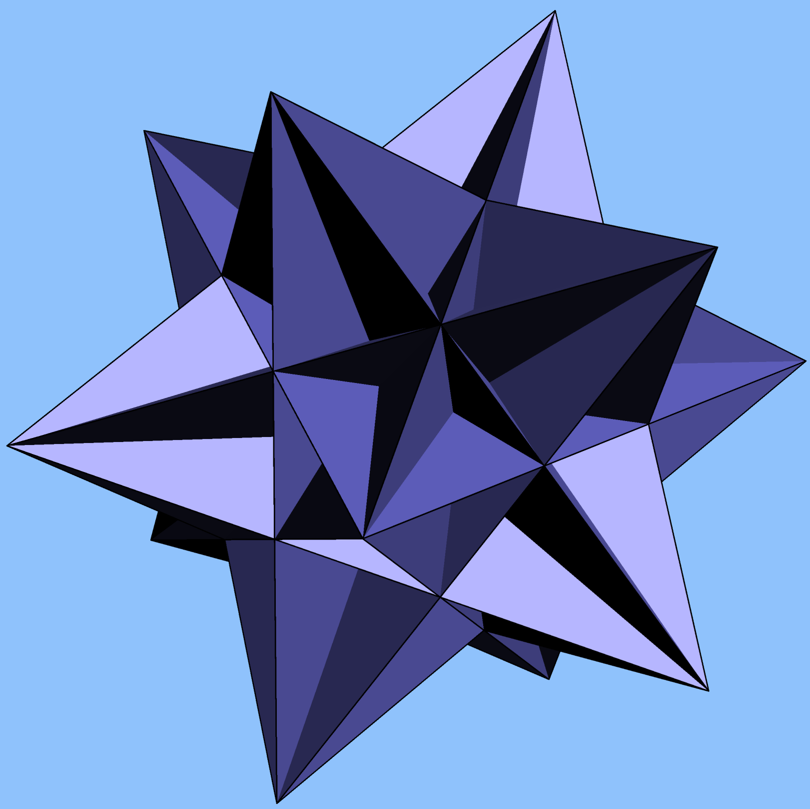
数学空间——人教数学网刊

中学数学

2013 年第 3 期　　总第 13 期



目录

中考加油站

1.1　2013 年初中毕业生中考数学模拟试题——谢勇

（时间：120 分钟　满分：120 分）

一、　选择题（每小题 3 分，共 36 分）

1. 下列实数中是无理数的是　（　）

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt{4}$　　（C）$\dfrac{1}{3}$　　（D）3.14

2. 如图 1.1.1，直线 $l_1 \parallel l_2$，$\angle 1 = 55^\circ$，$\angle 2 = 65^\circ$，则 $\angle 3$ 为　（　）

（A）50°　　（B）55°　　（C）60°　　（D）65°

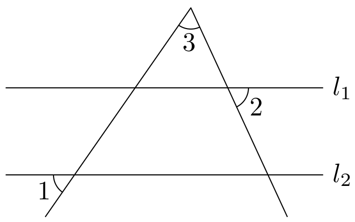


图 1.1.1

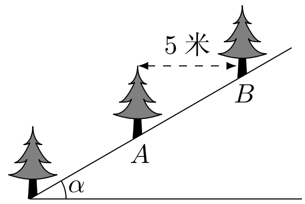


图 1.1.2

3. 为了加快 3G 网络建设，某市电信运营企业将根据各自发展规划，今年预计完成 3G 投资 2800 万元左右，将 2800 万元用科学记数法表示为多少元时，下列记法正确的是　（　）

（A）2.8×10^3　　（B）2.8×10^6　　（C）2.8×10^7　　（D）2.8×10^8

4. 下列计算正确的是　（　）

（A）$a^2 \cdot a^3 = a^6$　　（B）$a^8 \div a^4 = a^2$　　（C）$a^3 + a^2 = a^5$　　（D）$(2a^2)^3 = 8a^6$

5. 下列事件是随机事件的是　（　）

（A）在一个标准大气压下，加热到 100℃，水沸腾

（B）在一个仅装着白球和黑球的袋中摸球，摸出红球

（C）有一名运动员奔跑的速度是 30 米/秒

（D）购买一张福利彩票，中奖

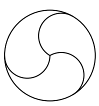
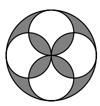
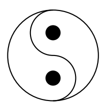
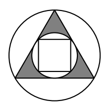
6. 若相交两圆的半径分别为 1 和 2，则此两圆的圆心距可能是　（　）

（A）1　　（B）2　　（C）3　　（D）4

7. 如图 1.1.2，幸福新村准备在坡角为 α 的山坡上栽树，要求相邻两树之间的水平距离为 5 米，那么这两树在坡面上的距离 AB（单位：米）为　（　）

（A）$5\cos\alpha$　　（B）$\dfrac{5}{\cos\alpha}$　　（C）$5\sin\alpha$　　（D）$\dfrac{5}{\sin\alpha}$

