数式的一个上界. 于是再分情形讨论如下:

(1)当 $y\geqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}x, z\geqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}w$,则由上已证.

(2)当 $y<\frac{1+\sqrt{2}}{2}x, z<\frac{1+\sqrt{2}}{2}w$,显然有

$$
\begin{aligned}
xy+2yz+zw &\leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}x^2+(y^2+z^2)+\frac{1+\sqrt{2}}{2}w^2 \\
&\leqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2+z^2+w^2)
\end{aligned}
$$

(3)当 $y\geqslant \frac{1+\sqrt{2}}{2}x, z<\frac{1+\sqrt{2}}{2}w$;或当 $y<\frac{1+\sqrt{2}}{2}x, z\geqslant$

$\frac{1+\sqrt{2}}{2}w$时，则可综合运用上述两款的处理手法，可知都有

$$xy+2yz+zw\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}(x^2+y^2+z^2+w^2)$$

综合上述各款，即知对一切不全为0的实数 x,y,z,w，都有

$$\frac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}\leqslant\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

就是这样，我们终于通过逐级爬坡的办法，为代数式找出了一个较小的上界．而当 $x=w=1$，$y=z=\sqrt{2}+1$ 时，确实有

$$\frac{xy+2yz+zw}{x^2+y^2+z^2+w^2}=\frac{(\sqrt{2}+1)+2(\sqrt{2}+1)^2+(\sqrt{2}+1)}{2+2(\sqrt{2}+1)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

这就表明$\frac{\sqrt{2}+1}{2}$是一个可以达到的上界，从而也就是一个不能再减小的最好的上界．

到此为止，我们关于代数式上界的探索任务就算完成了．然而有趣的是，在答卷时，我们这番真正花费苦心的探索过程是不用写出的．

记得我国一位著名数学家说过："数学命题的论证，在叙述上往往是头脚颠倒的．"这句话说得是非常深刻的．写到纸面上的东西，往往不是探索者真实的思维过程，有时只是一篇根据探索结果而做的冠冕堂皇的文章．所以我们要学好数

学，就不能满足于读通纸面上的证明过程，而应当深入进去，挖掘解答者的真实思维过程. 这也可以算是数学学习上的一个重要特点吧.

在做了以上的讨论之后，我们想再对几何图形拼接问题做些介绍. 据说早在欧几里得时期，就提出了几何图形的拼接问题. 例如：一个长方形能不能剪成若干个小多边形后拼成一个正方形？一个三角形能不能剪成若干个小多边形片后拼成一个长方形？等等.

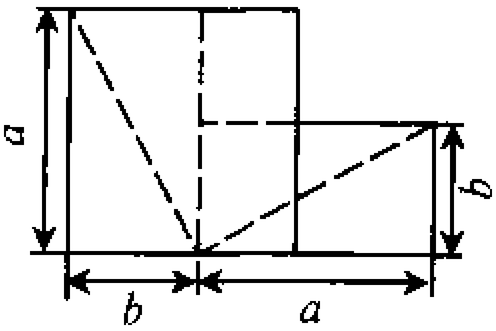
下面就是一个拼图问题的具体例子. 其解答的关键是解决两个正方形的拼接问题.

【例 7】 证明，任意多个给定的正方形，都可以把它们剪成适当的形状后拼成一个大的正方形.

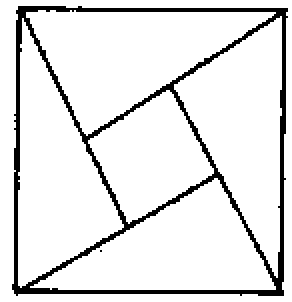
将所给出的正方形数目记作 n，你便会自然地想到可对 n 施用数学归纳法.

当 $n=1$ 时命题显然成立.

当 $n=2$ 时，可以先将所给出的两个正方形（设其边长分别是 a 和 b）按图 7.1(a)的方式靠拢，并沿虚线剪开，再按图 7.1(b)的方式将碎片拼成一个大正方形.



(a)



(b)

图 7.1

在上述基础上，我们再假设当 $n=k$ 时命题成立，于是当 $n=k+1$ 时，只要先将其中 k 个正方形剪成适当形状后拼为一个较大的正方形，再将所得的正方形同剩下的一个剪拼成一个更大的正方形，即知命题也可成立. 于是由数学归纳法原理知命题获证.

事实上，许许多多的图形问题都可以得到肯定的答案. 人们在讨论了许多具体情形而都获得肯定的答案后，又将这些问题深化成一个普遍性的命题："任意给出两个面积相等的平面几何图形，是否都能将其中一个剪成若干个小多边形后拼成与另一个形状相同的图形?"(如果可以，则称这两个几何图形等组)这便是数学上著名的平面几何图形等组问题. 这是一个相当困难的问题，尽管它的提出已经有 2300 年左右的历史了，而它的解决却还只是不足 200 年前的事情.

关于面积相等的多边形等组问题，是 19 世纪匈牙利数学家包里埃(Bolyai)和德国军官盖尔文(Gerwien)相互独立地解决的. 关于这个问题解决的具体过程，盛立人和严镇军已在他们的著作《从勾股定理谈起》(上海教育出版社，1985 年版)中做了详尽的介绍. 但是由于这个解决过程非常富有教育意义，我们还是愿把它梗概地介绍如下.

包里埃和盖尔文是通过一系列简单而切实的步骤，来达到对问题的彻底解决的. 他们首先从普遍性的问题中"退"出来，考察简单情形. 以这些简单情形为阶梯，渐次向普遍性命题进逼. 他们取得成功的秘诀正是在于坚持以简单情形作为

阶梯，逐级爬坡. 下面就是他们解决等积多边形等组问题时的具体爬坡步骤，这些步骤表现为一系列引理：

引理1 两上同底等高的平行四边形等组；

引理2 设有三个多边形 A,B,C，如果 A 和 B 等组，B 又和 C 等组，则 A 与 C 等组（即等组关系具有传递性）；

引理3 两个面积相等的矩形等组；

引理4 任何一个多边形与某个矩形等组；

定理 任何两个面积相等的多边形等组.

并于这些引理和定理，都可以从上面提到的《从勾股定理谈起》中找到详细的证明. 但是由这些引理形成的渐次升高的阶梯，以及在阶梯的每一级上所讨论的问题的简单明了的特点，却引起了我们的浓厚兴趣. 正是它们清晰地展示了人们在解决多边形等组问题这个数千年前的难题之中，是如何以简单情形作为起点、作为阶梯，而获得成功的. 也正是它们令人信服地告诉了后来者们，应当向数学界的先辈们学习些什么.

最后还要指出，面积相等的多边形的等组问题解决后，人们又进一步提出了："任何两个体积相等的多面体等组"的猜测. 这个问题被称为希尔伯特（Hilbert）第三问题，它是20世纪伟大的数学家希尔伯特在1900年于丹麦首都举行的数学大会上提出的23个问题之一. 这23个问题对20世纪的数学的发展起了重要的推动作用. 对第三问题希氏本人持怀疑态度，他甚至认为等体积的最简单的多面体——四面体也不等组，到1950年人们就会完全证实了希氏的看法. 它的整个

解答过程,读者可以从《勾股定理谈起》中读到,盛立人和严镇军同志在那里做了极为精彩的详细描述,这里就不再重复了.

8 路分两次走

先"看"出结果，再给予证明的做法是数学上常见的. 例如，在许多求数列通项公式的问题中就是这样，而前一节的例 4，在实际上也是这样. 然而"看"结果的过程，又往往可以分作两步. 其一是初探，即先不甚顾及细节，探得问题的一个初步答案；然后是细探，即逐一解决初探中未曾细究的难点，检验解答是否真能通得过. 最后才是严密地写出答案.

但是，正如前节所指出的，上述探索答案的过程，一般不会出现在卷面上，而是需要学习者自己去发掘和体会的. 而这种探索答案的功夫，却是真正需要学习者学会的. 为了帮助读者了解这方面的知识，我们来举一些典型例题，分析它们的探索答案的过程. 从这些分析中，我们将可以看出：所谓初探，实际上是一种从理想化角度来看问题的方式. 但由于撇开了各种细节不顾，所以可以收到单兵突进的效果. 细探，则是打硬仗，必须认真想出解决难点的办法，疏通道路，使初步答案成为切实可行. 这种分两次探路的办法，对于解答一些复杂的数学问题是十分有效的，它是科研工作者的基本工作方法之一. 下面就来看一些例子.

【例 1】 在平面上给出了 $2n+1$ 个点. 试问，能否作一个圆，使得有 n 个点在圆内，n 个点在圆外，1 个点在圆周上？

我们先来探出一个初步的答案. 容易想见,如果能在平面上找出一个点 O,它到这 $2n+1$ 个点的距离各不相等,那么就可按大小排列这些距离:

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_n < r_{n+1} < r_{n+2} < \cdots < r_{2n} < r_{2n+1}$$

从而就可以以 O 为圆心作一个半径是 r_{n+1} 的圆,而把距离小于 r_{n+1} 的 n 个点收在圆内,距离大于 r_{n+1} 的 n 个点放在圆外,距离等于 r_{n+1} 的 1 个点压在圆周上. 可见这样的圆是有可能作出的.

下面再来解决初探中遗留的各种细节问题.

首当其冲的问题便是:这样的 O 点是否存在? 如何去找出它? 我们知道,要想 O 点到某两点的距离不等,就应当使 O 点不在这两点连线的中垂线上;因此,要想 O 点到这 $2n+1$ 个点中的每两点的距离都不相等,就应当使 O 点不在其中任何两点连线的中垂线上. 这样一来,便又接着产生了一个新的问题:在平面上能不能找到一个点,它不在上述 $2n+1$ 个点中每两点连线的中垂线上? 结论是显然的. 因为由 $2n+1$ 个点只能两两连得有限条线段,因此只有有限条直线是它们的中垂线. 有限条直线是不能盖满整个平面的,所以平面上一定有不属于上述任何一条中垂线的点. 这样,我们便克服了解答中的所有疑难之点,而可以严密地写出卷面答案了.

下面就是卷面答案的一种写法:

答:这样的圆是可以作出的. 因为由 $2n+1$ 个点仅可两两连得有限条线段,所以平面上仅有有限条直线是它们的中垂线,它们不能盖满整个平面. 于是只要取一点 O,使它不在

上述任何一条中垂线上，便可使 O 点到上述 $2n+1$ 个点的距离两两不等. 将这些距离按大小排列出来，得到

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_n < r_{n+1} < r_{n+2} < \cdots r_{2n} < r_{2n+1}$$

则以 O 为圆心，以 r_{n+1} 为半径的圆即为所求.

以上就是关于例 1 的从初探、细探到写出卷面答案的全过程. 其中固然还有一些细节值得推敲，例如，O 点为什么一定要到 $2n+1$ 个点距离两两不等？如果选成满足下述条件

$$r_1 \leqslant r_2 \leqslant \cdots \leqslant r_n < r_{n+1} < r_{n+2} \leqslant \cdots \leqslant r_2 \leqslant r_{2n+1}$$

的点不是也可以吗？等等，但是作为本题的答案来说，只要如上的 O 点就已经足够了. 如果纠缠于过多的细节，则反而增加许多麻烦. 但是，不断提出新的问题，毕竟是一种可贵的品质. 一些新的发现或改进，便是来自于这种思考. 例如，利用前面对 O 点的选择，就可以轻易地给出下面问题的一个解答.

【例 2】 在平面上给出了 n 个点. 证明，可以作 n 个同心圆，使得每个圆周都恰好经过其中 1 个点.

事实上，只要取一点 O，使它不在其中任意两点连线的中垂线上，就可使 O 点到这 n 个点的距离各不相等，再以 O 为圆心、分别以这些距离为半径作 n 个同心圆，即可满足要求.

而如果再对上述解答继续作深入发掘，就还可以找出下面问题的一个解答：

【例 3】 在平面上给出了 n 个点. 证明，可以作 $n+1$ 个同心圆，使得：

1) 这 $n+1$ 个圆的半径都是其中半径最小的圆的整数倍；

2) 在这 $n+1$ 个圆周所组成的 n 个圆环中，每个圆环中都恰含有 n 个已知点中的 1 个点.

事实上，只要如同上法取出 O 点，并将 O 点到这 n 个点的距离依大小排列出来：

$$r_1 < r_2 < \cdots < r_n$$

那么我们只要分别以 $r_1/2,(r_1+r_2)/2,(r_2+r_3)/2,\cdots,(r_{n-1}+r_n)/2$ 以及 r_{n+1} 为半径，作 $n+1$ 个以 O 为圆心的同心圆，就可使得在由它们所组成的 n 个圆环中，每个圆环恰含有 1 个点. 但遗憾的是，这 $n+1$ 个圆的半径不一定能满足上述的条件 1). 为此，我们还应对半径的取法作某些修正.

记这 $n+1$ 个圆的半径自小至大依次为 $t_1,t_2,\cdots,t_n,t_{n+1}$，则应有

$$t_1 < r_1 < t_2 < r_2 < t_3 < r_3 < \cdots < r_{n-1} < t_n < r_n < t_{n+1}$$

但问题是如何既使这些半径满足上式，而又能使 $t_2,t_3,\cdots,t_n,t_{n+1}$ 都是 t_1 的整数倍呢？一种直觉的想法是：由于 $t_1<r_1$，所以一定存在一个整数 k，使得 $kt_1\leqslant r_1<(k+1)t_1$；而如果对 t_1 有 $t_1<r_2-r_1$，那么就一定有 $r_1<(k+1)t_1<r_2$. 因为如若不然，有 $kt_1\leqslant r_1<r_2\leqslant(k+1)t_1$，那么就会有 $t_1=(k+1)t_1-kt_1\geqslant r_2-r_1$，而与 $t_1<r_2-r_1$ 的事实矛盾. 可见只要 $t_1<r_1$ 且 $t_1<r_2-r_1$，就一定存在整数 k_1（此处 $k_1=k+1$），使 $r_1<k_1t_1<r_2$. 照此逻辑去考虑 $r_3-r_2,r_4-r_3,\cdots,r_n-r_{n-1}$，便知：只要取

$$t_1 < \min\{r_1,r_2-r_1,r_3-r_2,r_4-r_3,\cdots,r_n-r_{n-1}\}$$

就一定存在整数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使 $t_1<r_1<k_1t_1<r_2<k_2t_1<r_3<\cdots<r_{n-1}<k_{n-1}t<r_n<k_nt_1$，而只要令 $t_2=k_1t_1,t_3=k_2t_1,\cdots,t_{n+1}=k_nt_1$，并分别以 $t_1,t_2,\cdots,t_{n+1}$ 作以 O 为圆心的 $n+1$ 个圆，则所得之 n 个圆环即为所求. 这样，我们便完成了对例 3 的解答.

【例 4】 在平面上随意给出了 1000 万个点. 试问：能否用一条直线将它们隔开，使得直线两侧各有 500 万个点？

这是 1985 年中国科技大学少年班招生时的一道数学复试题，它的解答可按上述例 1 的办法思考. 设想一下，我们先选出一条直线 l，使这 100 万个点都在 l 的同一侧（直线 l 的存在性是显然的），然后把它在平面上作平行移动，在平行移动中，使这些点则是一个点一个点地被越过，那么当然就可以把它移动到适当的位置上停下，使两侧各有 500 万个点.

为了保证 l 在平行移动中可逐点穿越点集，只要使 l 不平行于 1000 万个点所决定的任何一条直线就可以了. 由于 1000 万个点尽管数目不小，但却是有限个点，只能决定有限条直线. 所以可选择 l，使它不平行于上述任何一条直线.

在那次复试中，有的考生也使用了平行移动直线的办法，但却忽略了应使直线不与 1000 万个点所决定的任何直线平行的问题，这便属于对细节考虑不周. 采用路分两次走的办法，便可有效地避免这种疏漏.

采用路分两次走的考虑办法，读者不难解决下列例题：

【例 5】 在平面上给出了 $2n+1$ 个点. 能否作一条直线，使直线两侧各有 n 个点、直线上恰有 1 个点？

【例 6】 在平面上给出了 $2n+2$ 个点，其中任何 3 点都不共线. 能否过其中某两点作一条直线，使直线两侧各有 n 个点?

【例 7】 在平面上给出了 $2n+3$ 个点，其中任何 4 点都不共圆. 能否过其中某 3 点作一个圆，使圆内外各有 n 个点?

运用上面介绍的探索办法，还可以解决许多问题. 下面再来看一个例子. 我们略去详细的探索过程，仅仅给出答案.

【例 8】 在平面上给出了 $2n$ 个点，其中任何 3 点都不共线，现知其中红、蓝两色点各有 n 个. 证明，可以一红一蓝将它们连成 n 条互不相交的线段.

如果 $n=1$，则结论显然成立. 假设 $n\leqslant k$ 时，结论也成立. 我们来考察 $n=k+1$ 的情形，分两种情况考虑.

(1)如果 $2k+2$ 个点的周界多边形上，有两种不同颜色的顶点，则一定有两个相邻顶点异色. 只要对其余 $2k$ 个点使用归纳假设，再连同连接这两个异色顶点的边，使一红一蓝地，将所有 $2k+2$ 个顶点，连成了 $k+1$ 条互不相交的线段.

(2)如果 $2k+2$ 个点的周界多边形上，全是同色顶点，不妨设全是红色点. 我们来选取一条直线 l，使它与上述周界多边形没有交点，且不平行于 $2k+2$ 个点所决定的任何一条直线. 再将 l 平行地向着点集所在的一侧移动，并不断计算它所越过的红点数目 R 与蓝点数目 B 之差 D. 在开始移动前，$R=B=D=0$；在越过全体 $2k+2$ 个点后，$R=B=k+1$，而 $D=0$. 引人注目的是，当它越过第一个点后，有 $R=1$，$B=0$ 及 $D=1$；而每当再越过一个点后，视该点的颜色，决定 R 还是 B

增加 1，从而 D 或者增加 1 或者减少 1；及至直线越过最后一个点之前，恰有 $R=k$，$B=k+1$，知 $D=-1$. 既然 D 每一次的变化幅度都是 1，而又由 1 变到了 -1，知其间必有某一时刻 $D=0$. 此时即将直线停住，这时直线两侧红蓝两色点数都相等，而且都不超过 k 个. 于是只要对直线两侧的点分别运用归纳假设，便可知结论也成立.

综合上述两种情形，由归纳法原理，知命题获证.

这个问题证明中的困难之处，在于要保证线段互不相交，我们用一条直线将点集隔开成两部分，便是为了保证不但能分别对两部分点施用归纳假设，而且所得的线段互不相交. 但是为了能对两部分点施用归纳假设，又必须每部分中红蓝点数目相等，且又都不是空集. 于是便产生出了如上所述的证法.

下面来看一些其他类型的例题.

【例 9】 任意给出 3 条互不重合的平行直线. 证明，一定存在一个正三角形，它在 3 条平行直线上各有 1 个顶点.

我们先来粗略地考虑一下这个问题. 显然，解题的关键是要具体地作出这样一个正三角形. 为了能使计划落到实处，我们来考虑能否由某个容易作出的图形改造出我们所要的正三角形.

设想已经作出图 8.1 所示的正三角形$\triangle DEF$，它的一条底边 DE 在直线 l 上. 另外两条与 l 平行的直线 m 和 n 都在 l 的同一侧，且都穿过$\triangle DEF$ 的内部，又 m 在 l 和 n 之间.

记 DF 与 m 的交点为 B，EF 与 n 的交点为 C，如果再能

在 DE 上找出一点 A，使得$\triangle ABD\cong\triangle BCF\cong\triangle CAE$，则易见$\triangle ABC$ 是正三角形，从而知其即为所求.

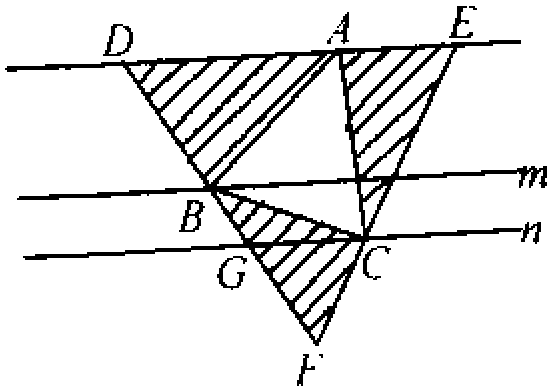


图 8.1

下面需要解决两个细节问题：(1)DE 取多长？(2)A 如何取？但它们都不难解决.

由于 l,m,n 的位置已经给定，所以不论 DE 取多长，DB 与 EC 都不随之而改变，即为定值. 因此，只要取 $DE=DB+EC$，$DA=EC$，即可使得上述 3 个三角形全等，从而$\triangle ABC$ 即可作出.

以例 9 作为基础，并运用类似的考虑办法，读者可以尝试解决如下的问题：

【例 10】 任意给出 4 个互不重合的平行平面. 证明，存在一个正四面体，它在 4 个平行平面上各有 1 个顶点.

下面我们再来看两个轨迹问题. 解决这类问题，通常是要先"看"出曲线性状，再给予证明.

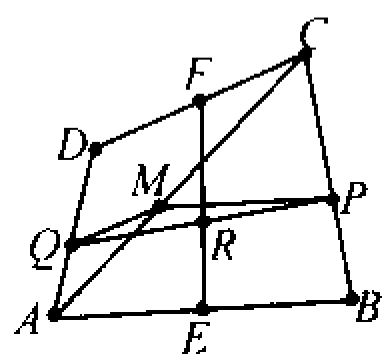


图 8.2

【例 11】 设 $ABCD$ 为凸四边形，M 为对角线 AC 上的动点，过 M 平行于 AB 的直线交 BC 于 P，过 M 平行于 DC 的直线交 AD 于 Q. 试求 M 在 AC 上移动时，PQ 中点 R 的轨迹.