8. 下面所给图形中是中心对称图形但不是轴对称图形的是　（　）

（A）　　（B）　　（C）　　（D）

9. 2013 年春某市发生了严重干旱，该市政府号召居民节约用水。为了解居民用水情况，在某小区随机抽查了 10 户家庭的月用水量，结果如下表。

月用水量（吨）	5	6	7
户数	2	6	2

则关于这 10 户家庭的月用水量，下列说法错误的是 （ ）

（A）众数是 6　（B）极差是 2　（C）平均数是 6　（D）方差是 4

10. 某种商品零售价经过两次降价后的价格为降价前的 81%，则平均每次降价 （ ）

（A）10%　（B）19%　（C）9.5%　（D）20%

11. 下列命题错误的是 （ ）

（A）若 $a<1$，则 $(a-1)\sqrt{\dfrac{1}{1-a}}=-\sqrt{1-a}$

（B）若 $\sqrt{(3-a)^2}=a-3$，则 $a\geqslant 3$

（C）依次连接菱形各边中点得到的四边形是矩形

（D）$\sqrt{81}$ 的算术平方根是 9

12. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 $(-2,0)$，$(x_1,0)$，且 $1<x_1<2$，与 y 轴的正半轴的交点在 $(0,2)$ 的下方，下列结论：① $4a-2b+c=0$；② $a<b<0$；③ $2a+c>0$；④ $2a-b+1>0$。其中正确结论的个数是 （ ）

（A）1 个　（B）2 个　（C）3 个　（D）4 个

二、 填空题（每小题 3 分，共 15 分）

13. 如图 1.1.3，点 B、F、C、E 在同一条直线上，点 A、D 在直线 BE 的两侧，$AB\parallel DE$，$BF=CE$，请添加一个适当的条件________，使得 $AC=DF$。

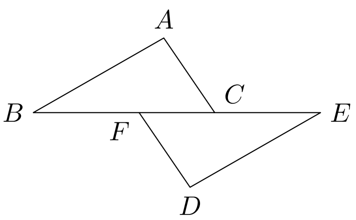


图 1.1.3

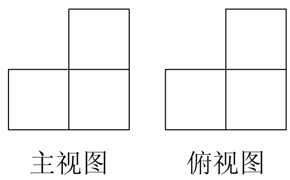


图 1.1.4

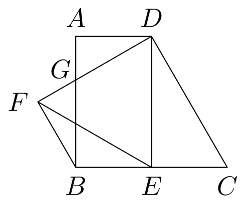


图 1.1.5

14. 某校组织开展了“文明从我做起”的知识竞赛，共有 20 道题。答对一题记 10 分，答错（或不答）一题记 -5 分。小明参加本次竞赛得分要超过 100 分，他至少要答对________道题。

15. 关于 x 的分式方程 $\dfrac{m}{x-1}+\dfrac{3}{1-x}=1$ 的解为正数，则 m 的取值范围是________。

16. 一个几何体由一些大小相同的小正方体组成，如图 1.1.4 是它的主视图和俯视图，那么组成该几何体所需小正方体的个数最少为________。

17. 如图 1.1.5，在直角梯形 $ABCD$ 中，$AD\parallel BC$，$\angle ABC=90^\circ$，$\angle C=60^\circ$，$BC=2AD=2\sqrt{3}$，点 E 是 BC 边的中点，$\triangle DEF$ 是等边三角形，DF 交 AB 于点 G，则 $\triangle BFG$ 的周长为________。

三、 解答题（共 69 分）

18. （本题满分 5 分）已知正比例函数 $y = 2x$ 的图象与反比例函数 $y = \dfrac{k}{x}$ 的图象有一个交点的纵坐标是 2。

（1）求反比例函数的解析式；

（2）当 $-3 \leqslant x \leqslant -1$ 时，求反比例函数 y 的取值范围。

19. （本题满分 6 分）先化简，再求值：$\left(\dfrac{x^2}{x-2} - \dfrac{4}{x-2}\right) \times \dfrac{1}{x^2+2x}$，其中 $x = \dfrac{1}{4}$。

20. 2013 年 7 月 1 日是香港回归 16 周年纪念日，某市各单位都举行了“迎回归，献歌舞”活动。某中学将参加本校预赛选手的成绩（满分为 100 分，得分为整数，最低分为 80 分，且无满分）分成四组，并绘制了如下的统计图（图 1.1.6），请根据统计图的信息解答下列问题。

（1）参加本校预赛选手共________人；

（2）参加预赛选手成绩的中位数所在组的范围是________；

（3）成绩在 94.5 分以上的预赛选手中，男生和女生各占一半。学校从中随机确定 2 名参加市“迎回归，献歌舞”活动，则恰好是一名男生和一名女生的概率为________。