我们先来粗略地估计一下轨迹的性状. 先看 M 的几个特殊位置：(1)若 M 与 A 重合，则 R 恰为 AB 的中点 E；(2)若

M 与 C 重合，则 R 恰为 DC 的中点 F；(3)若 M 与 AC 中点重合，则 P 和 Q 分别是 BC 和 DA 中点，可知 $EPFQ$ 为平行四边形，它的两条对角线 EF 和 QP 相交于中点，足见 R 也在 EF 上. 凡此种种，都令人猜测：R 的轨迹即为 EF.

下面再来作精细的推敲. 记 $A=(a_1,a_2)$，$B=(b_1,b_2)$，$C=(c_1,c_2)$，$D=(d_1,d_2)$ 于是就有 $E=(e_1,e_2)=\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$，$F=(f_1,f_2)=\left(\frac{c_1+d_1}{2},\frac{c_2+d_2}{2}\right)$.

而当 $\frac{AM}{AC}=\frac{BP}{BC}=\frac{AQ}{AD}=\lambda$ 时，有

$$P=(p_1,p_2)=(\lambda c_1+(1-\lambda)b_1,\lambda c_2+(1-\lambda)b_2)$$

$$Q=(q_1,q_2)=(\lambda d_1+(1-\lambda)a_1,\lambda d_2+(1-\lambda)a_2)$$

从而即知

$$\begin{aligned}R&=(r_1,r_2)\\&=\left(\lambda\frac{c_1+d_1}{2}+(1-\lambda)\frac{a_1+b_1}{2},\lambda\frac{c_2+d_2}{2}+(1-\lambda)\frac{a_2+b_2}{2}\right)\\&=(\lambda f_1+(1-\lambda)e_1,\lambda f_2+(1-\lambda)e_2)\end{aligned}$$

也就是说，不论 M 移动到线段 AC 上的任何位置时，R 都在线段 EF 上. 当然，反过来，对于 EF 上任意一点 R，也都可以找出 AC 上的一点 M 与之对应. 可见当 M 在 AC 上运动时，R 的轨迹确为线段 EF.

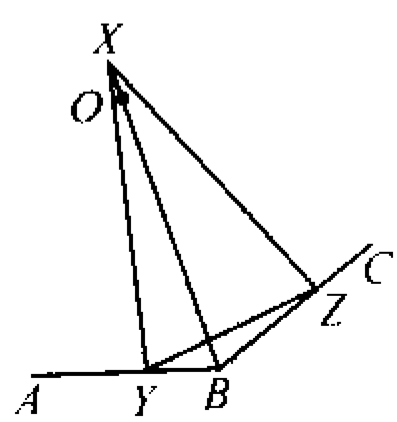


图 8.3

【例 12】 以 O 点为中心的正 n 边形($n>5$)的两个相邻顶点记为 A 和 B，而 $\triangle XYZ$ 与 $\triangle OAB$

全等. 最初令$\triangle XYZ$与$\triangle OAB$重合，然后在平面上移动$\triangle XYZ$，使点Y和Z都沿着多边形周界移动一周，而点X保持在多边形内移动，求点X的轨迹.

与前一例相似，应当首先来“看”出X的轨迹. 为此，设正多边形中与B相邻的另一顶点为C. 我们只需要考察Y位于AB上，而Z位于BC上时，X的位置情况.

显然，当YZ重合于AB或是BC时，X都重合于O；而当$YB=ZB$时，X与O，B共线. 又注意到$\angle ABC=\left(1-\frac{2}{n}\right)\pi$，$\angle YXZ=\angle AOB=\frac{2}{n}\pi$，知$X$，$Y$，$Z$，$B$ 4 点共圆，于是就有$\angle XBY=\angle XZY=\angle OBA=\angle OBY$，这反映出$X$始终与$O$，$B$共线. 至此$X$的轨迹的大致眉目便清楚了. 于是只要再精确估计出$X$在直线$BO$上的变化范围，并结合$Y$和$Z$在其他边上的情况，即可断定所求轨迹是以$O$为顶点的$n$条线段，稍加计算可知每条线段的长为$\sec\frac{\pi}{n}-1$，且$X$在每条线段来回两次.

9　着眼极端情况

从特殊性看问题的方法，归结起来说，大致应该包括两个方面，一个方面是从简单情形看问题，另一个方面是从特殊对象看问题. 着眼极端情况，就是一种从特殊对象看问题的方法. 它着眼于有某种数量达到极端值(最大值或最小值)的对象，把数值的极端性质作为分析问题的出发点. 一件十分令人感兴趣的事情，就是数学上的许多性质，往往会通过一些数量上达到极端值的对象反映出来. 这就使得我们可以以它们为重点考察对象，来寻找问题的突破口和答案. 我们只要来看看前一节例 7 的另一种解法，便会明了这种方法.

【例 1】 重解第 8 节例 8.

大家知道，假如不必顾及线段是否相交，那么就会有多种将 $2n$ 个红、蓝点，一红一蓝地，连为 n 条线段的办法. 我们设想按每种方法都连了一次，并且都求出了 n 条线段的长度之和 a. 于是这些 a 构成了一个集合 A. 显然，A 中一共含有有限个正数(因为一共只有有限种连法)，所以 A 中一定有一个最小的正数 a_0. 可以料想，长度之和为 a_0 的 n 条线段一定互不相交. 因为，如果其中有某两条线段 R_1B_1 和 R_2B_2 相交(图 9.1)，那么只要改连 R_1B_2 和 R_2B_1 就可使 $R_1B_2+R_2B_1<R_1B_1+R_2B_2$，于是所得的 a 就小于 a_0，而与 a_0 的最小性产生

矛盾，可见 a_0 必是 n 条互不相交的线段之和. 这样我们就证得了，确实存在着可使线段互不相交的连法.

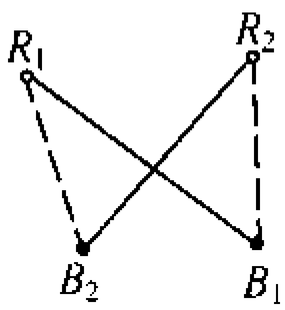


图 9.1

这个证法与前节的证法相比，更具简洁明了之特点. 这种特点正是由特殊对象看问题之方法的长处. 但在这种方法之下，我们必须构造出某个集合，并须正确选择着眼的特殊对象. 这就使这种方法的使用具有一定的难度. 解决存在性问题，是这种方法的用武之地，刚才的例 1 就是一例. 下面我们再来继续介绍一些例子.

【例 2】 证明，任何四面体中，一定有一个顶点，由它出发的 3 条棱可以构成一个三角形.

因为 3 条线段可以构成三角形的充分必要条件是：两条较短线段的长度之和大于最长的线段. 所以我们如果从四面体的最长棱出发，可以减少验证中的麻烦.

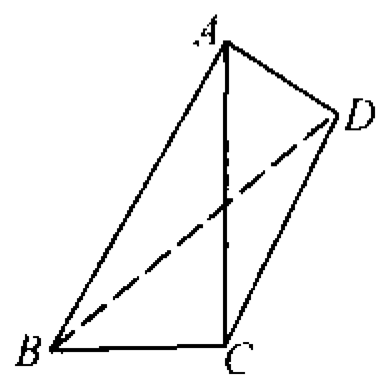


图 9.2

设 AB 是四面体 $ABCD$ 中的最长棱（图 9.2）. 我们有

$AD+BD>AB$，$AC+BC>AB$（三角形的性质）

于是知 $(AC+AD)+(BC+BD)>2AB$，这表明下列二式中必有一式成立：

$$AC+AD>AB,\qquad BC+BD>BA$$

故知顶点 A 与顶点 B 中至少有一者可为所求.

【例 3】 在平面上给出了 100 个点. 现知其中任意两点

的距离不超过 1，且任意 3 点构成钝角三角形. 证明，可用某个半径为 1/2 的圆盖住这 100 个点.

仍然通过着眼极端情况的办法来看问题，假设在这 100 个点中，A，B 两点间的距离最大. 我们就来以线段 AB 为直径作一个圆，则此圆的半径不超过 1/2. 任自其余的点中任取出一点 C，则知$\triangle ABC$ 为钝角三角形. 由于 AB 是最长边，故知$\angle C$ 为钝角，从而知 C 位于以 AB 为直径的圆内. 所以该圆盖住了所有的点.

【例 4】 已知正多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内接于$\odot O$，P 为$\odot O$ 内一点.

证明，存在正多边形两顶点 A_i 和 A_j，使$\angle A_iPA_j \geqslant \left(1-\frac{1}{n}\right)\pi$.

设正多边形的距 P 最近的顶点是 A_i，我们即来以 A_i 作为着眼对象，并分几种情形讨论.

(1)直线 A_iP 与$\odot O$ 相交的另一交点恰是正多边形的另一个顶点 A_j，则显然有$\angle A_iPA_j=\pi$.

(2)正多边形中除了 A_i 以外的所有顶点都在直线 A_iP 的同一侧(图 9.3 之(b)). 如果记直线 A_iP 与$\odot O$ 的另一交点为Q，则 Q 位于 A_i 和它的一个相邻顶点之间，不妨设为 A_{i+1}. 则因$\angle A_iOA_{i+1}=\frac{2}{n}\pi$，知$\angle A_iQA_{i+1}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi$，而显然$\angle A_iPA_{i+1}>\angle A_iQA_{i+1}$，故知$\angle A_iPA_{i+1}>\left(1-\frac{1}{n}\right)\pi$.

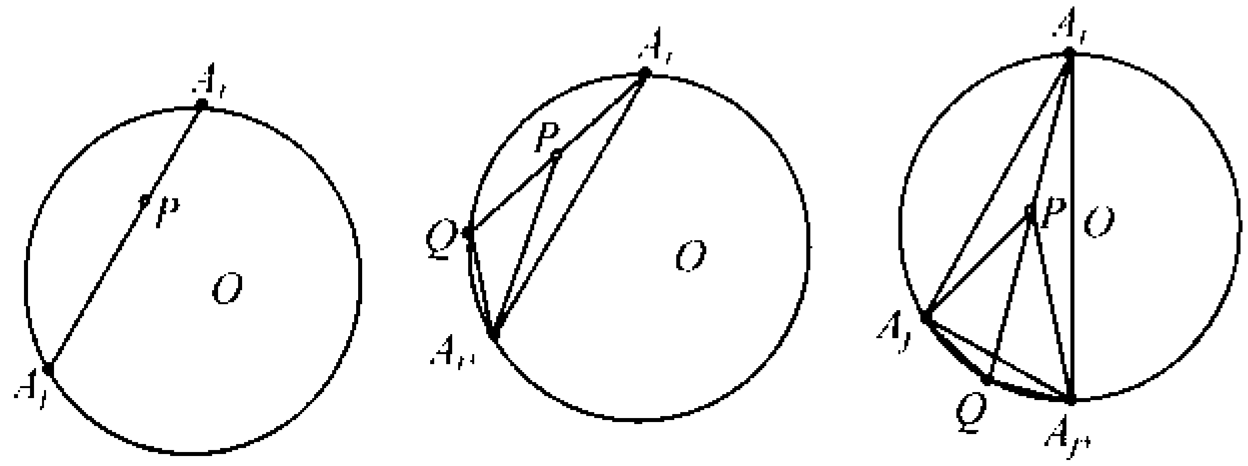
以上两款都未用到 A_i 距 P 最近的性质，再来看下一款.

(3)在直线 A_iP 的两侧都各有正多边形的一些顶点，此时 Q 点位于某两个相邻顶点之间，不妨记作 A_j 和 A_{j+1}（图 9.3 之(c)）. 则由于 $PA_i \leqslant PA_j$ 及 $PA_i \leqslant PA_{j-1}$ 知 $\angle PA_iA_j \geqslant \angle PA_jA_i$，$\angle PA_iA_{j+1} \geqslant \angle PA_{j-1}A_i$，从而有 $\angle PA_jA_i + \angle PA_{j-1}A_i \leqslant \angle A_jA_iA_{j+1} = \frac{1}{2}\angle A_jOA_{j-1} = \frac{1}{n}\pi$，所以就有

$$\angle A_iPA_j + \angle A_iPA_{j+1} \geqslant 2\pi - 2\angle A_jA_iA_{j+1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)2\pi$$

这表明 $\max\{\angle A_iPA_j, \angle A_iPA_{j+1}\} \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)\pi$.

综合上款各项，即知命题的结论成立.



(a) (b) (c)

图 9.3

回顾上述 4 个例题的证明过程，可以看到例 2 和例 3 是从数值达到最大的对象出发考虑问题，而例 1 和例 4 则是从最小的对象出发. 其中例 2 和例 3 从最大者出发的理由是明显的；例 1 从最小者出发的理由也可理解，因为既然所连的 n 条线段互不相交，那么自然可以想像它们的长度之和应当最小. 至于例 4 中，PA_i 的最小性在证明中所起的作用，读者可

从解答的第 3 款看到. 但是为什么要从距 P 最近的顶点出发,而不能从最远的顶点出发呢? 读者不妨找找原因,或者由最远的点出发来试着做一做看.

下面我们来看几个与图论有关的问题,它们都陈述为人与人之间是否认识的问题. 在解答它们时,所谓的认识都是指相互认识.

【例 5】 某次国际会议有 A,B 两国代表参加,现知每位 B 国代表都至少认识 1 位 A 国代表,而每位 A 国代表都不全认识所有 B 国代表. 证明,可以从中找出两位 A 国代表 a_1 和 a_2,两位 B 国代表 b_1 和 b_2,其中 a_1 和 b_1,a_2 和 b_2 分别互相认识,而 a_1 和 b_2,a_2 和 b_1 却分别互相不认识.

作为极端情形考虑 A 国代表中认识 B 国代表最多的 1 位. 记为 a_1. 又记 a_1 所认识的 B 国代表的集合为 B_1,则 B_1 是 B 国全体代表集合的真子集. 于是可找到 1 位 B 国代表 $b_2 \notin B_1$. 再任找 1 位认识 b_2 的 A 国代表作为 a_2,则 a_2 不会是 a_1,且 a_2 不会全认识 B_1 中所有成员,(否则,a_2 所认识的 B 国代表人数就超过 a_1),所以可以从 B_1 中找出 1 位 b_1,使 a_2 不认识他. 于是如上所述的 a_1,a_2,b_1,b_2 即为所求.

【例 6】 某次体育比赛共有 n 名($n \geqslant 3$)选手参加,每两名选手都比赛一局. 现知无平局出现,且每个选手都未能击败所有对手. 证明,其中存在 3 名选手,有甲胜乙、乙胜丙、丙胜甲.

取其中所赢局数最多的一位选手作乙,然后取一位曾击败乙的选手作甲(因乙未获全胜,知有这样的甲存在). 再考

虑被乙击败的选手全体，知其中必有丙胜过甲（否则，甲所击败的对手数目就超过了乙）. 所述之甲、乙、丙即为所求.

下面再来看一个有关熟人的更为有趣的问题，我们同样可用着眼极端情况的办法给出解答，不过具体做法不太相同.

【例 7】 设有 n 个人 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，其中有些人相互认识. 证明，可用某种方式将他们分成两组，使每人都至少有一半熟人不跟他同在一组.

设 A_i 有 c_i 个熟人，其中有 d_i 不跟他同组，则 d_i 随分组方式变化，我们的目标是要证明，存在某种分法可使 $d_i \geqslant \frac{1}{2} c_i, i=1,2,\cdots,n$.

记 $d=d_1+d_2+\cdots+d_n$，则分法不同，d 也可能不同. 设 D 是所有这些 d 构成的集合，则 D 是一个由有限个正整数构成的集合，其中必有一个最大整数 d'. 下面即来证明，与 d' 相应的分法即能合乎要求.

用反证法. 设 $d'=d_1+d_2+\cdots+d_n$ 已达 D 中最大值，但甲组有某成员 A_i，他在乙组中的熟人数目 $d_i<\frac{1}{2}c_i$. 我们来将 A_i 调往乙组. 这时甲组中原有的 c_i-d_i 个他的熟人不再与他同组；而乙组原来的 d_i 个他的熟人却与他同组了，这些人便都由于他调入乙组而减少了一个不同组的熟人；其他再无变化. 所以调动后的 d 与调动前的 d' 之差为

$$d-d'=(c_i-d_i)-d_i=c_i-2d_i>0$$

即有 $d>d'$，这与 d' 的最大性产生矛盾，再由甲、乙两组的对

称性，知已明所欲证.

本例中的这种考虑和值的极端值的手法，与例 1 相似，而较之其他几个例题复杂. 本例的目标是要使每一个 A_i，都有 $d_i \geqslant \frac{1}{2}c_i$，因而需要兼顾每一个人，这与前面若干例子中，仅要求找出某些个对象，是很不相同的. 为了兼顾所有的人，所以考虑和值 d，是一种可取的办法；而为了使每个 d_i 都不小于 $(1/2)c_i$，所以从 D 中的最大值 d' 出发，这也是十分自然和合理的. 如果在此回顾一下例 1，便可发现许多相似之处：为了使 n 条线段都两两不交，需要兼顾每一条而考虑和值；由于不相交时可望长度最小，而由 A 中的最小值 a_0 出发，等等. 这些回顾与比较，可以帮助我们更好地了解这种方法，积累使用的经验.

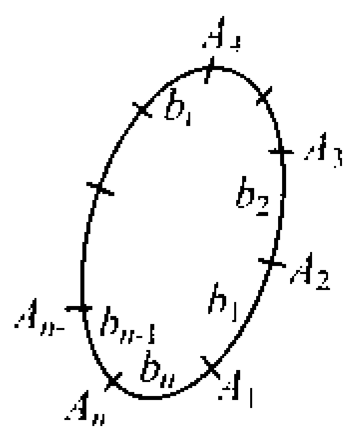


图 9.4

考虑和值的极端值，也是数学上的常见办法. 利用这种办法，我们可以来解答如下例题，它是 60 年代北京市的一道数学竞赛题，具有运筹意味.

【例 8】 沿着一条环形公路分布着一些加油站，现知各站的储油总量刚好够一辆汽车环行一周，但每一站的储油量未必够它到达下一站. 如果汽车每到一站便将该站的储油全都捎上，证明，汽车一定可从某个储油站出发，利用这些油环行一周后回到出发点.

我们假定汽车循逆时针方向环行，对循顺时针方向可作

类似考虑.将这些储油站记为 $A_1,\cdots,A_2,\cdots,A_n$,并设它们按逆时针方向依次布列在环状公路上.将 A_i 的储油量与汽车由该站到达下一站所需油量之差记作 b_i,于是就有 $b_1+b_2+\cdots+b_n=0$.我们来自 b_1 起,逐个累加这些差数,得到累计数 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 如下:

$$B_1=b_1,B_2=b_1+b_2,\cdots,B_i=b_1+b_2+\cdots+b_i,\cdots$$
$$B_n=b_1+b_3+\cdots+b_n=0$$

设 B_l 是这些累计数中的最小值,则有 $B_l\leqslant B_n=0$.如果 $B_l=0$,则说明汽车自 A_1 出发,即可利用这些油,逆时针环行一周.如果 $B_l<0$,那么汽车就应当自 A_l 出发环行.因为由 B_l 的最小性,不难验证,自 A_l 开始所作 b_i 的累加的结果都非负.从而说明汽车可以利用这些油,自 A_l 出发逆时针环行一周后回到 A_l.

我们已经看了不少,由考虑极端情况来解的存在性问题的例子.下面我们来举一些其他方面的例子,它们分别属于不同类型的问题,藉此可以对这种方法的应用范围作一初步了解.

【例9】 证明,不可能存在恰有7条棱的多面体.

这是一个很有趣的命题.我们知道:四面体有6条棱,四棱锥有8条棱.可是为什么不能有多面体是7条棱的呢?

我们来观察多面体中这样的顶点,即由它出发的棱的数目最多的顶点,并记这些棱的数目为 n,记该顶点为 A,易见 $n\geqslant 3$.

如果 $n=3$,则发自多面体每个顶点的棱,显然都是3条.

若多面体的顶点数为 m，则总棱数应为 $3m/2$. 这是因为每条棱连接着两个顶点. 这样一来，便知 m 为偶数，从而知总棱数是 3 的倍数，故知多面体不会是 7 条棱.

如果 $n\geqslant4$，则过顶点 A 至少有 4 个面，而每个面至少有 3 条边. 这样，仅以这 4 个面上的棱为数，已不少于 8 条.

综合上述，即知不可能存在恰有 7 条棱的多面体.

【例 10】 将整数 1 至 100 填入 10×10 的方格表，每格一数. 证明，不存在这样的填法，使得每两个有公共边的方格中，所填数字之差都不超过 5.

我们只要考察一下 1 和 100 这两个极端值在表中的位置，即可知道所言的填法不可能存在.

设 1 填在表中的第 i 行中，100 填在表中的第 j 列中，(我们约定，横向为行，纵向为列)，而将填在第 i 行与第 j 列交叉处的数记作 a.

易知，第 i 行中的每两个相邻方格都具有公共边，如果其中所填数字之差都不超过 5，那么由于 a 与 1 之间至多隔着 8 个方格，知 $a\leqslant1+5\times9=46$.

同理，第 j 列中的每两个相邻方格都具有公共边，如果其中所填数字之差也都不超过 5，则因 a 与 100 之间至多隔着 8 个方格，知 $a\geqslant100-5\times9=55$.

上述两件事实是矛盾的，故知所言的填法不可能存在.

以上二例都是所谓不存在问题. 由上述讨论看出，着眼极端情况办法对解决这类问题也有效.

【例 11】 下面给出无穷多个由正整数构成的无穷数列：

S_1:1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,…

S_2:2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,…

S_3:3,3,5,5,7,7,9,9,11,11,13,13,15,15,…

S_4:4,4,5,5,7,7,10,10,11,11,13,13,16,16,…

S_5:5,5,5,5,7,7,10,10,11,11,13,13,17,17,…

…………

其中 S_1 即为全体正整数按递增顺序列成的数列;S_2 由 S_1 中每一项加 1 得出;S_3 由 S_2 中每一偶数加 1、奇数保持不变得到;S_4 由 S_3 中每一可被 3 整除的数加 1、其余保持不变得到;S_5 由 S_4 中每一可被 4 整除的数加 1、其余保持不变得到;依此类推即可定义出每一个数列. 现经过观察,发现对于有些 n,数列 S_n 中的前 $n-1$ 项都是 n. 如果将这样的正整数 n 的集合记作 N_0,试确定 N_0 的内容.

由上面列出的数列,可以看出:(1)2,3,5 都属于 N_0;(2)S_2 的第 $n-1$ 项是 n;(3)每个 S_n 都是递增的且第 1 项是 n. 对于确定 N_0 的内容来说,这些线索都十分重要.

设 $n\in N_0$,则 S_n 的前 $n-1$ 项都是 n,特别地,其中第 $n-1$ 项是 n. 但由上所说,S_2 的第 $n-1$ 项也是 n,这表明,在 S_2 与 S_n 之间的每一个数列中的第 $n-1$ 项都是 n. 而这只有当 n 不是 $2,\cdots,n-1$ 中任何一个的倍数时,才有可能,可见 n 是质数.

反之,设 n 是一个质数,则因 S_2 的第 $n-1$ 项已是 n,故知该项在 S_2 至 S_n 中都不会变化,从而 S_n 的第 $n-1$ 项是 n. 又因 S_n 第 1 项是 n,又 S_n 为递增数列,知 S_n 的前 $n-1$ 项全

是 n. 所以 $n\in N_0$.

综合上述两方面，即知 N_0 是质数全体的集合.

在这个问题的解答中，我们分别抓住了 S_n 的第 $n-1$ 项和第 1 项考虑问题，就是一种着眼极端情况的办法. 这个问题的类型，与前面各例都很不相同，说明了这种看问题的办法随处可用.

下面再来看两个从考察取得某种最小值的对象入手，以进行反证的例题.

【例 12】 在坐标平面上给定凸五边形 $ABCDE$，它的所有顶点都是整点. 将它的五条对角线的两两交点依次记作 A_1, B_1, C_1, D_1, E_1，证明，在五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 的内部或周界上至少有一个整点.

如所周知，所有顶点都是整点的多边形称为格点多边形，所以这又是一个关于格点多边形的命题.

我们分两步来证明. 首先证明在格点凸五边形内部一定还有整点(即格点)；然后再证明必有格点落在"内五边形"的内部或周界上. 这里，为方便起见，我们把如上所说的五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 称为"内五边形"，下面，我们还将把"在……内部或周界上"通称为"在……中".

先证在格点凸五边形内部 $ABCDE$ 一定还有整点(即格点). 设三角形 ABC 是三角形 ABC, BCD, CDE, DEA 和 EAB 中面积最小的一个. 记 AC 的中点为 F，再作点 B 关于 F 的对称点 O，显然 O 亦为整点. 易知，AO 平行于 BC，CO 平行于 AB. 由于三角形 ABC 是上述五个三角形中面积最小的

一个，所以点 A 到直线 BC 的距离不大于点 D 到该直线的距离；点 C 到直线 AB 的距离不大于点 E 到该直线的距离，而 AD 与 CE 的交点是 B_1(见图 9.5). 故知整点 O 必在$\triangle AB_1C$ 中，更在格点凸五边形 $ABCDE$ 内部. 这就表明，在格点凸五边形内部一定还有整点(即格点).

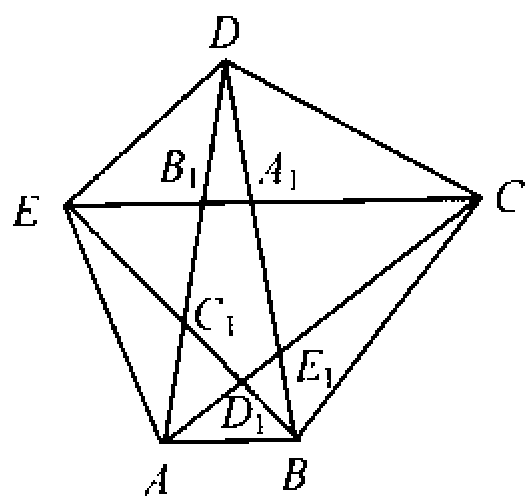


图 9.5

我们再证格点凸五边形内部的整点必定落在"内五边形"中.

用反证法来证. 我们把考虑的着眼点放在使结论不成立的"具有最小面积 S"的五边形上. 这种办法(着眼点)经常在反证法中使用. 这里之所以可以着眼于"具有最小面积 S"的五边形，是因为所给定的凸五边形是格点五边形，而任何格点多边形的面积一定是整数或半整数(即分母为 2 的分数，见本书第 4 节例 5)，所以一定存在着面积最小的.

设凸五边形 $ABCDE$ 就是使得上述结论不成立的"具有最小面积 S"的五边形. 由上所证，在$\triangle AB_1C$ 中落有整点 O. 若它不在"内五边形"$A_1B_1C_1D_1E_1$ 中，则必在$\triangle AC_1D_1$ 或$\triangle CA_1E_1$ 内部. 如果它在$\triangle AC_1D_1$ 内部，那么凸五边形 $OBCDE$ 就也是格点凸五边形，而且它的"内五边形"位于五边形 $A_1B_1C_1D_1E_1$ 之中，从而它也是"使得上述结论不成立的格点五边形". 但是它的面积小于 S，这就与我们的假设"$ABCDE$ 是使得上述结论不成立的具有最小面积的格点五边形"相矛

盾，故为不可能. 同理，O 也不可能在$\triangle CA_1E_1$ 内部，故必在“内五边形”$A_1B_1C_1D_1E_1$ 中.

这个问题的证明分为两步，两步中都是抓住“特殊对象”展开讨论. 先在证明“内部有整点”时，抓住五个三角形中面积最小者，因而不但证得了“有整点”，而且还初步确定了整点所可能在的位置(在$\triangle AB_1C$ 中)，这就为下一步打下了有利的基础. 而在第二步证明中，则是抓住使结论不成立的“具有最小面积 S”的五边形上进行讨论，使得后面的反证法有了立论的出发点. 并且，最终导出与“最小性”的矛盾. 这一点是特别值得大家学习的. 我们再来看一个采用类似立论出发点，通过反证，导出与“最小性”的矛盾来的例子.

【例 13】 某国有若干个城市，某些城市之间有道路相连，由每个城市都连出 3 条道路. 证明，存在一个由道路形成的圈，它的长度不能被 3 整除.

需要指出，这里的道路长度是按道路上的城市数目减 1 计算，例如，由城市 A 到 B 再到 C 的道路长度就是 2，如此等等.

为解答本题，需要将其转化为图论语言(参阅本书第 3 节例 5 及其前面的一段话). 用图论的语言表述，本题就是：

如果平面图中有有限个顶点，并且每个顶点的度数都是 3，则必存在一个圈，它的长度不能被 3 整除.

为了便于证明，我们来证明一个更强的命题：

如果平面图中有有限个顶点，并且每个顶点的度数都不小于 3，则必存在一个圈，它的长度不能被 3 整除.

仍然用反证法，假设存在某些平面图，它们都只有有限个顶点，并且每个顶点的度数都不小于 3，然而这些图中的每个圈的长度都能被 3 整除. 为便于说话，我们把这些图称为具有性质 C.

现在，假定图 G_0 是具有性质 C 的"顶点数目最少"的图. 我们来把着眼点放在图 G_0 上，并最终找出与"最小性"的矛盾来.

首先，由于图 G_0 中每个顶点的度数都不小于 3，所以由其中任何一个顶点出发，都可以连续地沿着不同的边到达一个又一个顶点. 但是顶点数目有限，所以必有某一时刻到达已经到过的顶点，从而说明图 G_0 中一定有圈存在.

由于图 G_0 中的每个圈的长度都能被 3 整除，所以存在由顶点 A_1，A_2，…，A_{3k} 形成的圈. 设 A_i 与 A_j 是该圈上的两个顶点. 于是在该圈上由 A_i 到 A_j 就有两条路可走，一条路为"上半圈"，记作 L_1；另一条路为"下半圈"，记作 L_2. 如果在它们之间还有第三条路 L_0 相连，那么现在就有 3 个圈了：L_1+L_2，L_1+L_0，L_2+L_0. 注意，图 G_0 中的每个圈的长度都能被 3 整除，所以如果分别将 L_1，L_2 和 L_0 的长度记作 l_1，l_2 和 l_0，那么就有

$$l_1+l_2\equiv l_1+l_0\equiv l_2+l_0\equiv 0(\mathrm{mod}3)$$

由此不难推出 $l_1\equiv l_2\equiv l_0\equiv 0(\mathrm{mod}3)$.

上述结论表明，连接该圈上两个不同顶点的任何其他"路"L_0 的长度 l_0 一定是 3 的倍数. 这个结论将在下面的推理过程中起重要作用.

现在,我们来分别考察 G_0 中的两类顶点:一类是 A_1, A_2,…,A_{3k},称为圈上顶点,另一类是 G_0 中的其他顶点,称为圈外顶点.

由于每个顶点的度数都不小于 3,所以每个圈上顶点 A_i 除了已连在圈上的两条边 A_iA_{i-1} 和 A_iA_{i+1} 之外,都还至少连出了另一条边. 我们指出,这另一条边一定不能直接连往圈上的任何其他顶点 A_j. 因为任何连接 A_i 与 A_j 的第三条路 L_0 的长度 l_0 一定是 3 的倍数,所以在这条路上位于 A_i 与 A_j 之间一定要有圈外顶点才行. 这就是说,每个圈上顶点的其他边都是连向圈外顶点的. 我们再来看圈外顶点. 每个圈外顶点的度数也都不小于 3,应分别连向至少 3 个不同的其他顶点. 如果某个圈外顶点 B 有两条边分别与圈上的两个不同顶点 A_i 与 A_j 直接相连,则 $A_i \leftrightarrow B \leftrightarrow A_j$ 就是一条连接 A_i 与 A_j 的第三条路 L_0,但是它的长度 l_0 是 2,与上面所证得的结论"l_0 一定是 3 的倍数"相矛盾,故为不可能. 所以,每个圈外顶点都至多与一个圈上顶点有边直接相连.

在弄清了上述事实之后,我们就可以来构造一个"比图 G_0 的顶点数目还要少的,也具有性质 C 的图 G_1", 由此得出与图 G_0 的顶点数目的最小性的矛盾.

图 G_1 的作法如下:保留图 G_0 中的所有圈外顶点及其相互之间的连线;把图 G_0 中的"由顶点 A_1,A_2,…,A_{3k} 形成的圈"用一个顶点 A 来代替,凡是原来由圈上各个顶点连向圈外顶点的边,均改为由顶点 A 连向该圈外顶点. 注意,由于图 G_0 中每个圈外顶点都至多有一条边与圈上顶点相连,所以这

种代替不会出现问题. 于是图 G_1 便构造好了.

显然,图 G_1 的顶点比图 G_0 少,我们要来说明图 G_1 也具有性质 C.

首先,在图 G_1 中,原来的每个圈外顶点的度数都保持不变. 因为,它们之间的连线全都保留,而原来它们都至多与一个圈上顶点之间有线相连,现在,该连线已由它与顶点 A 之间的连线来代替,所以度数未变. 又由于原来图 G_0 中的每个圈上顶点都至少有一条边连向圈外顶点,现在全部改由顶点 A 来连,所以顶点 A 的度数至少为 $3k$. 这就证明了图 G_1 中的顶点度数合乎性质 C 的要求. 其次,如果图 G_0 中的某个圈上的所有顶点全是圈外顶点,那么该圈原封不动地搬到了图 G_1 中,当然其长度未变,而如果图 G_0 中的某个圈上仅有一个圈上顶点,那么它也基本上原封不动地搬到了图 G_1 中(只是把该圈上顶点换成了顶点 A),当然其长度也未变. 而如果图 G_0 中的某个圈上有多个相连的圈上顶点,则该圈上的一部分就是原来的"半个圈"L_1,而另一部分就是所谓 L_0,现在在图 G_1 中,L_1 缩成了一个点,L_0 则封闭成了一个圈. 由前所证,L_0 的长度 l_0 一定是 3 的倍数. 最后,如果图 G_0 中的某个圈上相间地分布着一些圈上顶点,那么,易知该圈上位于每两个圈上顶点之间的部分在图 G_1 中都封闭成为长度是 3 的倍数的圈. 故而知,图 G_1 中的所有圈的长度都是 3 的倍数. 所以,图 G_1 也具有性质 C,但是它的顶点数目比图 G_0 少,这与图 G_0 是具有性质 C 的"顶点数目最少"的图的假定相矛盾. 这个矛盾表明,"不存在具有性质 C"的图,从而图中必有长度非 3 的

倍数的圈.

这个题目当然属于较难的.但是其中所体现的思想方法却与前一个例题相类似.可以这样说,以具有某种“最小性”的对象作为讨论的出发点,经过推理,得出与“最小性”的矛盾,是数学中的一种常用办法.当然,有时也可能是某种“最大性”或是某种其他类型的极端性质.

下面的一个例子比较复杂,它也是采用反证法,通过考察某种达到最小性的对象找出矛盾.不过,其矛盾的落脚点不是“最小性”,而是导致与题中条件矛盾.

【例 14】 图形 Φ 由若干个 1×1 方格构成,并具有如下性质:对于 $m\times n$ 方格表的任何一种填数方式(在每个方格中填入一个实数),只要表中所有数的和为正,那么就都可以把图形 Φ 适当放入表中,使得被它盖住的方格中的所有数之和为正数.证明,该方格表可被 Φ 盖住若干层(意指每个小方格都被盖住同样多的层数).

为了证明题中结论,我们设 $\Phi_1,\cdots,\Phi_k$ 是把 Φ 放入方格表的所有不同放置位置,并且把题中的命题改述为:

“可以按位置 Φ_i 把 Φ 放入方格表 d_i‘次’(此处 d_i 为有理数),$i=1,2,\cdots,k$,使得在每个小方格上堆放的 Φ 的‘次数’之和都是 1”.

可以作这种改述的理由是:能够找到某个自然数 N,使得所有的 Nd_i 都为非负整数.

用反证法.我们来证明,如果上述命题不成立,那么就可以找到一种填数方式,使得表中的所有数之和为正,但是对

于图形 Φ 的任何一种放置位置，被它盖住的方格中的所有数之和都是非正数.

将表中的小方格编为 $1,2,\cdots,mn$ 号，把按放置位置 Φ_i $(i=1,2,\cdots,k)$ 放置的图形 Φ 称为 Φ_i，并且都定义一个函数：

$$P_i(j)=\begin{cases}1, & \text{如果第 } j \text{ 号方格被 } \Phi_i \text{ 盖住；}\\ 0, & \text{如要第 } j \text{ 号方格未被 } \Phi_i \text{ 盖住.}\end{cases}$$

于是对于数组 $\{d_i\}$，数 $\theta_j=1-\sum\limits_{i=1}^{k}d_iP_i(j)$ 就表示第 j 号方格被盖住的'次数'之和与 1 的差距. 注意，在反证法的假设之下，θ_j 不会全都为 0，$j=1,2,\cdots,mn$.

为了寻找到与题意的矛盾之处，我们记 $|\theta|^2=\sum\limits_{j=1}^{mn}\theta_j^2$，并且选取一组非负数 $\{d_i\}$，使 $|\theta|$ 达到最小值（因为 $|\theta|^2$ 是数组 $\{d_i\}$ 的二次函数，且二次项系数为正，所以其最小值存在）.

我们来证明，若将这时的 θ_j 填入第 j 号方格，$j=1,2,\cdots,mn$，那么就会"使得表中的所有数之和为正，但是对于图形 Φ 的任何一种放置位置，被它盖住的方格中的所有数之和都是非正数"，从而得到与题意的矛盾. 应当注意，把着眼点放在这一组数上，正是本题证明中的精华之处.

设想将其中一个 d_i 换为 $d'_i=d_i+x$，其中 $x\geqslant -d_i$，则有 $\theta'_j=\theta_j-xP_i(j)$，于是相应有

$$\begin{aligned}|\theta'|^2&=\sum_{j=1}^{mn}(\theta'_j)^2=\sum_{j=1}^{mn}(\theta_j-xP_i(j))^2\\&=|\theta|^2-2x\sum_{j=1}^{mn}\theta_jP_i(j)+x^2\sum_{j=1}^{mn}P_i^2(j)\end{aligned}$$

这表明我们有如下的表达式：

$$|\theta'|^2=f(x)=ax^2-2b_ix+c$$

其中 $c=|\theta|^2$，$b_i=\sum_{j=1}^{mn}\theta_jP_i(j)$，$a=\sum_{j=1}^{mn}P_i^2(j)=\sum_{j=1}^{mn}P_i(j)=N$，而 N 恰好是图形 Φ 中的小方格个数. 从而，$f(x)$ 是定义在 $x\geqslant -d_i$ 上的首项系数为正的二次函数 $f(x)$.

应当注意，在我们对 $\{d_i\}$ 的取法之下，$f(x)$ 是于 $x=0$ 处达到最小值 $c=|\theta|^2$ 的.

易知，如果 $d_i>0$，则 $f(x)$ 只能在 $b_i=0$ 时，于 $x=0$ 处达到最小值 $c=|\theta|^2$；而如果 $d_i=0$，则 $f(x)$ 只能在 $b_i\leqslant 0$ 时，于 $x=0$ 处达到最小值 $c=|\theta|^2$. 由于 $|\theta'|^2=f(x)$ 的最小值就是在 $x=0$ 处达到的，所以必有 $b_i=\sum_{j=1}^{mn}\theta_jP_i(j)$ 非正，而它就是被 Φ_i 盖住的所有数之和. 上述推理对一切 $i=1,2,\cdots,k$ 都适用，所以对于图形 Φ 的任何一种放置位置，被它盖住的方格中的所有数之和都是非正数.

另一方面，填在表中所有方格之中的数的总和等于 $\sum_{j=1}^{mn}\theta_j$，我们来证明它是正数. 注意到当 $d_i>0$ 时必有 $b_i=0$，从而就有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{mn}\theta_j&=\sum_{j=1}^{mn}\theta_j-\sum_{i:d_i>0}d_ib_i=\sum_{j=1}^{mn}\theta_j-\sum_{i:d_i>0}d_i\sum_{j=1}^{mn}\theta_jP_i(j)\\&=\sum_{j=1}^{mn}\left\{\theta_j-\sum_{i=1}^{k}d_i(\theta_jP_i(j))\right\}\\&=\sum_{j=1}^{mn}\theta_j\left\{1-\sum_{i=1}^{k}d_iP_i(j)\right\}=\sum_{j=1}^{mn}\theta_j^2\end{aligned}$$

由于 θ_j，$j=1,2,\cdots,mn$，不会全都为 0，所以上述之平方和为正，亦即 $\sum_{j=1}^{mn}\theta_j$ 为正数.

这样一来，便恰如我们所言，若将上述的 θ_j 填入第 j 号方格，$j=1,2,\cdots,mn$，那么就会"使得表中的所有数之和为正，但是对于图形 Φ 的任何一种放置位置，被它盖住的方格中的所有数之和都是非正数"，从而得到与题意的矛盾，可见题中命题成立.

本题的证明无论是从立意上，还是从处理手法上，都颇具匠心，值得我们好好学习.

最后，作为本节的结束，我们来介绍一下著名的西尔维斯特(Sylvester)问题. 西尔维斯特是 19 世纪英籍犹太数学家，他富于想像力，提出过许多猜测. 其中虽然有些误猜，但相当多数是正确的. 我们将要介绍的一个西尔维斯特问题，是他在 1893 年提出来的，但是直到 1933 年，才有人给出解答. 最初的解答不但用了高深的数学知识，而且极为繁琐. 若干年后，才有人通过着眼极端情况看问题，给出了一个初等证明，距问题的提出时间竟达半个世纪之久. 下面我们将要看到，这个初等证明原来却是十分简洁的. 这个初等证明最初发表在美国《数学教师》月刊上，据说发表时连作者的名字都没有署出.

这个问题是这样的：

【例 15】 在平面上给出了一个由 n 个点组成的点集 M，如果由 M 中的点所决定的每一条直线上，都至少有 M 中 3

个点，则 M 中的点全都位于同一条直线上.

也有人把它陈述为如下形式：在平面上给出了 n 个点，如果它们不全在同一条直线上，则一定可作一条直线只经过其中两个点.

显然，这两种陈述形式是等价的，它们互为逆否命题. 我们还是来讨论前一种形式下的命题.