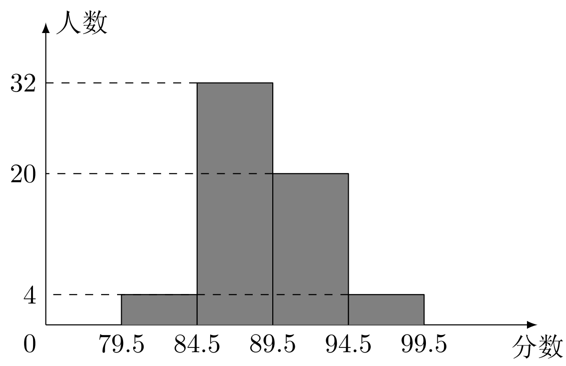


图 1.1.6

21. 如图 1.1.7，在四边形 $ABCD$ 中，E 是 BA 延长线上一点，连接 EC，交 AD 于 F 点，若 EC 平分 $\angle BCD$，且 $BE = BC$，$BA = CD$，求证：$BA = FD$。

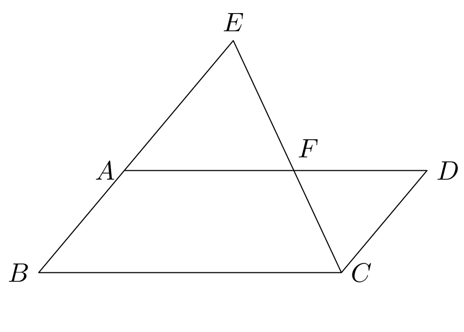


图 1.1.7

22. 如图 1.1.8，在平面直角坐标系中，$\triangle ABC$ 的顶点坐标是 $A(-7,1)$，$B(1,1)$，$C(1,7)$。线段 DE 的端点坐标是 $D(7,-1)$，$E(-1,-7)$。

（1）试说明如何平移线段 AC，使其与线段 ED 重合；

（2）将 $\triangle ABC$ 绕坐标原点 O 逆时针旋转，使 AC 的对应边为 DE，请直接写出点 B 的对应点 F 的坐标；

（3）画出（2）中的 $\triangle DEF$，并和 $\triangle ABC$ 同时绕坐标原点 O 逆时针旋转 90°，画出旋转后的图形。

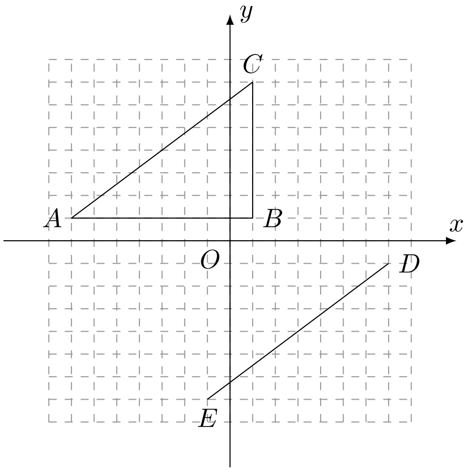


图 1.1.8

23. 如图 1.1.9，AB 为 $\odot O$ 的直径，$CD \perp AB$ 于点 E，交 $\odot O$ 于点 D，$OF \perp AC$ 于点 F。

（1）请写出三条与 BC 有关的正确结论；

（2）当 $\angle D = 30^\circ$，$BC = 1$ 时，求圆中阴影部分的面积。

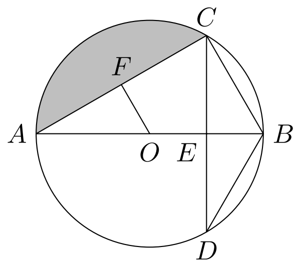


图 1.1.9

24. 为发展旅游经济，我市某景区对门票采用灵活的售票方法吸引游客。门票定价为 50 元/人，非节假日打 a 折售票，节假日按团队人数分段定价售票，即 m 人以下（含 m 人）的团队按原价售票；超过 m 人的团队，其中 m 人仍按原价售票，超过 m 人部分的游客打 b 折售票。设某旅游团人数为 x 人，非节假日购票款为 y_1（元），节假日购票款为 y_2（元）。y_1，y_2 与 x 之间的函数图象如图 1.1.10 所示。

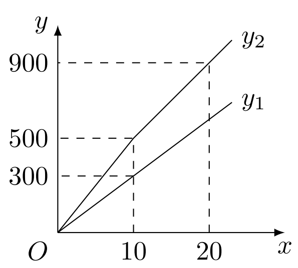


图 1.1.10

（1）观察图象可知：$a =$ ________；$b =$ ________；$m =$ ________；

（2）直接写出 y_1，y_2 与 x 之间的函数关系式；

（3）某旅行社导游王娜于 5 月 1 日带 A 团，5 月 20 日（非节假日）带 B 团都到该景区旅游，共付门票款 1900 元，A，B 两个团队合计 50 人，求 A，B 两个团队各有多少人？

25. 将 Rt$\triangle ACB$ 与正方形 $CDEF$ 如图 1.1.11 放置，$\angle ACB = 90^\circ$，A、D、E、B 在一条直线上，BC 与 EF 相交于 G 点。

（1）求证：$AD = GF$；

（2）点 P 是 DE 上的一个点，连接 PC，PG，且 $\angle PCG = 45^\circ$。

① 探究 PD，PG，FG 三条线段之间存在何数量关系，写出你的结论并证明；

② 若正方形 $CDEF$ 的边长是 6，$BE = 3$，求 $\tan\angle BPG$ 的值。

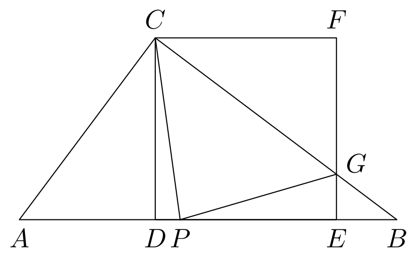


图 1.1.11

26. 如图 1.1.12，在平面直角坐标系中，O 是坐标原点，直线 $y = -\dfrac{3}{4}x + 9$ 与 x 轴，y 轴分别交于 B，C 两点，抛物线 $y = -\dfrac{1}{4}x^2 + bx + c$ 经过 B，C 两点，与 x 轴的另一个交点为点 A，动点 P 从点 A 出发沿 AB 以每秒 3 个单位长度的速度向点 B 运动，运动时间为 t（$0 < t < 5$）秒。

（1）求抛物线的解析式及点 A 的坐标；

（2）以 OC 为直径的 $\odot O'$ 与 BC 交于点 M，当 t 为何值时，PM 与 $\odot O'$ 相切？请说明理由；

（3）在点 P 从点 A 出发的同时，动点 Q 从点 B 出发沿 BC 以每秒 3 个单位长度的速度向点 C 运动，动点 N 从点 C 出发沿 CA 以每秒 $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$ 个单位长度的速度向点 A 运动，运动时间和点 P 相同。

① 记 $\triangle BPQ$ 的面积为 S，当 t 为何值时，S 最大，最大值是多少？

② 是否存在 $\triangle NCQ$ 为直角三角形的情形，若存在，求出相应的 t 值；若不存在，请说明理由。

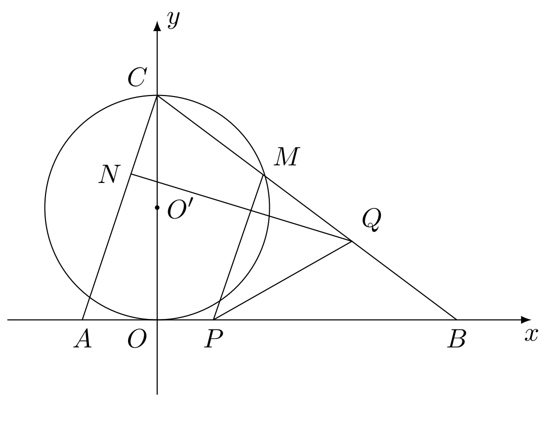


图 1.1.12

1.2 2013 年初中毕业生中考数学模拟试题参考答案——谢勇

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	A	C	C	D	D	B	B	C	D	A	D	D

二、填空题

13. 答案不唯一，如 $\angle A=\angle D$ 等　14. 14　15. $m>2$ 且 $m\neq 3$　16. 4　17. $3+\sqrt{3}$

三、解答题

18. **解**　（1）由题意，得 $2x=2$，所以 $x=1$。
将 $x=1$，$y=2$ 代入 $y=\dfrac{k}{x}$ 中，得 $k=1\times 2=2$。
所以所求反比例函数的解析式为 $y=\dfrac{2}{x}$；
（2）当 $x=-3$ 时，$y=-\dfrac{2}{3}$；当 $x=-1$ 时，$y=-2$。
因为 $2>0$，所以反比例函数在每个象限内 y 随 x 的增大而减小。
所以 $-3\leqslant x\leqslant -1$ 时，反比例函数 y 的取值范围为 $-2\leqslant y\leqslant -\dfrac{2}{3}$。 □

19. **解**　$\left(\dfrac{x^2}{x-2}-\dfrac{4}{x-2}\right)\times\dfrac{1}{x^2+2x}=\dfrac{x^2-4}{x-2}\times\dfrac{1}{x^2+2x}=\dfrac{(x+2)(x-2)}{x-2}\times\dfrac{1}{x(x+2)}=\dfrac{1}{x}$。
当 $x=\dfrac{1}{4}$ 时，原式 $=\dfrac{1}{\frac{1}{4}}=4$。 □