假设 M 中的点不全位于同一条直线上. 于是对于由 M 中的点所决定的每一条直线，都必然有 M 中另一些点位于线外. 我们来对每一条这样的直线，都求出所有属于 M 的线外点到直线的距离，这些距离 d 构成了一个正数集合 D. 显然，D 中的成员数目是有限的，所以其中必有一个最小的正数 d_0.

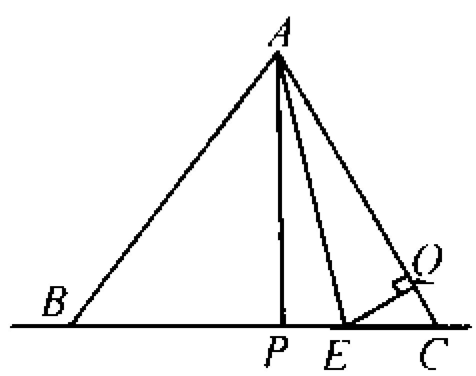


图 9.6

设 d_0 是 M 中的点 A 到由 M 中其余两点 B，C 所决定的直线 l 的距离（图 9.6）. 我们来作 $AP \perp l$，P 为垂足，则有 $AP=d_0$. 在 l 上除 B，C 两点外，还存在 M 中至少一点 E. 显然，B，C，E 三点中至少有两点位于 P 的同一侧，不妨设 C 和 E 是之，且设 $PE \leqslant PC$（E 可能与 P 重合）. 于是我们再来作 $EQ \perp AC$，Q 为垂足，记 $d_1=EQ$，则有 $d_1 \in D$，故知 $d_1 \geqslant d_0$. 但是易证 $\triangle CEQ \sim \triangle CAP$，从而就有

$$\frac{d_1}{d_0}=\frac{EQ}{AP}=\frac{EC}{AC}<\frac{EC}{PC} \leqslant 1$$

故又得到 $d_1<d_0$. 上述两件事实是矛盾的. 这就表明 M 中的

点全都位于同一条直线上.

如果当一当事后诸葛亮的话，那么谁也不会认为这个证明有多少复杂之处. 但是历史的事实却告诉我们，人们为了探索它，却足足用去了半个世纪. 由此足见，对未知世界的探索是多么的艰难. 只有用“衣带渐宽终不悔”的精神，才能获取“众里寻她千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处”的“意外”发现，品尝到治学的乐趣. 愿以此与广大读者共勉.

10 考虑特殊对象

对于从特殊对象看问题的方法，已在前一节中做了一些介绍，不过前面的介绍集中在考察数值达到极端情况的对象之上. 我们打算在本节中，对这种方法作更为广泛意义下的介绍. 因为既然可以从数值达到极端值的对象入手考察问题，那么当然也可以从具有其他特殊性质的对象入手考察问题，这是一个非常明白的道理. 事实上，更为广泛地物色恰当的对象，作为考察问题时的突破口，正是解开数学中疑团的有力保证. 下面即来通过一些例题，具体解释这种方法.

【例 1】 试问，是否存在具有下述性质的空间点集 M? 其中：(1) M 由有限个不全在同一个平面上的点组成；(2) 对任何两点 $A,B\in M$，都存在另外两点 $C,D\in M$，使得直线 AB 平行于直线 CD，但不重合.

乍一看到这道试题，有些令人感觉茫无头绪. 因此，如果漫无边际地寻找这种点集，当然有些困难. 可以先来看看，是否有某种熟悉的几何图形，能为我们提供借鉴?

粗略地想来，正方体的 8 个顶点大致可以满足要求. 但是要想为它的两条主对角线寻找平行而不重合的直线，还应再添上一些点. 一种最方便的做法是将正方体剖分成 8 个全等的小正方体，就像用一把刀切 3 次，将一块豆腐一剖为 8 块

一样. 然后将原正方体和这 8 个小正方体的所有顶点合并起来, 构成 M, 即可满足要求. 事实上, 也就是令

$M=\{$正方体的 8 个顶点、6 个面的中心、12 条棱的中点、以及正方体的重心$\}$

读者不难验证 M 满足上述的两条性质.

【例 2】 设锐角三角形的面积等于 1. 证明, 在其内部存在一个点, 它到三角形 3 个顶点的距离都不小于 $\sqrt{16/27}$.

我们还是先来从三角形内的一些特殊的点考虑起. 一种合理的而又多少带有些侥幸心理的想法是, 先从三角形的外心看起, 而且最好是它即能合于要求. 因为外心到各顶点距离相等(等于外接圆半径 R), 因此处理起来比较方便. 又因为所考虑的是锐角三角形, 外心一定在形内. 我们下面就来按这样的方式考虑.

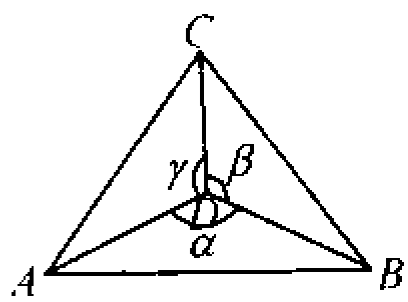


图 10.1

记所言的三角形为 $\triangle ABC$, D 是它的外心. 又设它的外接圆半径是 R, 并对有关角引入适当的记号如图 10.1. 于是就有

$$\frac{1}{2}R^2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=1$$

而由于 $0<\alpha,\beta,\gamma<\pi$, $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$, 故由三角函数性质知有

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leqslant 3\sqrt{3/2}$$

所以就有 $R=\sqrt{2/(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)}\geqslant\sqrt{16/27}$, 这表明恰如我们所期望的, 外心 D 即为所求之内点, 解毕.

上述两个存在性问题的解答过程, 再次体现了由特殊对

象着眼看问题的好处.通过这种方式,减少了盲目性,因此能够较快地抓住线索,少走弯路.一般来说,如果越能在头脑中多装入一些对特殊事物的具体了解,那么在数学学习中就越能处在主动的地位.看起问题来就愈加敏锐.处理起来也就愈能得心应手.

【例 3】 证明,存在无穷多个具有下述性质的正整数:(1)它们的各位数字都不为零;(2)它们都可以被它们的各位数字之和整除.

我们知道,这样的正整数是很多的,随便列举一下,便可举出许多,例如:12,72,322,522,1212,6336,…. 但是这样列举下去,使人感觉杂乱无章,而且也无从证明它们有无穷多个. 不如将目标集中,专门来考察如下形式的正整数:

$$111,111111111,\underbrace{11\cdots1}_{27\text{个}1},\cdots,\underbrace{11\cdots1}_{3^n\text{个}1},\cdots$$

它们显然有无穷多个,而且满足上述性质(1).因此只要再能证明它们能被自身数字之和整除,就可断言它们即为所求.

这列正整数的通项公式是 $a_n=\underbrace{11\cdots1}_{3^n\text{个}1}$,所以可以对 n 使用归纳法来证明整除性.

显然 $a_1=111$ 可被 3 整除. 假设 a_k 可被 3^k 整除,而由于有

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=\underbrace{11\cdots1}_{3^{k+1}\text{个}1}=\underbrace{11\cdots1}_{3^k\text{个}1}\times10\cdots\underbrace{010\cdots01}_{(3^k-1)\text{个}0}\\&=a_k\times10\cdots010\cdots01\end{aligned}$$

其中 a_k 可被 3^k 整除，$10\cdots010\cdots01$ 可被 3 整除，知 a_{k+1} 可被 3^{k+1} 整除. 于是由归纳法原理得证它们对自身数字之和的整除性.

【例 4】 证明，对任何指定的正整数 n，都可以找出 n 个连续的正整数，使其中仅有 1 个质数.

我们来将目光投向 $n!$（n 的阶乘），试图从它身上打开缺口. 这是因为对任何正整数 k，只要 k 在区间 $[2,n]$ 之中，$(n!+k)$ 便都以 k 为正约数，从而知这是一些连续的合数，其数目不少于 $n-1$ 个. 于是只要再设 P 是大于 $(n!+1)$ 的最小质数，便知 $P>(n!+n)$. 因此只要取 $P, P-1, P-2, \cdots, P-(n-1)$ 作为所要的 n 个连续正整数，便可合乎要求.

【例 5】 证明，可以把全体自然数之集 N 划分为两个不相交的非空子集，使得在其中一个子集中，任何 3 个元素都不构成等差数列；另一个子集中不包含任何一个完整的无穷项等差数列.

我们再次把目光投向 $n!$，记

$$N_1 = \{n + n! \mid n \in N\},\ N_2 = N - N_1$$

于是 N_1 和 N_2 是 N 的两个非空子集，构成对 N 的一个划分. 我们来证明它们即满足要求.

首先证明 N_1 中任何 3 个元素都不构成等差数列. 我们记 $a_n = n + n!$，显然

$$a_{n+1} - a_n = (n+1)! - n! + 1 = n n! + 1 \geqslant a_n$$

所以对任何 $m>n>k\geqslant 1$，都有

$$a_m - a_n \geqslant a_{n+1} - a_n \geqslant a_n > a_n - a_k$$

从而 $N_1=\{a_n|n\in N\}$中任何 3 项都不构成等差数列.

于是只要再证 N_2 中不包含任何一个完整的无穷项的等差数列. 大家知道,任何一个等差数列都是由它的首项 a 和公差 d 所唯一确定,并且对任何非负整数 m,所有形如 $a+md$ 的数都是该数列中的项. 如果 N_2 中包含有等差数列,那么它的首项 a 一定是非负整数,公差 d 则一定是正整数.

如果某个等差数列的首项 $a=0$,那么 $d+d!$ 一定是该数列中的项,然而 $d+d!$ 却在 N_1 中,所以 N_2 中不包含任何一个首项 $a=0$ 的完整的无穷项的等差数列.

如果某个等差数列的首项 a 为正整数,那么$(a+d)+(a+d)!=a+\{d+(a+d)!\}$具有 $a+md$ 的形式,所以它一定是该数列中的项,然而这样的数也在 N_1 中,所以 N_2 中也不包含任何一个首项 a 为正整数的完整的无穷项的等差数列.

综合上述,即知 N_1 和 N_2 是 N 的满足要求的划分.

在该解答中,我们两次把目光投向特殊对象. 一次是投向 $n!$,这不仅是因为 $a_n=n+n!$ 的相邻项之差严格上升,因而使得 N_1 满足要求,而且是因为 $n!$ 中包含了由 1 到 n 的所有正约数,为下一步打下了基础. 另一次则是投向形如$(a+d)+(a+d)!$ 的数,因为它们含在 N_1 中,却又是首项为 a,公差为 d 的等差数列中的项.

【例 6】 证明,可以把全体自然数之集合 N 划分为 100 个不相交的非空子集,使得对任何 3 个满足关系式 $a+99b=c$ 的自然数 a,b,c,都可以从中找出两个数属于同一子集.

这又是一个对全体自然数之集合 N 作划分的问题.

首先，由关系式 $a+99b=c$ 立知 a 和 c 被 99 除的余数相等，所以自然想到可按自然数被 99 除的余数把它们分开. 但是，这样一来，只能分成 99 个不同的非空子集.

于是，我们想到自然数的奇偶性问题. 通过观察，我们发现，如果自然数 a、b、c 满足关系式 $a+99b=c$，那么只能有两种不同情形：或者 a、b、c 都是偶数，或者为二奇一偶.

这就启发我们：可以把所有正奇数作为一个子集，再把所有正偶数按被 99 除的余数分为 99 个子集. 于是，当 a，b，c 为二奇一偶时，其中的两个奇数同属一个子集；而当它们都是偶数时，它们中的 a 和 c 被 99 除的余数相等，故必同属一个子集. 于是所作划分满足要求.

在这里，关键的一步是注意到了整数的奇偶性. 可以说，在解答有关整数的问题时，奇偶性是一个时时处处值得关注的特殊对象.

以上几个例题都是数论问题，它们都是通过考察特殊对象寻得解答的. 数论是研究整数性质的数学分支，考察特殊对象的方法在这个分支中应用得尤为广泛.

下面我们再来看一些覆盖问题. 运用覆盖解决数学问题，是数学研究中的一种重要手段，在许多现代数学分支中有着广泛的应用. 一些平面几何图形的覆盖问题，也是非常有趣的，而且可用初等办法解决. 单墫先生专门写过一本小册子《覆盖》(上海教育出版社，1983 年版)，介绍了许多有趣的覆盖问题. 我们在这里，则来介绍一些如何从特殊对象入手来考虑的覆盖问题的例子.

【例 7】 证明,用两张边长小于 1 的正三角形纸片,不能完全盖住一个边长是 1 的正三角形;用两张半径小于 1 的圆形纸片,也不能完全盖住一个半径是 1 的圆.

乍一看来,会觉得这是两桩显然的事实.但要从数学上讲清道理,却还需要下番功夫.关键是要抓准了图形中的特殊部位.下面就是关于这两个问题的解答:

显然,用一张边长小于 1 的正三角形纸片,至多能盖住边长是 1 的正三角形的 1 个顶点,因此两张纸片仅能盖住两个顶点,所以必然还有 1 个顶点没有盖住.

同样,用一张半径小于 1 的圆形纸片,不能完全盖住半径是 1 的圆的任何一条直径,因此充其量只能盖住圆周上的一段劣弧,因此两张纸片仅能盖住两段劣弧,可见圆周上一定还有点没给盖住.

通过这些例题,读者们可以看到,着眼特殊对象的方法在解决覆盖问题中也起着重要作用.为了进一步说明这种作用,我们再来看一个例子.

【例 8】 证明,用 3 个半径是 $r=\frac{\sqrt{65}}{16}$ 的圆形纸片,可以完全盖住 1 个边长是 1 的正方形,但当 $r<\frac{\sqrt{65}}{16}$ 时,则不行.

我们先来证明前半部分. 3 张纸片中,显然要有 1 张盖住正方形的两个顶点.不妨设$\odot O_1$ 盖住 A,B 两个顶点.为了充分利用这张纸片,显然应将圆心 O_1 置于正方形内部(图 10.2),并使 A,B 两点位于圆周上.这样便有 $O_1A=O_1B$

$=\frac{\sqrt{65}}{16}$. 若记 AB 中点为 M，DC 中点为 N，则知 O_1 在 MN 上，且 $O_1M=\sqrt{O_1A^2-AM^2}=\frac{1}{16}$. 再在 AD 上取 A_1，在 BC 上取 B_1，使 $AA_1=BB_1=\frac{1}{8}$. 则易知$\odot O_1$ 盖住了矩形 ABB_1A_1.

又因 $NA_1=NB_1=\sqrt{A_1D^2+DN^2}=\sqrt{\left(\frac{7}{8}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{65}}{8}$，知只要再将$\odot O_2$ 和$\odot O_3$ 的圆心分别置于 NA_1 的中点和 NB_1 的中点，就可用这两张圆形纸片分别盖住矩形 A_1END 和矩形 B_1CNE（图 10. 2）. 综合上述，知正方形 $ABCD$ 已被 3 张圆形纸片完全盖住.

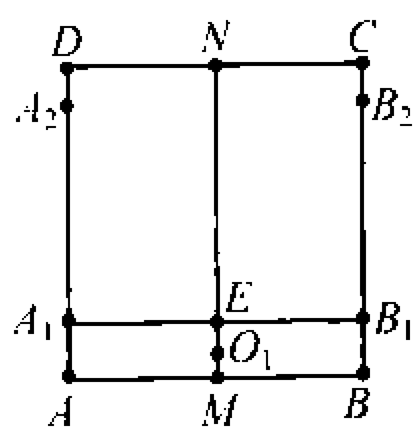


图 10. 2

下面再证明后半部分，设 $r<\frac{\sqrt{65}}{16}$. 仍用$\odot O_1$ 盖住 A，B 两点，则因 $O_1A=O_1B<\frac{\sqrt{65}}{16}$，知 $O_1M<\frac{1}{16}$，从而 A_1，B_1 两点未被$\odot O_1$ 盖住. 再分两种情况考虑其余 2 圆放法.

（1）若用$\odot O_2$ 盖住 C，D 两点，我们再在 AD 上取 A_2，在 BC 上取 B_2，使 $DA_2=CB_2=\frac{1}{8}$，于是根据与上相同的理由，知 A_2，B_2 均未被$\odot O_2$ 盖住. 这样，A_1，A_2，B_1，B_2 都必须由$\odot O_3$ 来覆盖. 但是

$$A_1B_2=\sqrt{1^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}=\frac{\sqrt{100}}{8}>\frac{\sqrt{65}}{8}>2r$$

知$\odot O_3$不能同时盖住它们.

(2) 若$\odot O_2$和$\odot O_3$各盖1个顶点,则须有一者同时盖住N和A_1或是同时盖住N和B_1. 然而如上所算,有$NA_1=NB_1=\frac{\sqrt{65}}{8}>2r$,知亦不可能.

综合上述,即知当$r<\frac{\sqrt{65}}{16}$时,3张半径为r的圆形纸片不可能完全盖住1个边长为1的正方形.

在例7及例8的解答中,都是通过抓住图中的一些具有代表性的点来寻求问题的解答的. 下面再来看两个其他类型的问题,这些问题在一定程度上表明了这种解题方法在应用领域上的广泛性.

【例9】 设a,b,c,d,e,f,g是一些非负实数,满足等式

$$a+b+c+d+e+f+g=1$$

试求$\max\{a+b+c,\ b+c+d,\ c+d+e,\ d+e+f,\ e+f+g\}$的最小的可能值.

本题是要估计最大的数的可能的最小值. 但是可用的条件却只有前述的一个等式. 为了方便起见,我们来将花括号中的最大数记作M. 易知,为了利用前述等式的条件,必须将花括号中的一些数求和,而且应将M与和挂起钩来. 但是若将花括号中5个数一起求和,则仍旧难以利用前述等式. 为此,我们将目标缩小,集中考虑其中的部分成员. 经过尝试,发现下述的估计较为有效:

$$M\geqslant\frac{1}{3}[(a+b+c)+(c+d+e)+(e+f+g)]$$

$$=\frac{1}{3}[(a+b+c+d+e+f+g)+(c+e)]$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{c+e}{3}\geqslant\frac{1}{3}$$

可见 M 不会小于 1/3. 另一方面,如果取 $a=d=g=1/3$, $b=c=e=f=0$,则确有 $M=1/3$. 可见 M 的最小可能值就是 1/3.

上述解答过程确实很富有特色,也很具有启发性,它非常鲜明地体现了从特殊对象看问题的方法的重要作用和重要意义.更为有趣的是,它揭示了这样一桩事实,即在有些场合下,只有从部分特殊对象入手,方能看清问题;而如果样样兼顾,则反而看不清楚.

【例 10】 一种农村公共汽车,满载为 25 人,全程共设 14 个车站.由不同车站上车至不同车站下车的乘客,均需购买不同的车票.试问:在一次单向行驶中,最多可能卖出多少种不同的车票?

乍一看到这个问题,会使人感觉难以摸清头绪,不知该从何处入手考虑问题.我们还是先来设想一下途中的车内情形.当汽车由第 j 站驶往第 $j+1$ 站时,车内的乘客都是自前 j 站上车而去到后 $14-j$ 站的.如果这些乘客中,自前 j 站的每一站上车的都有,而自每一站上车的乘客中,又是去到后 $14-j$ 站的每一站的都有,则车上至少有 $j(14-j)$ 名乘客,这个数字在 $j=7$ 时达到最大.所以我们先来集中考虑汽车由第 7 站驶往第 8 站途中的情形.

此时,如果上述各种情形的乘客都有,则车上至少应当有 $7\times(14-7)=49$ 名乘客.但是由于受到载客量的限制,车

上至多可有 25 名乘客. 因此，至少有 $49-25=24$ 种情形的乘客没有上车，因此相应的车票也就不能卖出.

但是在 14 个车站之间，一共应当有 $C_{14}^{2}=\frac{14\times 13}{2}=91$ 种不同的单程车票. 由此看来，在一次单程行驶中，可卖出的车票种类不会超过 $91-24=67$ 种.

但是能否卖出 67 种车票？还需再作仔细分析. 我们仅在这里指出，确实存在着可以卖出 67 种车票的情况. 有兴趣的读者可以试着举出一个这样的例子. 详细的讨论则可参阅笔者的《同中学生谈排列组合》一书.

11 考察上下界限

最后，我们来介绍从特殊对象看问题的又一种具体形式，即考察某种数值的上下界限.这种方法与着眼极端情况不同，不是考察在数值上达到极端值的对象，而是考察这种极端值本身.它或者是估计出这种极端值的大小，或者是找出这些极端值的变化趋势，并以这些信息作为钥匙，去寻找问题的答案.下面就来看一些具体的例子.

【例1】 箱子里放着许多一样大小的袜子，有4种不同颜色.袜子不分左右脚，任意两只同色的就可配作1双.袜子放得很乱，也不许打开箱盖来挑.为了保证能得到20双袜子，至少应当摸出多少只袜子?

显然，光摸40只是不够的，因为可能会有一些颜色的袜子单出1只，不能成双.但是每种颜色至多会单出1只，由此可见只要多摸出4只就足可以了.这就是说，答案不会超过44只.

但是，我们非常感兴趣于这样的问题，就是能不能比44更少?当然前提仍然是要保证其中至少有20双可穿的袜子.为此，我们应对"至多会单出几只袜子"作更加精细的估计.

首先我们注意到，44只这个估计值是在"每种颜色都可

能单出 1 只袜子”的前提下得到的，因此它是 4 个奇数的和，从而是偶数. 反过来，正因为它是偶数，所以又为“每种颜色都单出 1 只”创造了条件. 那么，我们为什么就不能一共取出奇数只，而造成“有些颜色的袜子不会单出 1 只”的局面呢？由此看来，我们可以在取袜只数的奇偶性方面做些文章.