20. **解**　（1）60；（2）$84.5\sim 89.5$；（3）$\dfrac{2}{3}$。 □

21. **证明**　因为 EC 平分 $\angle BCD$，所以 $\angle BCE=\angle DCF$。
因为 $BE=BC$，所以 $\angle E=\angle BCE$，所以 $\angle DCF=\angle E$，所以 $BE\parallel CD$，即 $BA\parallel CD$。
又因为 $BA=CD$，所以四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $AD\parallel BC$，所以 $\angle DFC=\angle BCE$。
而 $\angle BCE=\angle DCF$，所以 $\angle DFC=\angle DCF$，所以 $FD=CD$，所以 $BA=FD$。 □

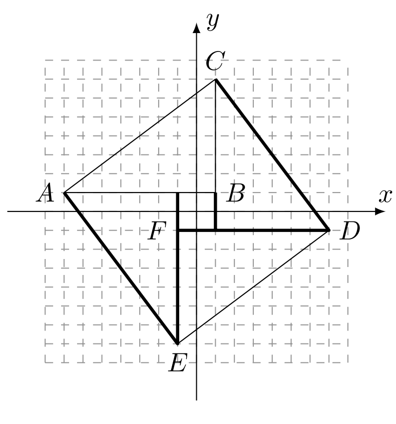


图 1.2.1

22. **解**　（1）将线段 AC 先向右平移 6 个单位，再向下平移 8 个单位（其它平移方式也可以）；
（2）根据 A，C 对应点的坐标即可得出 $F(-l,-1)$；
（3）画出如图 1.2.1 所示的正确图形。 □

23. **解**　（1）答案不唯一，只要合理均可。例如：

① $BC=BD$；② $OF\parallel BC$；③ $\angle BCD=\angle A$；④ $\triangle BCE\sim\triangle OAF$；⑤ $BC^2=BE\cdot AB$；⑥ $BC^2=CE^2+BE^2$；⑦ $\triangle ABC$ 是直角三角形；⑧ $\triangle BCD$ 是等腰三角形；等等。

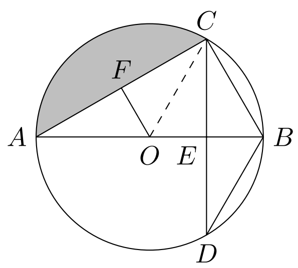


图 1.2.2

（2）如图 1.2.2，连接 OC，则 $OC=OA=OB$。

因为 $\angle D=30^\circ$，所以 $\angle A=\angle D=30^\circ$，所以 $\angle AOC=120^\circ$。

因为 AB 为 $\odot O$ 的直径，所以 $\angle ACB=90^\circ$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$BC=1$，所以 $AB=2$，$AC=\sqrt{3}$。

因为 $OF\perp AC$，所以 $AF=CF$。

因为 $OA=OB$，所以 OF 是 $\triangle ABC$ 的中位线，所以 $OF=\dfrac{1}{2}BC=\dfrac{1}{2}$。

所以 $S_{\triangle AOC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot OF=\dfrac{1}{2}\times\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$，$S_{扇形AOC}=\dfrac{1}{3}\pi\times OA^2=\dfrac{\pi}{3}$。

所以 $S_{阴影}=S_{扇形AOC}-S_{\triangle AOC}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$。 □

24. **解**　（1）$a=6$；$b=8$；$m=10$；

（2）$y_1=30x$；$y_2=\begin{cases}50x, & 0\leqslant x\leqslant 10,\\ 40x+100, & x>10。\end{cases}$

（3）设 A 团有 n 人，则 B 团有 $50-n$ 人。

当 $0\leqslant n\leqslant 10$ 时，$50n+30(50-n)=1900$。解之，得 $n=20$，这与 $n\leqslant 10$ 矛盾。

当 $n>10$ 时，$40n+100+30(50-n)=1900$。解之，得 $n=30$。

$50-30=20$。

答：A 团有 30 人，B 团有 20 人。 □

25. **证明**　（1）因为四边形 $CDEF$ 是正方形，所以 $CD=CF$，$\angle DCF=\angle CDE=\angle F=90^\circ$。

所以 $\angle DCG+\angle GCF=90^\circ$。又因为 $\angle ACB=\angle ACD+\angle DCG=90^\circ$，所以 $\angle ACD=\angle GCF$。

而 $\angle ADC=180^\circ-\angle CDE=90^\circ$，所以 $\angle ADC=\angle F=90^\circ$，所以 $\triangle ACD\cong\triangle GCF$，所以 $AD=GF$。

（2）① $PD+FG=PG$。

由（1）知 $\angle ACD=\angle GCF$，又 $\angle GCF+\angle DCP=\angle DCF-\angle PCG=90^\circ-45^\circ=45^\circ$，所以 $\angle ACD+\angle DCP=\angle ACP=45^\circ$。所以 $\angle ACP=\angle PCG=45^\circ$。