设想一下，如果一共取出了奇数只袜子，那么会是一种什么局面呢？显然不可能每种颜色都单出 1 只（否则总数成为偶数），但是却可能有某 3 种颜色的袜子各单出 1 只，例如，4 种颜色的袜子各取了 20，1，1，21 只的情况就是如此. 这就说明了，取袜总数以 43 只为宜，而且这个数字不能再减小了.

由上述讨论，我们还可得出一些一般性的结论：如果要取 n 双袜子，则至多只要摸出 $2n+3$ 只袜子. 读者还可考虑一下：如果袜子的颜色不是 4 种，而是 m 种，结论又该如何？

上述例 1 便是一个由考虑“损失的最大值”来解答的问题. 尽管例 1 不过只是个趣味数学题，但是这种解答问题的思想方法却有着重大的实际意义，许多与国计民生有关的数学问题，都是按照这种原则来处理的.

【例 2】 10 个人在一个自来水笼头前等候取水，10 个人的水桶大小不一. 试问，排成怎样的顺序取水，可使大家等候的时间总和达到最小？

这个问题的提法本身，就带有浓厚的经济数学色彩. 其答案是明显的，即桶越小的人越排在前面. 可以用“调整法”来证明这个结论，即若有某个桶小的人排在桶大的人之后，

则调换他们的顺序可使时间总和减小，这里不再赘述.

【例 3】 有 n 个人参加一个晚会. 证明，其中有某两个人，使得那些都认识他们两人、或者都不认识他们两人的其他与会者不少于 $\left[\frac{n}{2}\right]-1$ 个. 这里 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示 $\frac{n}{2}$ 的整数部分.

显然，对于每个与会者来说，在由其余与会者所形成的 $C_{n-1}^2=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 个双人组中，一般会有 3 类情况：

(1)组中的两人他都认识；

(2)组中的两人他都不认识；

(3)组中的两人，他认识 1 人，不认识另 1 人.

如果某个人一共认识与会者中 k 个人 $(0\leqslant k\leqslant n-1)$，那么对他来说，属于上述第 3 类的双人组就有 $k(n-1-k)$ 个. 但是由于 $k(n-1-k)\leqslant\left(\frac{k+(n-1-k)}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(n-1)^2$，所以对于每个与会者来说，属于上述第 3 类的双人组都不超过 $\frac{1}{4}(n-1)^2$ 个. 于是连同重复计算在内，这样的双人组数目不超过 $\frac{1}{4}n(n-1)^2$. 从而平均起来看，每个双人组仅有不多于 $\frac{1}{4}\frac{n(n-1)^2}{C_n^2}=\frac{1}{2}(n-1)$ 个与会者以其作为上述第 3 类的双人组. 从而至少会有一个双人组，以其作为第 1 类和第 2 类双人组的与会者人数不少于

$$n-2-\frac{1}{2}(n-1)\geqslant\left[\frac{n}{2}\right]-1$$

在上述证明中，我们多次用到了“至多”、“至少”之类的词语. 这种用法，我们在前面诸节中也曾经见过，这都是些通过考察上下界限，来达到对事物的某种数量作出估计的办法. 其中尤以连同重复计算在内，先估出总数的上界，再通过取平均及其他手法估出下界的办法最为常见. 这是一种处理复杂数量关系的有效手法，用途很广. 读者可以回顾本书第 7 节的有关例题，然后同这里的例题作一番比较.

【例 4】 在由 $m\times n$ 个小方格组成的方格表(图 11.1)的每一格中随意填入一个整数(可正、可负、也可为 0)，然后求出每一行数字的和 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，以及每一列数字的和 $b_1,b_2,\cdots,b_n$(横为行，竖为列). 如果某些行(或列)的和为负数，则改变该行(或该列)中所有数的符号. 证明，只要经过这样的有限次改变，就可使得所有行和与列和皆成非负.

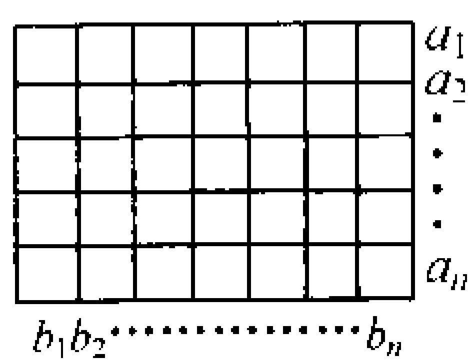


图 11.1

本题初看起来，似会觉得难以理解，总感到其中有些拆东墙补西墙的意味. 因为改变整行数的符号，固然可使该行数之和由负变正，但是却也可能会使某些列和由正变负. 然后改变整列数的符号，可能又会导致某些行和由正变负. 这样恶性循环，何时能了？但是，这种忧虑确实只是杞人之忧. 其中原因极易明了. 记表中所有数之和为 S，我们只要来考察一下 S 的变化趋势，就可明了.

因为，如果再记 $A=a_1+a_2+\cdots+a_m$，$B=b_1+b_2+\cdots+$

b_n，则有 $S=A=B$. 而每当按照规则，改变某一行（列）中所有数的符号，使该行（列）数之和由负变正，都会引起 $A(B)$ 增大，从而也就使得 S 上升，上升的幅度不会小于 $1-(-1)=2$. 但是，每次改变，都只是改变表中之数的符号，而不改变其绝对值. 显然，S 不会超过表中之数的绝对值之和. 可见其上升趋势必在有限次之后终止. 终止之时，必是所有行和与列和均非负，因为不然的话，只要再改变该行或该列数的符号，S 就又会继续上升，导致矛盾. 故知断言成立，证毕.

读者可以考虑一下，如果原来的数表中所填之数均为实数（不一定为整数），本题的结论是否仍能成立？若能成立，该怎样说明理由？

通过上述证明过程，我们可以总结出一类问题的证明方法. 这就是先构造出某一个可以反映全局信息的量，例如上述的 S，观察每次改变对这个量所造成的影响，例如上述的可使 S 上升，再考察这个量的上下界限，例如上述的 S 不会超过表中所有数字的绝对值之和，并凭此得出变化趋势必在有限步时终止的结论，而完成对命题的证明.

【例 5】 将正五边形的每个顶点对应一个整数，使得这 5 个整数的和为正. 若其中某 3 个相连顶点对应的整数依次为 x, y, z，而中间的 $y<0$，则进行一次如下的操作：将 x, y, z 分别换成 $x+y$，$-y$，$z+y$. 只要所得的 5 个整数中还有负数，就继续作这样的操作. 试问：这种操作是否在进行了有限次后必然终止？

我们来采用如上所述的办法考察这个问题，不过由于问

题的自身特点,所考察的量在形式上要复杂一些.依次将这5个整数记作 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,并设 $a_3<0$.我们来对 a_2,a_3,a_4 进行一次操作,操作后得出的5个整数记作 a_1',a_2',a_3',a_4',a_5',于是就有 $a_1'=a_1$, $a_2'=a_2+a_3$, $a_3'=-a_3$, $a_4'=a_4+a_3$, $a_5'=a_5$.从而知 $A=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=a_1'+a_2'+a_3'+a_4'+a_5'>0$ 保持不变.

为了构造出一个与上述 S 起类似作用的量,我们注意到:

$$|a_1'+a_2'|+|a_3'+a_4'+a_5'|=|a_4+a_5|+|a_1+a_2+a_3|$$

$$|a_2'+a_3'|+|a_4'+a_5'+a_1'|=|a_2|+|A-a_2|$$

$$|a_3'+a_4'|+|a_1'+a_2'+a_5'|=|a_4|+|A-a_4|$$

$$|a_4'+a_5'|+|a_1'+a_2'+a_3'|=|a_1+a_2|+|a_3+a_4+a_5|$$

$$|a_1'+a_5'|+|a_2'+a_3'+a_4'|=|a_1+a_5|+|a_2+a_3+a_4|$$

$$|a_1'|+|A-a_1'|=|a_1|+|A-a_1|$$

$$|a_2'|+|A-a_2'|=|a_2+a_3|+|a_4+a_5+a_1|$$

$$|a_4'|+|A-a_4'|=|a_3+a_4|+|a_5+a_1+a_2|$$

$$|a_5'|+|A-a_5'|=|a_5|+|A-a_5|$$

$$|a_3'|=|a_3|$$

$$|A-a_3'|=||A|-|a_3'||<||A|+|a_3'||=|A-a_3|$$

可见只要将上述11个关系式的左右两端分别相加,则所得的两个和式的形式完全相同,因此可将它们分别记成 $f(a_1',a_2',a_3',a_4',a_5')$ 和 $f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$ 的形式,而且还有

$$f(a_1',a_2',a_3',a_4',a_5')<f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$$

事实上,

$$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)-f(a_1',a_2',a_3',a_4',a_5')$$
$$=|A-a_3|-|A-a_3'|=2|a_3|\geqslant 2$$

于是不难看出,每一次操作都会引起 $f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$的下降,下降的幅度都不少于 2. 但是,$f(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5)$是一些整数的绝对值之和,不会小于 0. 可见上述下降趋势必在有限步后终止. 显然,终止之时,对应的 5 个整数皆成非负.

通过上述证明,我们可以看出,充当前例 S 作用的量不是可以随意选择的,必须具备几个条件. 这些条件中最主要的是:(1)能反映全局情况;(2)具有一定变化趋势;(3)有上(下)界. 所以如何合理选择这个量,是整个解答过程中的关键.

【例 6】 一群小孩围坐一圈分糖果,老师让他们每人先任取偶数块,然后按下列规则调整:所有的小孩同时把自己的糖分一半给右边的小孩,糖的块数变成奇数的人,向老师补要一块. 证明,经过有限次调整之后,大家的糖就变得一样多了.

这是一道与上述两例有些相似的题目. 但它是通过直接观察糖数的最大值与糖数的最小值之间的变化关系得出解答的. 设在某次调整前,糖数最多的小孩有 $2M$ 块,最少的小孩有 $2m$ 块,而 $M>m$. 我们来观察在做了一次调整之后,小孩手中糖块的变化情况,容易看出:

(1)每人的糖块仍在 $2m$ 和 $2M$ 之间.

事实上,如果某孩子原有 $2k$ 块糖,他左边的小孩有 $2h$ 块,调整后这孩子的块数就成为 $k+h$ 块(如果 $k+h$ 为偶数)

或成为 $k+h+1$ 块(如果 $k+h$ 为奇数). 而因 $m\leqslant k\leqslant M$, $m\leqslant h\leqslant M$,知有 $2m\leqslant k+h\leqslant 2M$ 或 $2m<k+h+1\leqslant 2M$.

(2) 原来手中糖果块数超过 $2m$ 块的,调整后仍超过 $2m$ 块.

因为,若 $k>m$, $h\geqslant m$,则 $k+h>2m$.

(3) 至少有一个手中糖果块数为 $2m$ 的小孩,调整后多于 $2m$ 块.

因为至少有一个拿 $2m$ 块糖果的小孩,他左边的小孩拿着 $2k>2m$ 块(否则大家手中的糖块就已经一样多了),调整后这个小孩至少拿着 $k+m$ 块,而 $k+m>2m$.

综合上述即知,一次调整后就至少减少一个拿 $2m$ 块的小孩. 因此有限次后,每个小孩手中的糖块数目就都大于 $2m$ 块,但拿糖果块数最多的小孩手中不会多于 $2M$ 块. 这样,最多的块数与最少的块数的差就要至少减少 2. 但这个差数是一个有限数,所以经过有限次调整后,这个差数就会变为 0,也就是大家的糖数变为一样了.

不难想见,在这个问题的证明中,与前述 S 起类似作用的量就是最多块数与最少块数的差,即 $S=2M-2m$. 它呈单调下降的变化趋势(若干次调整后便至少减小 2),所以终究会变为 0.

12 关注整体性质

前面我们着重谈了关注事物的各种特殊性质，现在要来谈谈值得关注的另一个方面.

考察事物特定方面的具体性质，同考察事物整体上的某种性质，本来是两桩不同的事情，但是这两桩事情之间却有着密切的联系，它们构成了我们考察事物时的不可偏废的、相辅相成的两个方面，如果我们能自觉地养成从两个方面考察事物的习惯，那么就会更加有利于我们看清问题，因而获益匪浅. 在解答数学问题上也是这样.

勿庸置疑，紧扣题目条件或是所需要回答的问题中所涉及的特定对象、特定方面，来考察其中的数量关系及变化规律、寻求问题的答案，是我们解答数学问题的常用办法. 但是我们也应该看到，在有些时候，对某些数学问题，如果只注意考虑这一个方面，那么也还是不能把问题看清楚的. 在这种时候，我们就应当学会换一个角度来考察问题，包括从具体的对象中“跳”出来，站高一点、站远一点，以便于观察事物的全貌，并从整体上来把握事物的性质. 乍一想来，似乎会觉得这样做的结果，会使自己远离了问题的主要线索，但实际上却由于我们从整体上看清了全貌，反而使我们离问题的答案更近了.

要养成这样一种习惯是不容易的，尤其是在已经对一个问题做了许多试探而未得到答案之时，人们往往不愿丢开原来的思路而去另辟蹊径，更难以一下子“跳”开去，去考察它的整体方面，但是这种习惯却是应当培养起来的，因为它可以使我们少走许多弯路，而有利于看清问题. 数学竞赛试题，大致来说有两种类型：一类是对古典问题的改造、拔高、抽象，使之具有某种一般性；另一类则是对现代数学问题的简化、稀释，使之成为某种一般性命题的特殊情况. 因此，它们或者具有一般性的形式，却有着特殊形式的原型；或者具有特殊化的形式，却有着一般形式的背景. 这就告诉我们，对它们的考察，既不应当离开具体的事物、特定的对象，又不应当忘记它们的整体方面、普遍的规律，也就是说应当学会从两个方面来考察它们.

我们来看一些例题.

【例 1】 有一张 $2n\times 2n$ 的方格表(即每行每列都含有 $2n$ 个方格的正方形表格)，在它的每 1 个方格中都点上 1 个红点或 1 个蓝点，使得在每 1 行以及每 1 列中都恰有 n 个红点和 n 个蓝点. 用蓝色线段将每两个处于相邻方格(即具有公共边的方格)中的红点连接起来，用红色线段将每两个处于相邻方格中的蓝点连接起来. 证明，最终所得到的红、蓝两色线段的数目相等.

乍一拿到这道题目，会觉得应当采用数学归纳法. $n=1$ 的情形固然很简单，但由 $n=k$ 向 $n=k+1$ 的归纳过渡却不得不面对各种各样的可能性，而需作多种情形的讨论，但是

如果我们“跳”出来，从整体方面作一番考察，那么效果可就两样了：

首先，我们将每两个处于相邻方格中的点都用线段连接起来（不分红点和蓝点）．于是我们立即就可以看到：由红点所连出的线段总数目同由蓝点所连出的线段总数目相等（这一结论可由红点与蓝点在分布上的特点来保障，证明见后）．从而当我们擦去那些连接着 1 个红点和 1 个蓝点的线段后，剩下来的连接着两个红点和连接着两个蓝点的两类线段的数目仍然相等，而这正是所要证明的．

现在我们来证明，“由红点连出的线段总数目与由蓝点连出的线段总数目相等”．

易知，方格表中的点，按其连出的线段数目可以分为三类．我们将连出的线段数目称为该点的“度数”．于是立知，位于四个角上方格中的点都是 2 度的，位于边缘但非角上的方格中的点都是 3 度的，而位于表格内部的方格中的点都是 4 度的．

我们设红点中的 2 度，3 度和 4 度的点分别有 a_1，b_1 和 c_1 个；而蓝点中的 2 度，3 度和 4 度的点分别有 a_2，b_2 和 c_2 个，于是为证结论，只需证明

$$2a_1+3b_1+4c_1=2a_2+3b_2+4c_2$$

由于四条边缘上的行和列中的红蓝点数目相等，所以有

$$2a_1+b_1=2a_2+b_2 \tag{1}$$

这是因为每个角上方格中的点都既在横行中，又在竖列中，所以都被计算了两次．又由于除了已计算过的首尾两行和首

尾两列之外，其余各行各列中的红蓝点数目也相等．所以又有

$$b_1 + 2c_1 = b_2 + 2c_2 \tag{2}$$

这是因为每个内部方格中的点在“行中”和在“列中”都被计算进去，所以都被计算了两次．利用(1)(2)两式，立即得到

$$\begin{aligned}2a_1 + 3b_1 + 4c_1 &= (2a_1 + b_1) + 2(b_1 + 2c_1) \\ &= (2a_2 + b_2) + 2(b_2 + 2c_2) \\ &= 2a_2 + 3b_2 + 4c_2\end{aligned}$$

这就是所要证明的．

以上所采用的对于例1的考察方法，就是一种从整体性来看问题的方法，它使我们摆脱了对红点蓝点分布情况的分门别类的考察，一下子就跳到了一种显然成立的等量关系上，并以此作为基础，极为直观地过渡到我们所需要证明的等量关系上，这样来考察问题的好处，自然是不言而喻的．下面再来看一个与方格纸有关的例题．

【例2】 有一张 $n\times n$ 的方格表($n\geqslant 3$)．先允许在表中任意选择 $n-1$ 个方格涂成黑色，接下来再把那些凡是至少与两个黑格相邻的方格也都涂黑．证明，不论怎样选择最初的 $n-1$ 个方格，都不能按这样的法则将表中所有的方格全都涂黑．

乍一拿到这道题，容易使人想到用抽屉原则．因为表中共有 n 行 n 列，而开始涂黑的方格却只有 $n-1$ 个，因此必然会有某一行和某一列中没有这些方格．然而再作进一步的分析时，就会使人感觉头绪纷繁而难以迅速奏效了．这时如果我们能够“跳”出来，从整体方面去考察问题的话，那么却会

收到很好的效果.

事实上,如果我们观察一下"黑色区域"(即由所有已经涂黑的方格所形成的区域)的扩张规律,就会发现:它在扩大"领土"面积的过程中,边界(即黑白区域的分界线)的长度却始终没有增大.这是因为我们每次都只能涂黑那些至少与两个黑格相邻的方格,因此在每涂黑一个方格之后,都至多是变化了边界线的位置而不能增加它的长度,正是这一发现可以为我们指出问题的答案之所在:

因为一开始,我们仅能涂黑 $n-1$ 个方格.假若每个方格的边长为 1,那么即使这 $n-1$ 个方格都互不相邻,"黑色区域"的边界长度 L 也不过为 $4(n-1)$;而如果其中有些黑格相邻,则 L 还要小些;总之都有 $L\leqslant 4(n-1)$.在每一步的涂黑之后,边界长度都不增加,因此都有 $L\leqslant 4(n-1)$.但若能够涂黑所有的方格,那么"黑色区域"的边界即为整张方格纸的周长,即应达到 $4n$,可见这是不可能的.由此即得所证之结论.

这种"跳"出来,不去考察最先的 $n-1$ 个方格的分布情况,却去考察与问题的答案似乎并无太大关系的边界长度的变化规律,正是一种从整体性看问题的思考方法.这种思考方式,乍一想来似乎难以接受,其实却是很自然的.原因就是它并不是凭空产生的,而是在原来的从抽屉原则出发考虑问题的思路受阻之后,为摆脱困境而另辟蹊径的一种产物.问题在于我们应当养成习惯,学会这种不断变换角度思考问题的方法,多想几个方面,不但想局部的、具体的方面,而且想全局的、整体的方面,这样我们的路子就宽了,办法就活了,

就能使我们立于不败之地.

下面再来继续看一些例子.

【例 3】 在立方体上标出所有的顶点和各面的中点,并连出所有面上的对角线.试问,能否沿着这些对角线上的线段走遍所有标出的点,并且每个点处都刚好经过一次?

如果我们实际地尝试一下,便会发现,每当我们离开 1 个顶点,必须要经过 1 个中点;而每当离开 1 个中点,就必然要经过 1 个顶点.因此在我们所经过的点中,顶点和中点是交替出现的.这就告诉我们,在行程中的每一时刻,所走过的顶点数和中点数都至多相差 1 个.但由于立方体中共有 8 个顶点和 6 个中点,它们的数目之差为 2,因此若要求每个点都恰好经过一次,显然是办不到的,所以本问题的结论是否定的.

【例 4】 在一个小正方块上用粉笔标出 100 个不同的点.证明,我们一定可以用两种不同的方法把方块放到黑色的桌子上(并且准确地放在同一位置上),使得它们在桌子上留下的粉笔印痕不完全重合.(如果粉笔点在方块的棱上或顶点上,也将产生印痕.)

应当注意,这里所说的不同放法,包括将方块的不同的面放在桌面上,也包括将方块的同一个面按不同的角度放在桌面上,但都必须准确地放在同一位置上,因此共有 24 种不同放法.

如果上述 24 种放法所产生的粉笔印痕都完全一样,那么 100 个粉笔点在正方块的表面上势必要呈如下的分布:

(1) 如果有 1 个顶点被点为粉笔点，那么 8 个顶点都应当被点为粉笔点，所以 100 个粉笔点中，或者含有 0 个顶点或者含有 8 个顶点.

(2)如果有 1 个棱上的点被点为粉笔点，那么 12 条棱上的相应点都应被点为粉笔点. 如果有 1 个面上的点被点为粉笔点，那么至少在 6 个面上的相应之点也应被点为粉笔点. 所以 100 个粉笔点中，所含有的棱上及面上的点的数目都应当是 6 的倍数. 但是由刚才的分析可知，100 个粉笔点中含有 100 个或 92 个棱上或面上的点，它们都不是 6 的倍数，可见 24 种放法所产生的印痕不可能都完全一样. 所以我们可以用两种不同的方法把方块放在黑色的桌面上，使得它们在桌面上留下的粉笔印痕不完全重合.

上述两例的思路大体相同，它们都是一方面具体地探求点的分布规律，一方面则注意点的整体性质，并从中引出矛盾来. 这种思考方法是大家所熟悉的，它们经常被用来证明一些否定性的命题，或是出现在运用反证法题的过程之中.

上面的思考方式也可以用来解决一些肯定性的问题，以下的例 5 就是一个这方面的例子.

【例 5】 数组 $a_1, a_2, \cdots, a_{1989}$ 是自然数 $1, 2, \cdots, 1989$ 的任意一种排列，将每个数 a_k 都与其脚标 k 相乘，得到乘积 ka_k. 证明，在所得的 1989 个乘积中，最大者不会小于 995^2.

这道题乍一看来似觉很难，但从整体性的角度来看却很容易. 事实上在自然数 $1, 2, \cdots, 1989$ 中，不小于 995 的数有 995 个，超过一半，因此它们不可能都排在前 994 个位置上，

这也就是说，在不小于995的995个自然数中，至少会有1个数的脚标不小于995，将其同脚标相乘，乘积当然不小于995^2.

通过考察和数来考察事物的数量规律，是一种常用的从整体性来看问题的方法，应用得非常广泛.下面就来通过一些例子，着重介绍一下这种方法.

【例6】 在正25边形的顶点上依次放上数$a_1,a_2,\cdots,a_{25}$，其中$a_1=a_2=\cdots=a_{13}=1$；$a_{14}=a_{15}=\cdots=-1$.将每两个相邻顶点上的数相加，并记$b_1=a_1+a_2$，$b_2=a_2+a_3$，$\cdots$，$b_{25}=a_{25}+a_1$，再以数$b_1,b_2,\cdots,b_{25}$取代数$a_1,a_2,\cdots,a_{25}$.然后再对这组数进行同样的操作，如此共进行100次.证明，在最终所得的25个数中，至少有1个数将大于10^{20}.

由于本题所给的条件都很具体，所以一般人拿到题目后便会自然地进行实际的操作，以图发现其中最大值的变化规律，达到解题的目的.然而只要进行不多的几步考察，便会发现这种最大值的变化规律并不是非常规则的，在经过若干次操作后，便会出现不易讲清规律的局面.因此，不如考察25个数字的总和更为妥当.

证明 记$S_0=a_1+a_2+\cdots+a_{25}=1$，在经过1次操作之后有

$$S_1=b_1+b_2+\cdots+b_{25}=2S_0=2$$

并且立即就可以看出，对任何自然数k，都有

$$S_k=2S_{k-1}=2^k$$

因此在100次操作之后，就有$S_{100}=2^{100}$.这样，在所得的25

个数字中,至少会有 1 个数 t 不小于它们的算术平均值:

$$t \geqslant \frac{S_{100}}{25} = \frac{2^{102}}{100} > \frac{(2^4)^{25}}{100} > \frac{10^{25}}{10^2} = 10^{23} > 10^{20}$$

可见我们所证得的结论比题目所要求的还要强得多.

【例 7】 设 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 是自然数 $1, 2, \cdots, 2n$ 的任意一种排列,将每个数字 a_k 都与其脚标 k 相加,得到和数 $k+a_k$. 证明,在所得的 $2n$ 个和数中,至少有两个被 $2n$ 除时的余数相同.

证明 我们仍然来考察和数. 首先,这 $2n$ 个和数的总和为:

$$\begin{aligned} S &= (1+a_1)+(2+a_2)+\cdots+(2n+a_{2n}) \\ &= 2(1+2+\cdots+2n) = 2n(2n+1) \end{aligned}$$

可见有 $2n|S$. 而另一方面,如果这 $2n$ 个和数被 $2n$ 除的余数各不相同,那么由它们所得的余数必然为 $0, 1, 2, \cdots, 2n-1$ 每样一个,从而 S 被 $2n$ 除时的余数就应当与如下的和数被 $2n$ 除时的余数相同:

$$0+1+2+\cdots+(2n-1) = n(2n-1)$$

由于 $2\nmid(2n-1)$,故知 $2n\nmid S$. 上述的矛盾即说明了,在所得的 $2n$ 个和数中,至少有两个被 $2n$ 除时的余数相同.

【例 8】 有两张圆形硬纸片,将每一张都划分为 1989 个相等的扇形. 自每一张上都随意挑出 200 个扇形涂为红色,其余涂为白色. 将这两张纸片迭合起来,使圆心及扇形的边都一一重合,且上面一张可绕圆心转动,不过每次转动的角度都应为 $\frac{2\pi}{1989}$ 的整数倍. 这样,上面一张圆形纸片就一共可

有 1989 个不同的停止位置. 证明,至少有 84 个停止位置使得两张纸片上相互重合的红色扇形数目不多于 20 个.

与上面几个例题相似,我们也可以从和数上来考察这个问题中的整体性质.

证明 假设至多只有 83 个停止位置使得两张纸片上相互重合的红色扇形数目不多于 20 个,那么在其余 1989－83＝1906个位置上,两张纸片上重合的红色扇形就都不少于 21 个. 由此算来,至少有

$$83\times 0+1906\times 21=40026>40000$$

对不同的相互重合的红色扇形. 但是另一方面,由于两张纸片上分别只有 200 个红色扇形,因此一共只能有 200×200＝40000 对相互重合的扇形. 这个矛盾就说明了至少会有 84 个位置,使得两张纸片上相互重合的红色扇形数目不多于20 个.

以上几道例题的思路大体相同,都是从考察某种数量的和数的角度来看问题的. 求和的本身,就已把事物看成了一个整体,因此可以说和数是事物的整体性质在一定程度上的反映. 正由于如此,也正如我们所已经看到的,通过求和来解答问题,是一种常用的方法. 下面再看一个例子.

【例 9】 试问,能够把任何一个凸多边形分割为有限个非凸的四边形吗?

在解答这一例题前,我们先来简单提及一下非凸的四边形的有关性质. 在非凸的四边形中,必有 1 个顶点位于其余 3 个顶点所形成的三角形的内部,这个顶点叫做它的非凸顶

点，这个三角形叫做它的凸包，非凸的四边形的位于非凸顶点处的内角大于 180°，但四边形的 4 个内角之和仍然为 360°. 下面就来解答例 9.

证明 假设有某个凸多边形 M 被划分成了 n 个非凸的四边形，于是这些四边形的内角之和为

$$S = n \cdot 360^{\circ}$$

显然，任何 1 个非凸的四边形的非凸顶点都不会位于 M 的周界上，而任何两个非凸的四边形的非凸顶点都不能共点，因此这 n 个非凸的四边形的非凸顶点就是 M 的 n 个不同的内点. 这也就意味着这 n 个内点是这些被分出的非凸的四边形们的公共顶点，从而这些被分出的非凸四边形的内角之和 S 就应当是这 n 个内点处的周角之和再加上 M 的所有内角之和，即有 $S>n \cdot 360^{\circ}$，于是导致矛盾. 可见所述的划分是不可能实现的.

同上述几个例题一样，我们在这里也是从某种假设出发，而用两种不同的办法估计出某种数量的总和，并从它们的不相等中导出矛盾，从而推翻一开始的假设，于是也就证明了题目中的结论成立. 由此看来，利用反证法证题时，往往是需要伴随着某种整体上的思考的.

当然，从整体上看问题，作为一种考察问题的思考方法，并不一定都要伴随着运用反证法的，关于这一点，我们已经从前面的一些例子中看到过. 为了加深印象，我们再来看一个例子.

【例 10】 证明，在任何凸 $2n$ 边形中，都存在一条对角线

不平行于它的任何一条边.

分析 应当注意,我们这里只对凸 $2n$ 边形陈述命题,而不去触及凸奇数边形,是由于对于凸奇数边形,这个命题并不一定成立. 事实上,在正五边形中,每一条对角线都平行于它的某一条边.

我们知道,凸 $2n$ 边形共有 $S=n(2n-3)=2n^2-3n$ 条对角线. 而另一方面,对于凸 $2n$ 边形的每一条边,都至多可以有 $n-2$ 条对角线同它平行,于是综观它的 $2n$ 条边,即知至多只会有

$$S_1 = 2n\cdot(n-2) = 2n^2-4n$$

条对角线可以平行于它的某一条边. 综合上述两方面,即知至少会有 $S-S_1=(2n^2-3n)-(2n^2-4n)=n$ 条对角线不平行于它的任何一条边.

从上述结果看出,我们所得出的结论比起题目所要求证明的结论还要强一些,这种情形我们已不是第一次碰到了. 这种情况表明从整体性看问题的思考方法有时还为我们提供了改进命题结论的机会.

最后,作为本节的结束,我们来看一道有关有限和无限的关系的例题.

【例 11】 在一张 $n\times n$ 的方格纸上码放黑、白两色的立方块,每块方块恰好占 1 格. 首先任意码放了第一层,随之想起了限制条件:每块黑方块应与偶数块白方块相邻,每块白方块应与奇数块黑方块相邻. 在码放第二层时就应使第一层的所有方块都满足这个条件. 如果此时对于第二层的方块,

这个条件也已经满足,则不需码放更多的方块,否则,则需码放第三层来使第二层的方块满足条件.如此下去,直至最后码上的一层方块也满足条件为止.试问,是否存在一种码放第一层方块的方法,使得这个过程永无休止?

分析 为了对这个问题获得一个初步的认识,我们可以先来看看 $n=1$ 时的最简单的情形.这时每层只需放 1 块方块.容易看出,如果第一层放的是 1 个黑方块,那么不用再放第二层即已满足条件;如果第一层放的是 1 个白方块,那么第二层应当放 1 个黑方块,第三层再放 1 个白方块,此时即已完全满足条件,因而无需再码放更多的方块了.由此可见,不论第一层如何码放,整个过程都只需有限步即可结束.$n=1$ 的情形是一般情形的特例,由它所反映出来性质当然也是一般情形下性质的缩影.因此我们有理由猜测,在一般情形下,码放过程也只需有限步即可结束.下面我们就来证明这一猜测.

由于对于每一个任意取定的自然数 n,每一层的码法都只有有限种(2^n 种),因此如果需要无休止地码放下去的话,那么势必可以找到 $i<j$,使得第 i 层与第 j 层的码法完全相同,第 $i+1$ 层与第 $j+1$ 层的码法完全相同,而这样一来,由码放规则就可以推知,第 $i-1$ 层与第 $j-1$ 层的码法相同,第 $i-2$ 层与第 $j-2$ 层的码法相同,…,第 2 层与第 $j-i+2$ 层的码法相同,第 1 层与第 $j-i+1$ 层的码法相同.这也就告诉我们,码放过程在第 $j-i$ 层之后即可结束.由此可见,码放过程不需要无休止地进行下去.

就这样,我们由每一层方块码法的有限性出发,从整体上把握了各层码法的花样变化规律性,并因此一举证明了码放过程的有限性.今后我们将会看到,这种方法在数学的许多分支中都是有用的.

习　题

1. 设 a,b,c 为三角形三边之长，证明不等式

$$\frac{a^2+2bc}{b^2+c^2}+\frac{b^2+2ca}{c^2+a^2}+\frac{c^2+2ab}{a^2+b^2}>3$$

2. 设 x 与 y 为正数，有 $x^2+y^3\geqslant x^3+y^4$. 证明：

$$x^3+y^3\leqslant 2$$

3. 证明，对 $n\in N,n\geqslant 2$ 和正数 $a_1,a_2,\cdots,a_n,q_1,q_2,\cdots,q_n$，其中 $q_1+q_2+\cdots+q_n=1$，都有

$$a_1^{q_1}a_2^{q_2}\cdots a_n^{q_n}\leqslant q_1a_1+q_2a_2+\cdots+q_na_n$$

并且当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

4. 设 x,y,z,p,q,r 为正数，使得

$$p+q+r=1,\quad x^py^qz^r=1$$

证明不等式

$$\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy}\geqslant\frac{1}{2}$$

5. 点 A_1,B_1,C_1 分别位于三角形 ABC 的边 BC,AC 和 AB 上，并且

$$AA_1\leqslant 1,BB_1\leqslant 1,CC_1\leqslant 1$$

证明，三角形 ABC 的面积不超过$\frac{1}{\sqrt{3}}$.

6. 证明，对任何自然数 n 都可成立不等式

$$\{\sqrt{1}\}+\{\sqrt{2}\}+\cdots+\{\sqrt{n^2}\}\leqslant\frac{n^2-1}{2}$$

其中$\{x\}$表示实数x的小数部分.

7. 将自然数1到$2n$写成序列$a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$,使得

$$|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots+|a_{2n-1}-a_{2n}|+|a_{2n}-a_1|=2n^2$$

证明,

$$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+\cdots+|a_{2n-1}-a_{2n}|=n^2$$

8. 设a,b,c为整数,现知可以找到两个不同的自然数n和m,使得$a^n+b^n+c^n=0$和$a^m+b^m+c^m=0$.证明,$abc=0$.

9. 任何四边形都可以分为三个梯形.

10. 自然数n的十进制表达式中的各位数字之和等于100,而$44n$的各位数字之和等于800.试求$3n$的各位数字之和.

11. 甲乙二人在黑板上轮流写出100!的正约数,不能写1,不能重复,每人每次写一个,甲先开始.如果在谁写过之后,黑板上的数整体互质,就算谁输.试问,在正确的策略之下,谁将取胜?

12. 8只苍蝇停在正方体的8个顶点上,每个顶点上一只.被人驱赶后,它们都飞离了正方体.但不一会它们又都回到了正方体上,仍是每个顶点上一只.证明,其中必有某3只苍蝇,使得以它们起飞前后所在的3个顶点作为顶点的两个三角形全等.

13. 自一副扑克牌中去掉大小王牌后,把剩下的52张牌按任意顺序迭成一摞背面向上放在桌子上.每次随意从中取出一张牌,取出的牌可以摊开放在桌子上.要求每次取牌

之前都预报一下将被取出的下一张牌的花色(黑桃,方片,等等).某人每次都将已取出的牌中张数最少的花色作为对下一张牌的花色预报,如果张数最少的花色多于一种,则任取其中一种花色作为预报.证明,该人至少有13次报准了花色.

14. $n\times n$ 的方格表被分成了 $2n$ 个矩形,其中每个矩形都整个位于表中的黑色折线的一侧(上侧或下侧).证明,其中有一个矩形恰由一个方格组成(见图13.1).

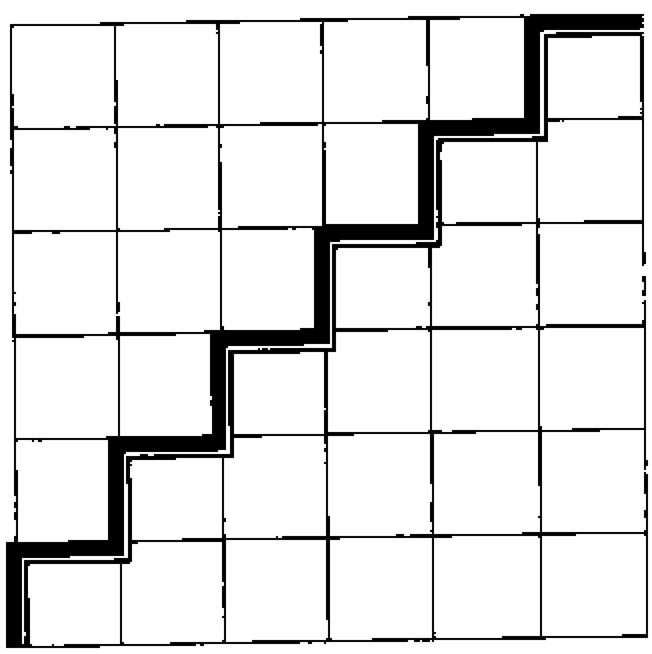


图 13.1

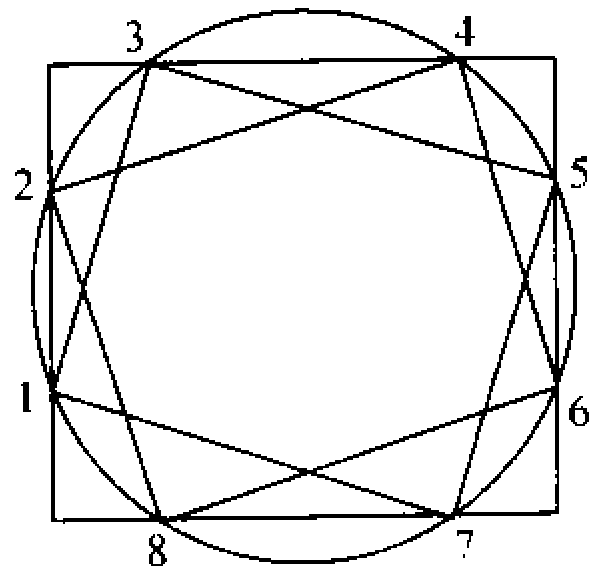


图 13.2

15. 圆与矩形相交于8个点,将它们依次编号为1~8.证明,以奇数号点为顶点的四边形与以偶数号点为顶点的四边形的面积相等(见图13.2).

16. 八面体的各个面被交替地染为黑色和白色,如国际象棋盘状.证明,八面体内部任何一点到白色各面的距离之和与到黑色各面的距离之和相等.

17. 某国共有 N 个航空公司.每个公司在每个城市都开设有一条航线,但是每一对城市之间都至多有某一个公司开

设的一条直飞航线. 由每个城市都可以飞到其他任何一个城市(包括中转后到达). 现因经济问题,全国共关闭 $N-1$ 条航线,但每个公司至多关闭一条航线. 证明,现在由每个城市仍然都可以飞到其他任何一个城市.

18. 在数轴上把坐标为 $1,2,3,\cdots,2n$ 的点全都标注了出来. 一只蚂蚱从点 1 出发,经过 $2n$ 次跳动,到遍所有标出的点,并且回到了出发点. 现知除了最后一次之外,蚂蚱跳过的各次长度之和等于 $n(2n-1)$. 证明,蚂蚱最后一次跳过的长度等于 n.

19. 某次国际会议共有 300 人参加,会议的工作语言有 5 种. 现知每个与会者都懂得其中 3 种语言. 证明,可以把这 300 个与会者分为 3 个组,每组 100 人,使得每个组内都可以找出一种大家都懂的语言.

20. 在无限大的跳棋盘上的一个由 $n\times n$ 个方格组成的正方形中放有 n^2 枚跳棋子,每个方格放一枚. 每一次允许将一枚棋子跳过(以边相邻的)邻格中的一枚棋子,而直接落入它的下一个空着的邻格中,并把被它跳过的那一枚棋子从棋盘中取出,这称为一次跳动. 如此一直进行到不能再进行为止. 证明,"不能再进行"的时刻不会在 $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ 次跳动之前来临.

21. 经过球内一点作三个相互垂直的平面,它们将球面分为 8 个曲面三角形. 将这些曲面三角形交替地染为白色和黑色,如国际象棋盘状. 证明,球面上白色部分的面积与黑

色部分的面积相等(见图 13.3).

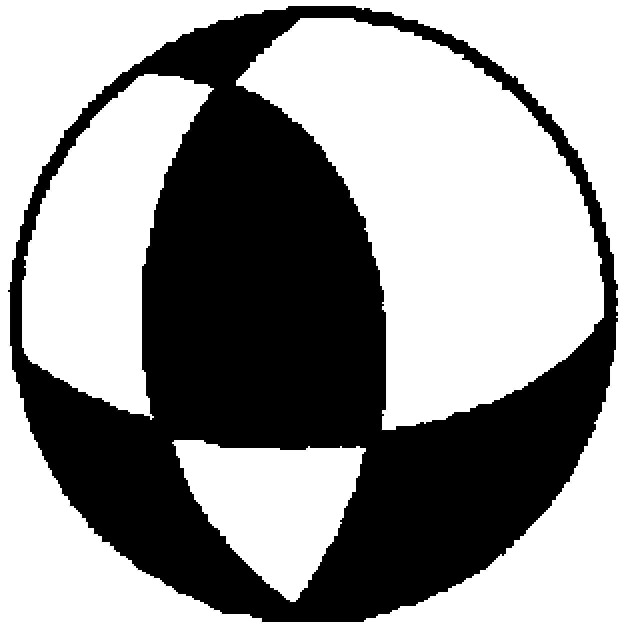


图 13.3

22. 大百科全书共有 10 卷,它们差不多已经按顺序放在书架上:每一卷或者已放在自己的位置上,或者放在邻位上.试问,有多少种此类放法?

23. a)一些三角形放在平面上,其中每 4 个三角形都有公共点.证明,所有这些三角形有公共点.

    b)一些矩形放在平面上,其中每 3 个矩形都有公共点.证明,所有这些矩形有公共点.

24. 在 $n\times n$ 的方格表中标出 N 个方格,使得方格表中的每个方格(无论是标出的还是未标出的方格)都有一个邻格被标出,此处把有公共边的方格称为相邻.试确定 N 的最小可能值.

25. 试求出所有的函数 $f:R\to R$,使得对一切 $x,y\in R$ 都有

$$f(x-f(y))=f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$$

26. 令 $a_1=1,a_{n-1}=a_n+\dfrac{1}{a_n},n=1,2,\cdots$

a)证明，$a_{100}>14$.

b)试求$[a_{1000}]$，亦即找出这样的整数 m，使得 $m\leqslant a_{1000}<m+1$.

c)证明极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}$存在，并求出该极限值.