又由（1）知 $\triangle ACD\cong\triangle GCF$，所以 $CA=CG$，$AD=FG$。

而 $CP=CP$，所以 $\triangle ACP\cong\triangle GCP$，所以 $PA=PG$。

因为 $PA=AD+PD=FG+PD$，所以 $PD+FG=PG$。

② 方法一：因为四边形 $CDEF$ 是正方形，所以 $CF\parallel DE$，所以 $\angle FCG=\angle B$。

又因为 $\angle CGF=\angle BGE$，所以 $\triangle CGF\sim\triangle BGE$，所以 $\dfrac{CF}{BE}=\dfrac{FG}{EG}$，即 $\dfrac{6}{3}=\dfrac{FG}{6-FG}$，解得 $FG=4$。

所以 $AD=4$，$GE=EF-FG=6-4=2$。

设 $DP=x$，则 $PE=6-x$，$PG=x+4$。

在 $\mathrm{Rt}\triangle PEG$ 中，因为 $PE^2+GE^2=PG^2$，所以 $(6-x)^2+2^2=(x+4)^2$，解得 $x=1.2$。

所以 $PE=6-1.2=4.8$，所以 $\tan\angle EPG=\dfrac{GE}{PE}=\dfrac{2}{4.8}=\dfrac{5}{12}$，即 $\tan\angle BPG=\dfrac{5}{12}$。

方法二：因为 $\angle ACD+\angle DCB=\angle ACB=90^\circ$，$\angle DCB+\angle B=90^\circ$，所以 $\angle ACD=\angle B$。

又因为 $\angle ADC=\angle CDB=90^\circ$，所以 $\triangle ACD\sim\triangle CBD$，所以 $\dfrac{AD}{CD}=\dfrac{CD}{BD}$，所以 $\dfrac{AD}{6}=\dfrac{6}{6+3}$，解得 $AD=4$，所以 $FG=4$，$GE=2$。

设 $DP=x$，则 $PE=6-x$，$PG=x+4$。

接下来同方法一。 □

26. **解** （1）在 $y=-\dfrac{3}{4}x+9$ 中，令 $x=0$，得 $y=9$；令 $y=0$，得 $x=12$，所以 $(0,9)$，$B(12,0)$。

又抛物线经过 B，C 两点，所以 $\begin{cases}c=9,\\-36+12b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=\dfrac{9}{4},\\c=9,\end{cases}$ 所以 $y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{9}{4}x+9$。

于是令 $y=0$，得 $-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{9}{4}x+9=0$，解得 $x_1=-3$，$x_2=12$，所以 $A(-3,0)$。

（2）当 $t=3$ 秒时，PM 与 $\odot O'$ 相切。如图 1.2.3，连接 OM。

因为 OC 是 $\odot O'$ 的直径，所以 $\angle OMC=90^\circ$，所以 $\angle OMB=90^\circ$。

因为 $O'O$ 是 $\odot O'$ 的半径，$O'O\perp OP$，所以 OP 是 $\odot O'$ 的切线。

而 PM 是 $\odot O'$ 的切线，所以 $PM=PO$，所以 $\angle POM=\angle PMO$。

又因为 $\angle POM+\angle OBM=90^\circ$，$\angle PMO+\angle PMB=90^\circ$，所以 $\angle PMB=\angle OBM$，所以 $PM=PB$。

所以 $PO=PB=\dfrac{1}{2}OB=6$，所以 $PA=OA+PO=3+6=9$，此时 $t=3$（秒）。

所以当 $t=3$ 秒，PM 与 $\odot O'$ 相切。

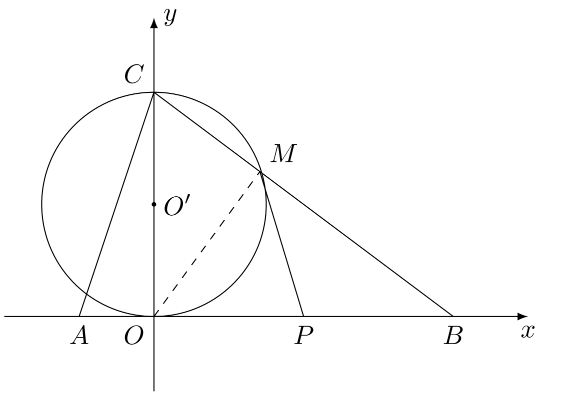


图 1.2.3

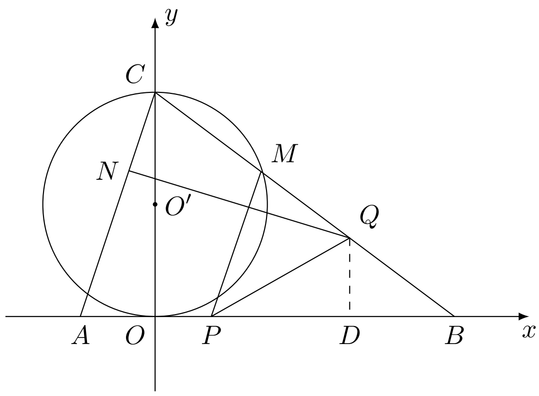


图 1.2.4

（3）① 如图 1.2.4，过点 Q 作 $QD\perp OB$ 于点 D。

因为 $OC\perp OB$，$QD\parallel OC$，所以 $\triangle BQD\sim\triangle BCO$，所以 $\dfrac{QD}{OC}=\dfrac{BQ}{BC}$。