27. 把 N 个同样大小的木制正方体相互粘贴，使得其中每两个正方体都有一个面或一个面的一部分相互粘贴. 证明，这种 N 的最大值为 6.

提示与解答

1. 由三角形不等式知 $a^2>(b-c)^2$，从而得 $a^2+2bc>b^2+c^2$，余类推.

2. 首先证明

$$x+y^2\geqslant x^2+y^3 \qquad (*)$$

假设(*)式不成立，那么就有 $x+y^2<x^2+y^3$，将该式与题中所给的不等式相加，得到

$$(x+x^3)+(y^2+y^4)<2x^2+2y^3$$

这与众所周知的不等式 $x+x^3\geqslant 2x^2$ 及 $y^2+y^4\geqslant 2y^3$ 相矛盾. 所以(*)式成立.

将(*)式和题中所给的不等式联立，得到

$$x+y^2\geqslant x^2+y^3\geqslant x^3+y^4$$

从而知有

$$2x+2y^2\geqslant x^2+y^3+x^3+y^4$$

注意到

$$(1+x^2)+(1+y^4)\geqslant 2x+2y^2\geqslant x^2+y^3+x^3+y^4$$

即得

$$2+x^2+y^4\geqslant x^2+y^3+x^3+y^4$$

此与所要证明的不等式等价.

3. 先证一个辅助性命题.

命题：设 $0<\alpha<1$，则对一切 $x>0$，有

$$x^\alpha-\alpha x\leqslant 1-\alpha \qquad (1)$$

提示：设 $f(x)=x^\alpha-\alpha x$，证明，$f(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上上升，在区间 $[1,\infty)$ 上下降.

$n=2$ 时，原不等式即为：对正数 a、b、α、β，其中 $\alpha+\beta=1$，有

$$a^\alpha b^\beta \leqslant \alpha a+\beta b \tag{2}$$

只要在(1)中令 $x=\dfrac{a}{b}$，并在其右端将 $1-\alpha$ 写为 β，即得(2).

为熟悉归纳途径，再看 $n=3$，即要证明对正数 a、b、c、α、β、γ，其中 $\alpha+\beta+\gamma=1$，有

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma \leqslant \alpha a+\beta b+\gamma c \tag{3}$$

此时，只需利用两次(2)，即可得

$$a^\alpha b^\beta c^\gamma=a^\alpha\left(b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}\right)^{\beta+\gamma}\leqslant \alpha a+(\beta+\gamma)b^{\frac{\beta}{\beta+\gamma}}c^{\frac{\gamma}{\beta+\gamma}}$$

$$\leqslant \alpha a+(\beta+\gamma)\left(\frac{\beta}{\beta+\gamma}b+\frac{\gamma}{\beta+\gamma}c\right)=\alpha a+\beta b+\gamma c$$

现在，已不难由 $n=k$ 过渡到 $n=k+1$. 易见，当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时，等号成立.

4. 由 Cauchy 不等式知，对任何实数 u_i、v_i、w_i，$i=1,2$ 有

$$(u_1u_2+v_1v_2+w_1w_2)^2\leqslant(u_1^2+v_1^2+w_1^2)(u_2^2+v_2^2+w_2^2)$$

在该不等式中令

$$u_1=\frac{px}{\sqrt{qy+rz}},\quad v_1=\frac{qy}{\sqrt{px+rz}},\quad w_1=\frac{rz}{\sqrt{px+qy}}$$

$$u_2=\sqrt{qy+rz},\quad v_2=\sqrt{px+rz},\quad w_2=\sqrt{px+qy}$$

于是得到

$$(px+qy+rz)^2 \leqslant \left(\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy}\right) \cdot (2px+2qy+2rz)$$

亦即

$$\frac{p^2x^2}{qy+rz}+\frac{q^2y^2}{px+rz}+\frac{r^2z^2}{px+qy} \geqslant \frac{1}{2}(px+qy+rz)$$

由于 $p+q+r=1$，故由第 3 题得 $px+qy+rz \geqslant x^p y^q z^r = 1$，代入上式，即得所证.

5. 分别将顶点 A，B，C 的对边记作 a，b，c，并将这些边上的高分别记作 h_a，h_b，h_c.

先设$\triangle ABC$ 为非锐角三角形，并设$\angle BAC \geqslant \frac{\pi}{2}$，于是

$$AB \leqslant B_1B \leqslant 1, h_c \leqslant C_1C \leqslant 1，从而 S_{ABC} \leqslant \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

再设$\triangle ABC$ 为锐角三角形. 此时，三条高的垂足都在各条边的内部. 设$\angle BAC$ 为三角形的最小内角，则有$\angle BAC \leqslant \frac{\pi}{3}$. 由于 $h_a \leqslant 1$，所以 $\min\{AB, AC\} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}$，故得结论.

6. $n=1$ 时显然成立. 为证 $n \geqslant 2$ 的情形，我们先证明如下的不等式：

$$\sum_{k=m^2}^{m^2-2m} \{\sqrt{k}\} \leqslant \frac{2m+1}{2} \tag{1}$$

其中 m 为自然数.

不难验证，对 $0 \leqslant a \leqslant m$，有$\sqrt{m^2+a}+\sqrt{m^2+2m-a} \leqslant 2m+1$，因此知

$$\{\sqrt{m^2+a}\}+\{\sqrt{m^2+2m-a}\} \leqslant 1 \tag{2}$$

特别地，对 $a=m$，可由(2)得知

$$\{\sqrt{m^2+m}\}\leqslant\frac{1}{2}$$

将(2)对 $a=0,1,\cdots,m-1$ 相加，再加上上述不等式，即得(1).

再将(1)对 m 由 1 到 $n-1$ 相加，并注意$\{\sqrt{n^2}\}=0$，即得所证.

7. 对于 $1,2,\cdots,2n$ 的任意一种排列 $a_1,a_2,\cdots,a_{2n}$，我们记

$$S=|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+\cdots$$
$$+|a_{2n-1}-a_{2n}|+|a_{2n}-a_1|$$

如果打开和式中任何一个绝对值符号，都得到两个自然数，一个带正号，一个带负号. 为了使 S 取得最大可能值，必须且只需，由 1 到 n 带负号，而由 $n+1$ 到 $2n$ 带正号. 而此时有

$$S=2\{(2n+2n-1+\cdots+n+1)$$
$$-(n+n-1+\cdots+1)\}=2n^2$$

这就表明，在题中所给的和式中的每一个绝对值符号中的两个数中，都是一个大于 n，另一个不超过 n. 因此就有

$$|a_1-a_2|+|a_3-a_4|+\cdots+|a_{2n-1}-a_{2n}|$$
$$=\sum_{k=n+1}^{2n}k-\sum_{k=1}^{n}k=n^2$$

8. 如果 m 或 n 为偶数，立即得到 $a=b=c=0$，知题中断言成立. 现设 m 和 n 为奇数，且 $abc\neq0$. 于是题中条件可以改述为

$$x^n+y^n=z^n,\quad x^m+y^m=z^m$$

其中 x、y、z 为正数.

如果 $x=y$，则 $2x^n=z^n$，$2x^m=z^m$，二式相除，又得 $x=z$，此为不可能.

现设 $x>y$，$n>m$. 记 $\frac{y}{x}=t<1$，于是由前面两个等式得

$$(1+t^n)^m=(1+t^m)^n$$

但是，由于 $0<t<1$，所以 $t^m>t^n$，因此又有

$$1+t^m>1+t^n,\quad (1+t^m)^n>(1+t^n)^m$$

上述两件事实相互矛盾，所以 $abc=0$.

9. 如果原四边形为梯形(包括平行四边形)则在上下底之间恰当作两条斜线即可；对其他四边形，先自最大内角之顶点引某一条不相邻之边的平行线段至形内，再过该线段的形内端点作最大内角两边的平行线即可.

10. 注意到 $44n$ 是 4 个 n 与 4 个 $10n$ 的和，如果将这 8 个数逐位相加，则在每一个数位上，都是 n 的该位数的 4 倍与 n 的下一位数的 4 倍之和. 如果不发生任何进位的话，则数 n 的每一位数都被加了 8 次，于是所得和数的各位数字之和刚好是 800. 而如果发生了进位，则各位数字之和必然减少(因为从一个数位上少了 10，而在另一个数位上则只增加了 1). 所以，在题中所说的情况之下没有进位发生. 这就表明，n 的每一位数都不大于 2. 从而 $3n$ 的各位数字之和刚好是 n 的各位数字之和的 3 倍.

11. 在正确的策略之下，乙将取胜. 由于在最后一步之前，写

在黑板上的数具有大于 1 的公约数，所以它们有共同的质约数 p. 既然接下来的一步无法再保持这一点，所以此时黑板上已经写出了 100! 的所有可被 p 整除的正约数，显然，共有 $100!/p$ 个这样的正约数. 众所周知，一个自然数有奇数个互不相同的正约数，当且仅当它是完全平方数. 因此，只要该数不能写成 pm^2 的形式，其中 p 为质数，那么它就一共有偶数个可被 p 整除的正约数，因此就一定是乙可取胜. 剩下来的只需指出，100! 可以被质数 97 和 89 整除，却不可被它们的平方整除，所以它不可写成 pm^2 的形式，其中 p 为质数.

12. 我们把处于同一条体对角线两个端点上的苍蝇称为"对顶的". 如果有某两只苍蝇 A 和 B 在起飞前后都是"对顶的"，那么以它们同任何一只苍蝇 C 在起飞前后所在的三个顶点作为顶点的两个三角形都是全等的. 如果任何两只原来"对顶的"苍蝇后来都不再是"对顶的"，那么，我们任取一对原来"对顶的"苍蝇，设为 A 和 B，并设后来与 A"对顶的"苍蝇是 C，于是以 A,B,C 三只苍蝇在起飞前后所在的三个顶点作为顶点的两个三角形是全等的.

13. 为了能看清问题，我们来从头说起. 易知，总有一个时刻，有三种花色的牌都已经至少分别取出了一张，而还有一种花色的牌没有出现，那么这时，该人一定预报这种花色，直到这种花色的牌出现为止，这时他就已至少报对了一次. 同样，一定有某一时刻，有三种花色的牌都已经至少分别取出了两张，而还有一种花色的牌至多被取出了

一张，那么这时他一定预报这种花色，直到这种花色的牌出现第二张为止，这时他就已至少报对了两次. 一般地，当有三种花色的牌都已经至少分别取出了 k 张，还有一种花色的牌至多被取出了 $k-1$ 张，那么他一定预报这种花色，直到这种花色的牌出现第 k 张为止，这时他就已至少报对了 k 次. 显然，这种推理对 $k=1,2,\cdots,13$ 都成立，所以他至少可以报对 13 次.

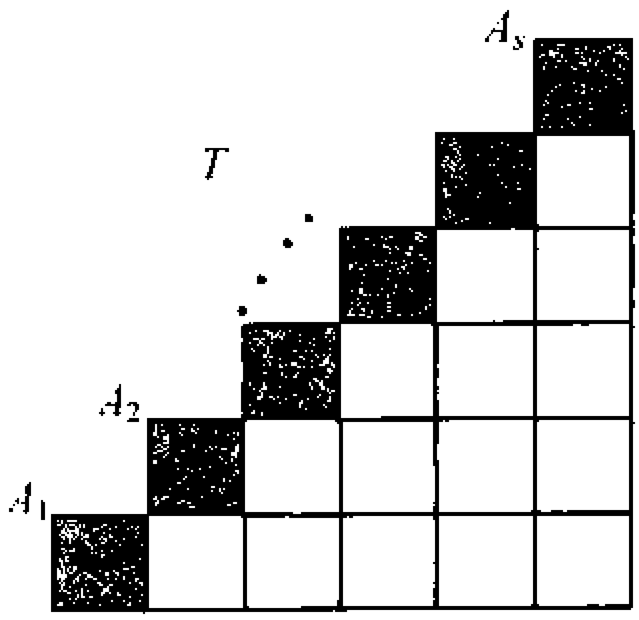


图 13.4

14. 方格表中的黑色折线将方格表分成两个阶梯状"三角形"T_1 和 T_2，假定折线下方的"三角形"为 T_1，于是 T_1 的"底"由 n 个小方格组成. 而 T_2 的"底"由 $n-1$ 个小方格组成. 假定它们被分别分为 m 和 k 个矩形，其中 $m+k=2n$.

我们来观察一般情况. 设阶梯状"三角形"T 的"底"由 s 个小方格组成(见图 13.4). 由于在分割矩形时，图中所标出的点 $A_1,A_2,\cdots,A_s$ 显然应当属于各不相同的矩形，所以 T 至少应被分成 s 个矩形. 又由于在 T 恰好被分为 s 个矩形时，图中的 s 个黑色方格中的每一个都应被完整地分在这 s 个不同的矩形之中. 而与黑色方格相邻的白色方格只有 $s-1$ 个，所以至少有一个被分出的矩形中不能有白色方格，从而它仅由一个黑色方格所组成. 现在回到阶梯状"三角形"T_1 和 T_2. 如前所说，一定有 $m\geqslant n$，k

$\geqslant n-1$. 又因 $m+k=2n$，所以或者有 $m=n$，或者有 $k=n-1$. 于是，或者在 T_1 中，或者在 T_2 中，有一个被分出的矩形仅由一个方格所组成.

15. 先指出一个关于矩形 $KLMN$ 的水平边上被截下来的线段的关系式(见图13.5)：

$$LA_3+NA_7=MA_4+KA_8$$

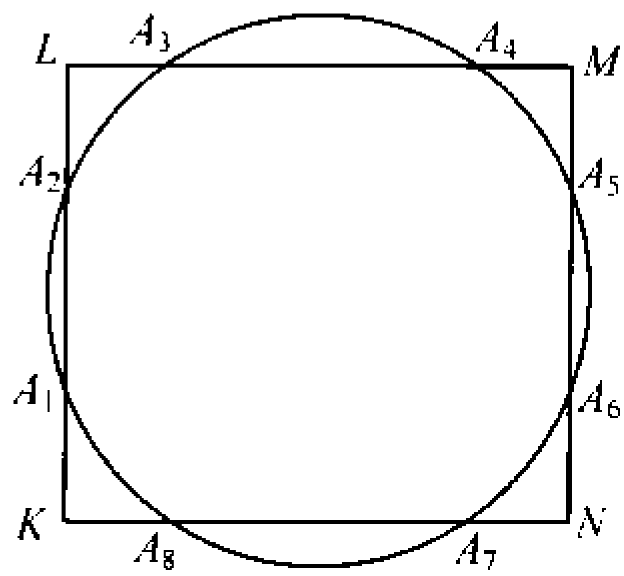


图 13.5

此关系式可由 $A_3A_8A_7A_4$ 是等腰梯形得出. 类似地有另一个关系式

$$KA_1+MA_5=LA_2+NA_6$$

将上述二式相乘，又得到第三个关系式. 现在设矩形 $KLMN$ 水平边长为 a，竖直边长为 b. 于是利用所得到的三个关系式，就可得到

$$\begin{aligned}&LA_3(b-KA_1)+NA_7(b-MA_5)\\&\quad+KA_1(a-NA_7)+MA_5(a-LA_3)\\&=MA_4(b-NA_6)+KA_8(b-MA_5)\\&\quad+LA_2(a-MA_4)+NA_6(a-KA_8)\end{aligned}$$

该等式表明，4 个三角形 LA_1A_3，NA_5A_7，KA_7A_1 及 MA_3A_5 的面积之和与另外 4 个三角形 MA_6A_4，KA_2A_8，LA_4A_2 及 NA_8A_6 的面积之和相等. 而这时，四边形 $A_1A_3A_5A_7$ 与四边形 $A_2A_4A_6A_8$ 的面积当然也就相等.

16. 每一种颜色的表面所在的平面均围成一个正四面体，并且此二正四面体全等. 而正四面体内部任何一点到其各

表面的距离之和为常值，且该值就是正四面体的体积与其表面积之比.

17. 我们将 N 个航空公司编号为 $1,2,\cdots,N$. 由于一共关闭了 $N-1$ 条航线，且每个公司至多被关闭了一条航线，故可设第 1 号公司未被关闭航线，而其余各个公司都被分别关闭了一条航线. 我们来观察 1，2 两家公司. 由于原来每家公司在每个城市都开设有一条航线，所以由任何一个城市 A_1 出发，都可以乘 1 号公司的飞机飞到第二个城市 A_2，接着可以乘 2 号公司的飞机飞到下一个城市 A_3，接着又可以乘 1 号公司的飞机飞到下一个城市 A_4，如此交替地乘坐 1 号和 2 号公司的飞机，直到飞回城市 A_1 为止(因为城市数目有限，所以一定要飞到某个已经到过的城市. 但是，每个公司在每个城市都仅开设有一条航线，所以中途所经过的每个城市的 1 号和 2 号公司的航线都已经飞过了，从而不会再次到达它们，故只能回到城市 A_1). 这就说明，原来 1 号和 2 号公司的航线形成了一个个互不相交的圈. 现在，2 号公司被关闭了一条航线，该航线一定位于原来的某个圈上，从而该圈上的各个城市之间仍可仅利用 1 号和 2 号公司的航线相互到达. 上述推理未涉及其他公司的航线，所以适用于 1 号和任何一个其他公司. 于是，现在由任何城市仍可飞到其他任何城市.

18. 将蚂蚱依次到达的点记为 $x_1,x_2,\cdots,x_{2n}$，于是它们是 $1,2,\cdots,2n$ 的一种排列. 易知蚂蚱所跳过的距离是

$$S = |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3| + \cdots + |x_{2n-1} - x_{2n}| + |x_{2n} - x_1|$$

我们来估计 S 的上界. 易知

$$S \leqslant 2(2n + 2n - 1 + \cdots + n + 1) - 2(n + n - 1 + \cdots + 2 + 1) = 2n^2$$

由于蚂蚱一共做了 $2n$ 次跳动，所以它最后依次跳过的距离不大于 n，即 $|x_{2n} - x_1| \leqslant n$，注意到 $x_1 = 1$，故而知 $x_{2n} \leqslant n+1$. 因此为证题中结论，只需证明，$x_{2n} = n+1$.

假设不然，有 $x_{2n} \leqslant n$. 那么由抽屉原则可知，此时在 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ 中，必有二相邻项 x_i, x_{i+1} 都大于 n. 我们将 $x_1, x_2, \cdots, x_{2n}$ 重排为 $x_1, x_2, \cdots, x_i, x_{2n}, x_{2n-1}, \cdots, x_{i+1}$，那么相应的和 S 也应满足估计式

$$|x_1 - x_2| + \cdots + |x_i - x_{2n}| + |x_{2n} - x_{2n-1}| + \cdots + |x_{i+1} - x_1| \leqslant 2n^2$$

但是此时却有

$$S = n(2n-1) - |x_i - x_{i+1}| + |x_i - x_{2n}| + |x_{i+1} - 1|$$

而由该式可得 $S > 2n^2$，此为不可能. 所以 $x_{2n} = n+1$.

19. 作一个具有 6 个顶点的图，每个顶点表示一种语言. 注意每个与会者都刚好不懂两种语言. 我们在每两个顶点之间连一条边（线段），并在该线段上写上不懂得这两种语言的人数，则所写的各数之和刚好等于 300. 如果可以将所有与会者按照题中要求分为 3 个组，那就意味着，我们可以找到 3 个顶点，使得它们满足如下两个条件：第一，在连接这些顶点的每条边上所写的数都不大于 100（因

为这些人都不懂得该条边所连的两个顶点所代表的语言，故应分入第三组)；第二，由于自每个顶点所连出的4条边上所写的数的和表示不懂得该种语言的总人数，所以对这3个顶点来说，它们的这些和数不应大于200. 我们的解题思路是：证明，我们可以找到3个顶点，使得它们满足如上两个条件；并且证明这两个条件对于分组要求来说，不仅是必要的，而且是充分的.

我们将一个顶点称为“坏”的，如果自它所连出的4条边上所写的数的和大于200；将一条边称为“坏”的，如果在它上面所写的数大于100. 显然，图中至多有2条“坏”边(否则，各边上的数之和大于300，与题意相矛盾). 又易知，如果存在3个“坏”的顶点，则相应的“4边之和”的总和大于600，而与题意相矛盾. 所以图中至多有2个坏顶点. 如果图中至少有一个“坏”的顶点，则所有的“坏”边都应该从它连出，因若不然，自它连出的边上的数之和再加上不从它连出的“坏”边上的数，便大于300，与题意相矛盾. 所以，如果图中有“坏”顶点，则在“不坏”的顶点之间所连的都是“不坏”的边，既然图中至多有2个“坏”顶点，所以至少有3个“不坏”的顶点. 而如果图中没有“坏”顶点，则由于至多有两条“坏”边，故能找到由“不坏”的边所形成的三角形. 总之，我们都能找到满足上述两个条件的3个顶点.

现在设顶点 A,B,C 满足上述两个条件. 我们来证明可以把所有与会者分为3组，每组100人，各组分别以

A,B,C 作为工作语言. 并分别称这 3 个组为 A 组,B 组和 C 组. 我们来逐个分配与会者. 设现在要分配的人是 X. 显然,X 至少懂得 A,B,C3 种语言中的一种,不妨设他懂得语言 A. 如果此时 A 组人数未满,就把他分入 A 组;如果 A 组人数已满,那么由于同时不懂得语言 B 和 C 的人数不大于 100(在顶点 B 和 C 之间连的不是坏边),所以此时 A 组中必有某个人 Y 懂得语言 B 或 C,把 Y 调入 B 组或 C 组,让 X 进入 A 组即可. 如果 Y 所能进入的组只是 B 组,而 B 组人数也已满,那么在 A 组或 B 组中就一定有人懂得语言 C,并且 C 组人数未满. 因若不然,如果在 A 组和 B 组中所有的人都不懂得语言 C,那么不懂得语言 C 的人数便大于 200,此与 C 不是"坏"顶点的事实相矛盾. 所以,我们一定可以把人员调配成功.

20. 根据跳动跳棋子时的落点位置,把"跳动"分为"内"和"外"两类:落点在原 $n\times n$ 正方形内部的称为"内"类跳动,否则就称为"外"类跳动. 假定已不能再继续跳动,并且已经做了 k 次"内"类跳动和 l 次"外"类跳动. 显然,此时任何两枚棋子都不相邻,并且在原 $n\times n$ 正方形内部已不少于$\left[\frac{n^2}{2}\right]$个空格. 由于每次"内"类跳动至多增加 1 个空格,而每次"外"类跳动至多增加 2 个空格,故得不等式

$$k+2l\geqslant\left[\frac{n^2}{2}\right] \tag{1}$$

现设 n 为偶数. 我们将原正方形分为$\frac{n^2}{4}$个各有 4 个方格

的小正方形.由于此时任何两枚棋子都不相邻,所以每个小正方形都至少参与了两次“行动”(跳出棋子或取出棋子).由于在每次“内”类跳动中,至多有两个小正方形参与“行动”;而在每次“外”类跳动中,至多有1个正方形参与“行动”;所以又有不等式

$$2k+l\geqslant 2\frac{n^2}{4} \tag{2}$$

由(1)(2)两式即得 $k+l\geqslant\frac{n^2}{3}\geqslant\left[\frac{n^2}{3}\right]$,所以题中断言对偶数 n 成立.下面再看 n 为奇数的情形.易知 $n=1$ 和 $n=3$ 时断言成立.现设 $n=2m+1$,其中 $m>1$.我们在第三行和第三列中取出 $2m$ 个 1×2 的小矩形,称这些小矩形为“多米诺”.再把方格表的其余部分分为 m^2 个各有4个小方格的正方形.并把“多米诺”和小正方形都称为“图形”.易知,在每次“内”类跳动中,都至多有两个“图形”中的棋子参与行动;而在每次“外”类跳动中,至多有1个“图形”中的棋子参与行动;所以有不等式

$$2k+l\geqslant 2m^2+2m \tag{3}$$

这是因为小正方形中的每一枚棋子至少参与了2次行动,而“多米诺”的每一枚棋子至少参与了1次行动.由(1)(3)两式可得

$$3(k+l)\geqslant 4m^2+4m=n^2-1$$

如果 $n^2\equiv 0 \pmod 3$,则显然有

$$3(k+l)\geqslant n^2,\quad k+l\geqslant\frac{n^2}{3}\geqslant\left[\frac{n^2}{3}\right]$$

否则，就有 $n^2 \equiv 1 \pmod 3$，以及 $k+l \geqslant \frac{n^2-1}{3} = \left[\frac{n^2}{3}\right]$.

21. 如果3个平面是由球的中心 O 所作的，则结论显然成立. 下设它们不是通过球的中心 O 的. 分别将这3个平面记作 α,β,γ，并分别将它们的关于 O 的对称平面记作 $\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}$. 这6个平面将球面分为面积两两相等的"片对"，每个"片对"中都是一个为白片，一个为黑片. 虽然这句话说起来容易，证起来却很难. 为了使其比较容易理解，我们采用"爬坡式推理". 假定平面 α 和 $\bar{\alpha}$ 为水平方向. 球被夹在它们之间的部分是一个"球台"，而在它们的上方和下方的部分则各是一个"帽子". 我们将经过球心 O 的水平平面记作 π. 易知，平面 β,γ 和 $\bar{\beta},\bar{\gamma}$ 将这两个"帽子"的外表面分成若干"片"，使得一顶"帽子"上的每一个白片都与另一顶"帽子"上的同它关于平面 π 对称的黑片面积相等. 为了看清"球台"外侧面上的情况，我们作出球在平面 π 上的截面(图13.6). 容易看出，该图中标号相同的白片与黑片面积相等. 这样我们便证得了题中的结论.

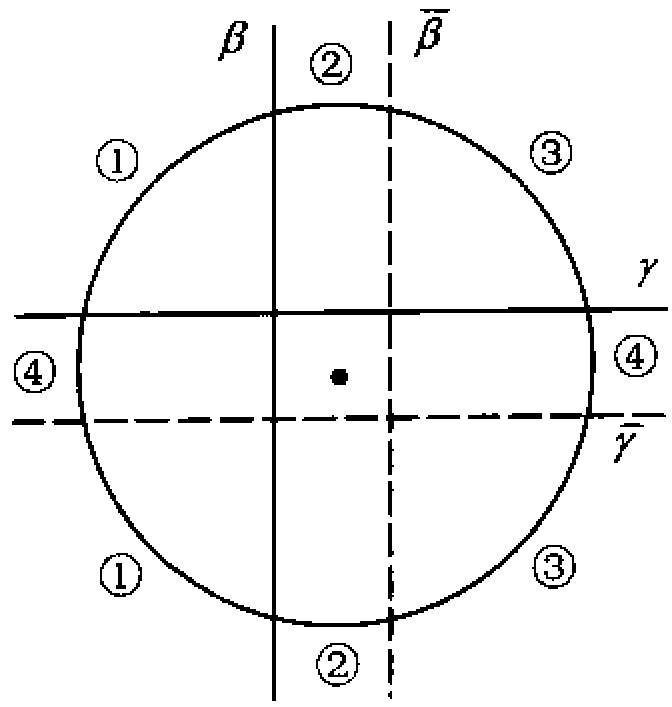


图 13.6

22. 假设该大百科全书共有 n 卷，并假定它们整体上已经放

在自己的位置上，尽管其中有某些卷可能放在邻卷的位置上. 假定一共有 $p(n)$ 种此种放法. 显然，$P(1)=1$，$P(2)=2$. 将所有这些放法分为两类，第一类中，第一卷放在自己的位置上；第二类中，第一卷未放在自己的位置上. 易见，第一类放法的数目等于 $P(n-1)$. 在第二类放法中，第一卷必放在第二卷的位置上，从而第二卷一定放在第一卷的位置上，所以，第二类放法的数目等于 $P(n-2)$. 因此就有递推关系式 $P(n)=P(n-1)+P(n-2)$. 于是由 $P(1)=1$，$P(2)=2$ 可得 $P(3)=3$，如此递推，可得序列 1，2，3，5，8，13，21，34，55，89. 所以 $P(10)=89$.

23. a) 假定在平面上放有三角形 $T_1, T_2, \cdots, T_n (n \geqslant 5)$，其中任何 4 个三角形都有公共点. 先设 $n=5$. 由于 T_2，T_3，T_4，T_5 中任何 3 个都与 T_1 有公共点，这些公共点都是 T_1 的顶点，由于 T_1 只有 3 个顶点，而 T_2，T_3，T_4，T_5 中却有 4 个三元组，所以必有两个不同的三元组与 T_1 的公共点相同，该点就是 5 个三角形的公共点. 由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的归纳过渡可以按类似推理得到.

b) 先指出两个基本事实：(1) 平面上的 4 个点中，如果任何 3 点都是一个直角三角形的顶点，则这 4 个点是一个矩形的 4 个顶点；(2) 如果两个矩形有 3 个公共顶点，则这两个矩形重合. 现设平面上放有矩形 $P_1, P_2, \cdots, P_n (n \geqslant 4)$，其中任何 3 个都有公共点. 我们先看 $n=4$ 的情形. 假定 4 个矩形 P_1，P_2，P_3，P_4 没有公共点，但是其中任何 3 个都有公共点，设其中所有不同的三元

组的公共顶点为 A,B,C,D. 于是，它们之中任何 3 个点都是其中某个矩形的 3 个顶点，因此是一个直角三角形的顶点，从而由上所说，$ABCD$ 是一个矩形，并且就是 P_1,P_2,P_3,P_4 之中的某一个，由此可以得到与假定的矛盾. 再看 $n=5$ 的情形. 设 5 个矩形 P_1,P_2,P_3,P_4 和 P_5 没有公共点，但是其中任何 3 个都有公共点. 于是由上所证可知，它们之中任何 4 个都有公共顶点. 设 A,B,C,D 和 E 是其中一切可能的 4 元组的公共顶点，于是其中任何 4 个都是某个矩形的 4 个顶点. 但是平面上不存在这样的不同的 5 个点，所以其中必有某两点重合. 于是该重合的点就是所有 5 个矩形的公共点，得到矛盾. 按照由 $n=4$ 推出 $n=5$ 的类似思路可完成由 $n=k$ 到 $n=k+1$ 的归纳过渡.

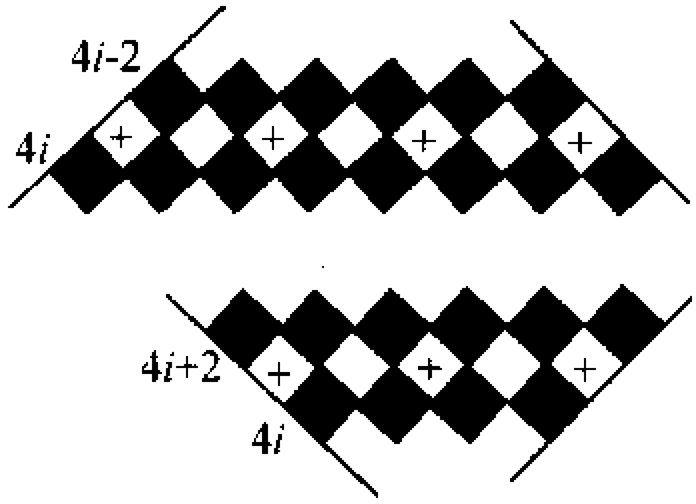


图 13.7

24. 先设 n 为偶数. 将方格表中的方格相间地染为白色和黑色，如国际象棋盘状. 以 $f(n)$ 表示所要寻找的 N 的最小值. 再以 $a(n)$ 表示所应标出的白格的最小数目，它可使得每个黑格都至少有一个被标出的白色邻格；类似地，以 $b(n)$ 表示所应标出的黑格的最小数目，它可使得每个白格都至少有一个被标出的黑色邻格. 由于 $n=2k$ 为偶数，故由对称性知有 $a(n)=b(n)$，此外，显然还有

$f(n)=a(n)+b(n)$. 假定最左上角的方格为黑格. 我们把方格表斜过来放置，使得最长的黑色对角线成水平状. 于是，各条黑色对角线的长度自上至下依次为 $2,4,\cdots,2k,\cdots,4,2$. 我们把位于最长（长度为 $2k$）的黑色对角线上方的部分称为上半表，位于其下方的部分称为下半表. 在上半表中，我们如果把夹在长度为 $4i-2$ 和长度为 $4i$ 的黑色对角线之间的白色对角线上的“奇数”号（图 13.7）白格都标注出来，则标出了 $2i$ 个白格. 在下半表中，我们如果把夹在长度为 $4i+2$ 和长度为 $4i$ 的黑色对角线之间的白色对角线上的“奇数”号白格都标注出来，则标出了 $2i+1$ 个白格. 因此一共标出了

$$2+4+\cdots+k+\cdots+3+1=\frac{1}{2}k(k+1)$$

个白格. 不难看出，此时每个黑格都有被标出的白色邻格. 由此即知

$$a(n)\leqslant\frac{1}{2}k(k+1)$$

我们再观察被标出的 $\frac{1}{2}k(k+1)$ 个白格，易见它们互不相邻，从而为了保证它们之中每一个都有被标出的黑色邻格，至少应当标出这么多个黑格，所以

$$b(n)\geqslant\frac{1}{2}k(k+1)$$

由此即得

$$a(n)=b(n)=\frac{1}{2}k(k+1),\quad f(n)=k(k+1)$$

通过类似推导，可得

$f(n)=4k^2-1$，如果 $n=4k-1$； $f(n)=(2k+1)^2$，如果 $n=4k+1$.

25. 以 A 表示 f 的取值集合，并记 $f(0)=c$. 先令 $x=y=0$，得到

$$f(-c)=f(c)+c-1$$

故知 $c\neq 0$. 容易对 $x\in A$，求出 $f(x)$的值. 因为此时存在 $y\in R$，使 $x=f(y)$，代入所给的关系式，即知对一切 $x\in A$，有

$$f(x)=\frac{1}{2}(c+1-x^2) \qquad (1)$$

为了得到 $f(x)$在 $x\notin A$ 处的值，我们来证明，

$$\{x-y \mid x,y\in A\}=R$$

注意到 $c\neq 0$，所以通过令 $y=0$，我们得到

$$\begin{aligned}&\{f(x-c)-f(x) \mid x\in R\}\\&=\{cx+f(c)-1 \mid x\in R\}=R\end{aligned}$$

这个事实告诉我们，对任何 $x\in R$，都存在 $y_1,y_2\in A$，使得 $x=y_1-y_2$，于是利用(1)式，得到

$$\begin{aligned}f(x)&=f(y_1-y_2)=f(y_2)+y_1y_2+f(y_1)-1\\&=\frac{1}{2}(c+1-y_2^2)+y_1y_2+\frac{1}{2}(c+1-y_1^2)-1\\&=c-\frac{1}{2}(y_1-y_2)^2=c-\frac{1}{2}x^2 \qquad (2)\end{aligned}$$

比较(1)和(2)，可得 $c=1$. 所以，对一切 $x\in R$，都有

$$f(x)=1-\frac{1}{2}x^2$$

这表明所求得的函数是唯一满足题中条件的函数.

26. a)将等式 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$两端平方,可得

$$a_{n+1}^2=a_n^2+2+\frac{1}{a_n^2}>a_n^2+2$$

利用 $a_1^2=1$ 和上式,我们获知 $a_2^2>a_1^2+2=3$, $a_3^2>a_2^2+2>3+2=5$.并且一般地,

$$a_n^2>2n-1,\quad 当\ n>1 \qquad (*)$$

特别地,就有 $a_{100}^2>199>196=14^2$,此即为所证.

b)答案为$[a_{1000}]=44$.一方面,由(*)式知,当 $n=1000$ 时,有

$$a_{1000}^2>1999>44^2,\quad [a_{1000}]\geqslant 44$$

为得到另一方面的估计,我们引入数列 b_n,使得 $a_n^2=2n-1+b_n$.由(*)式知,当 $n>1$ 时,有 $b_n>0$.于是我们可以将等式 $a_{n+1}^2=a_n^2+2+\frac{1}{a_n^2}$改写为

$$2n+1+b_{n+1}=2n-1+b_n+2+\frac{1}{2n-1+b_n}$$

由此得到

$$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2n-1+b_n}\leqslant b_n+\frac{1}{2n-1}$$

通过归纳法,可由上式推出

$$b_{n+1}\leqslant b_1+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}$$

由于 $b_1=0$,所以我们知

$$b_{1000}\leqslant 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{1995}+\frac{1}{1997}$$

为估计该式右端之值，我们将其分段

$$b_{1000} \leqslant 1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{25}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{79}\right)+\left(\frac{1}{81}+\cdots+\frac{1}{241}\right)+\left(\frac{1}{243}+\cdots+\frac{1}{727}\right)+\left(\frac{1}{729}+\cdots+\frac{1}{1995}+\frac{1}{1997}\right)$$

上式右端第一个括弧中有 3 个加项，最大项为$\frac{1}{3}$；第二个括弧中有 9 个加项，最大项为$\frac{1}{9}$；…；第五个括弧中有 243 个加项，最大项为$\frac{1}{243}$；最后，第六个括弧中有 635 个加项，最大项为$\frac{1}{729}$. 所以立知 $b_{1000}<7$，从而就有

$$a_{1000}^2 < 2000-1+7 < 2025 = 45^2$$

故得 $a_{1000}<45$.

c) 利用 b) 中的结果，易知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0$. 由于 $a_n=\sqrt{2n-1+b_n}$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\sqrt{n}}=\sqrt{2}$$

27. 首先，我们可以把 6 个木制正方体如图 13.8 放置，使每两个正方体都以一个面或一个面的一部分相互粘贴. 其中 3 个规则放置如品字型的正方体放在第一层，而另外 3 个成品字型的斜向放置的正方体放在第二层，即放在第一层 3 个正方体的上方. 这就说明，有 $\max N\geqslant 6$. 我们要来证明，

$$\max N = 6$$

先从平面的情况看起. 如果我们要在平面上放置 n 个同样大小的正方形，使得每两个正方形都以一条边或一条边的一部分相贴，则显然有 $\max n=3$（见图 13.9）. 我们把 n 个木制正方体称为放在同一层，如果能找得到一个平面（桌子），使得它们都在该平面上，那么就有 $n\leqslant 3$. 于是不难看出，如果 N 个木制正方体中的每两个的边都相互平行，那么，最多只能放置 4 个木块，即 $N=4$. 例如，在其中 3 个都放在同一张桌子上，再在它们的上方放置一个木块. 现设在 N 个木制正方体中可以找到两个木块 Q_1 和 Q_2，它们的边不是相互平行的，而 π 是它们之间以面相贴的公共平面. 那么，平面 π 就把所有木制正方体隔成两"层"，木块 Q_1 在其中一"层"中，而木块 Q_2 在另一"层"中. 注意到，最多只能放两层，而每一层最多只能放 3 个木块，所以 $N\leqslant 6$.

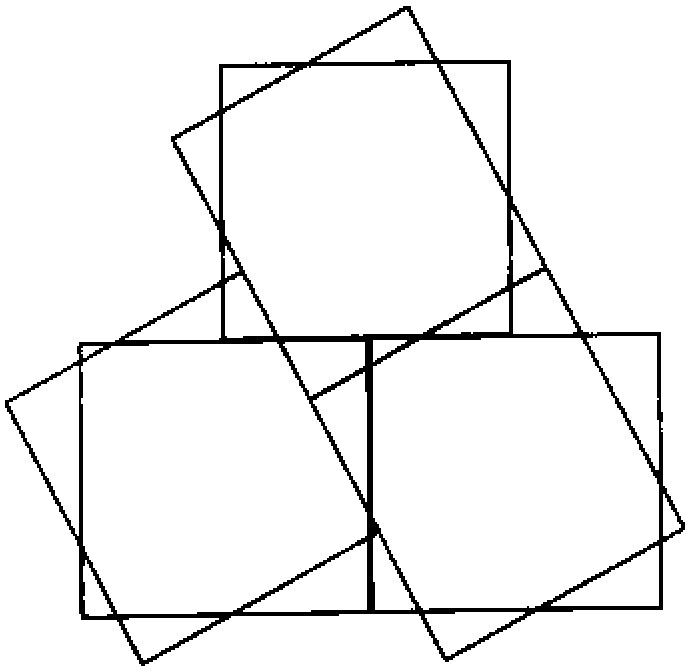


图 13.8

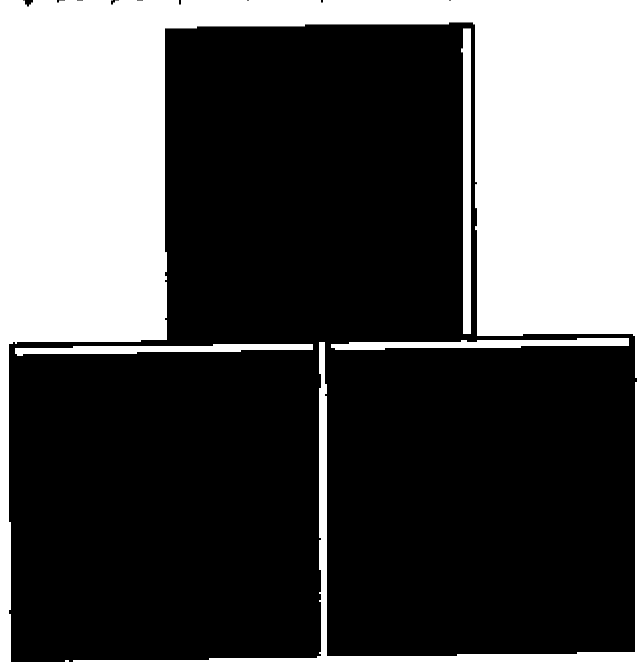


图 13.9

图书在版编目(CIP)数据

从特殊性看问题/苏淳编著. —3 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2009.4

(数学奥赛辅导丛书)

ISBN 978-7-312-02485-6

Ⅰ.从… Ⅱ.苏… Ⅲ.数学课--高中—教学参考资料 Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2009）第 049181 号

中国科学技术大学出版社出版发行

地址：安徽省合肥市金寨路 96 号，230026

网址：http://press.ustc.edu.cn

合肥学苑印务有限公司印刷

全国新华书店经销

*

开本：880×1230/32　印张：6.375　字数：126 千

1988 年 1 月第 1 版　2009 年 4 月第 3 版

2009 年 4 月第 3 次印刷

定价：12.00 元

数学奥赛

辅导丛书

- 从特殊性看问题
- 组合恒等式
- 解析几何的技巧
- 算两次
- 构造法解题
- 漫话数学归纳法

责任编辑／韩继伟
封面设计／黄　彦

定价: 12.00 元

ISBN 978-7-312-02485-6

9 787312 024856 >