又因为 $OC=9$，$BQ=3t$，$BC=\sqrt{OC^2+OB^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15$，所以 $\dfrac{QD}{9}=\dfrac{3t}{15}$，解得 $QD=\dfrac{9}{5}t$。

所以 $S_{\triangle BPQ}=\dfrac{1}{2}BP\cdot QD=\dfrac{1}{2}\times(15-3t)\cdot\dfrac{9}{5}t=-\dfrac{27}{10}t^2+\dfrac{27}{2}t$，即 $S=-\dfrac{27}{10}t^2+\dfrac{27}{2}t$。

即 $S=-\dfrac{27}{10}\left(t-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{135}{8}$，故当 $r=\dfrac{5}{2}$ 时，S 最大，最大值为 $\dfrac{135}{8}$。

② 存在 $\triangle NCQ$ 为直角三角形的情形。

因为 $BC=BA=15$，所以 $\angle BCA=\angle BAC$，即 $\angle NCQ=\angle CAO$。

所以 $\triangle NCQ$ 欲为直角三角形，$\angle NCQ\neq 90^\circ$，只存在 $\angle NQC=90^\circ$ 和 $\angle QNC=90^\circ$ 两种情况。

当 $\angle NQC = 90^\circ$ 时，$\angle NQC = \angle COA = 90^\circ$，$\angle NCQ = \angle CAO$，所以 $\triangle NCQ \sim \triangle CAO$，所以 $\dfrac{NC}{CA} = \dfrac{CQ}{AO}$，所以 $\dfrac{\frac{3\sqrt{10}}{5}t}{\sqrt{3^2+9^2}} = \dfrac{15-3t}{3}$，解得 $t = \dfrac{25}{6}$。

当 $\angle QNC = 90^\circ$ 时，$\angle QNC = \angle COA = 90^\circ$，$\angle QCN = \angle CAO$，所以 $\triangle QCN \sim \triangle CAO$，所以 $\dfrac{CQ}{AC} = \dfrac{NC}{OA}$，所以 $\dfrac{15-3t}{\sqrt{3^2+9^2}} = \dfrac{\frac{3\sqrt{10}}{5}t}{3}$，解得 $t = \dfrac{5}{3}$。

综上，存在 $\triangle NCQ$ 为直角三角形的情形，t 的值为 $\dfrac{25}{6}$ 和 $\dfrac{5}{3}$。 □

数学评书

2.1 《智慧宝典》第三部第七回　途中遇海盗　单招破顽敌——陈海烽

话说两位小英雄在船上揭露了庄家的阴谋后，将所得的银两还与众人。此时众人对两位英雄更是刮目相看，大家都决心正道，不再参与赌博之事。

船行过几海里，忽然看到两条小船疾速开来。只听一声大喊："停下！停下！"小船上的人很快用鹰爪钩钩住了船板，不一会儿都上了大船，两位首领长得有点相似。只听他们大叫，"转过身去，否则格杀勿论，把自己的口袋等翻出来，违者立即处死！"众人慌作一团，只有两个小英雄面无惧色，依旧我行我素。

这时两个领头的发话了："听见没有，你俩找死吗？"其中一个络腮胡子的首领说完就使出了一招。两人一看，这不就是四心老人的徒弟吗，怎么这么恶毒。说了一声，来得好！只见电光一闪是：

招式一　已知点 O 是平面上的一个定点，A，B，C 是平面上不共线的三点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)$，$\lambda\in(0,+\infty)$。则 P 点的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的　（　）

（A）外心　（B）内心　（C）重心　（D）垂心

只见小豪很快就击中这个络腮胡子的内心，顿时渗血而出。

这时旁边一个首领又朝小豪击来，只见小英上前一挡，赫然也是亮光一道剑气：

招式二　已知点 O 是平面上的一个定点，A，B，C 是平面上不共线的三点，动点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\big(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\big)$，$\lambda\in(0,+\infty)$。则 P 点的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的　（　）

（A）外心　（B）内心　（C）重心　（D）垂心

小英看得真切，神算子闪出一粒，击中此人的重心，马上跌倒在地。

其实小英与小豪知道，还要有事求助四心老人，故此留下两人性命，叫他们不再害人，就让他们滚回去。可是由于这仁慈之心，又惹出祸端，这是后话。

船上人看此情景已是目瞪口呆，稍倾掌声如潮。大家好像都受过这两个海盗之苦，纷纷向两人讨教武艺。两位小英雄知道他们可能会经常会遭到海盗的骚扰，就教给众人道：

对付那个络腮胡子的办法是：首先要看好 $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 的来头，是击败此人的关键，$\dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$，$\dfrac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ 分别为 $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ 的单位向量，剑谱如图 2.1.1 所示，设 AB' 与 AC' 是其单位向量，则根据平行四边形法则可知其和是 AD'，因为 $|AB'|=|AC'|=1$，所以 $AB'D'C'$ 是个菱形，则对角线 AD' 是 $\angle BAC$ 的角平分线，再加一点注意，就是 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$，即 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AD'}$，即可得 A、P、D' 共线，所以说点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的内心，故你要看准后可直接击中 B 部位即可。

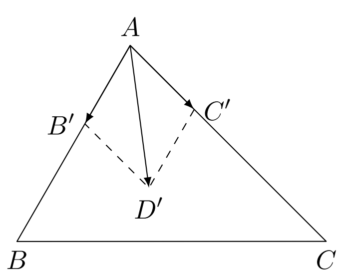


图 2.1.1

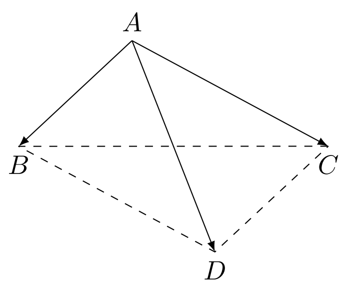


图 2.1.2

至于第二个首领的方法是与对付第一个差不多的，唯一的区别在于先遵照这个剑谱，如图 2.1.2。由向量的加法原理得 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$，又因为 $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}$，所以有 $\overrightarrow{AP}=2\lambda\overrightarrow{AD}$，故有 A、P、D 三点共线，又因

为 AD 是 $\triangle ABC$ 的中线（平行四边形的对角线互相平分，即 AD 平分 BC），故点 P 的轨迹一定通过 $\triangle ABC$ 的重心，因此就抓住他的要害部位，可知应为 C 处，这样他就立马倒地。

两位小英雄边演练边讲解，大家都认真地学习，一时间船上几乎成了武馆了。

欲知后事如何？请听下回分解。

2.2 《智慧宝典》第三部第八回　三海盗再犯　两英雄退敌——陈海烽

上回说到两位小英雄击退了两队海盗，船上都对他俩佩服得五体投地。过了一日，众人正在习武，这时只听有人又喊道："强盗又来了，强盗又来了！"大家一看，不远处又来了三拨人马，分为红、黄、蓝三队，冲着大船而来。

稍倾，一阵呐喊声，只听"嗖、嗖、嗖"三声，从红、黄、蓝三队人马中跳出三个人，问道："哪两位是伤我两兄弟的小子，请站出来！"说完将船上一分要砍过去，只见叮当几声，原来是小英将神算子拨出，震得那些人有点虎口发麻，刀失去准星。两人异口同声道："我俩便是！"

这时穿着红装那个大汉使出一招——

招式一　已知点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一个点，满足 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的　（　）

（A）外心　（B）内心　（C）重心　（D）垂心

只见小豪面带微笑，"奎星笔"出鞘，笔势如虹，只见是——

解　由 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ 可得 $\overrightarrow{OB}\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，即 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{AC}$；同理可得 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$，故为垂心。 □

这时手起笔落，击中 D 处，只见这个大汉立刻垂下一条手臂，刀掉在地了。

另外一边的身着黄色披风的大汉朝小英进来，这个大汉的使用的剑法更是简单，只见是——

招式二　已知点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一个点，满足 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的（　）

（A）外心　（B）内心　（C）重心　（D）垂心

小英一看，比昨天的那个大汉弱多了，就先招架一番，顺便叫一个最靠近的人来，递给他掉在船上的那把刀，嘱咐他说到，用刚刚教给你的方法制敌。只见那个人按照剑谱的招式如下：

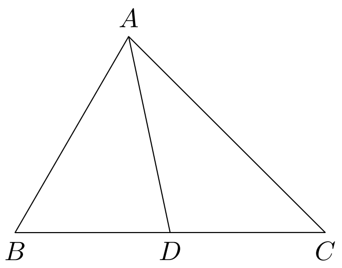


图 2.2.1

解　设 D 是 BC 的中点，根据图 2.2.1，结合向量的加法可得 $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OA}$，则 O、A、D 三点共线，且 O 是中线 AD 的三等分点（靠近 D 点），故点 O 的 $\triangle ABC$ 的重心。 □

只听"哎呀"一声，那名黄色大汉被摔了嘴啃泥，众人在旁边叫好。

本来身着蓝色的大汉在一旁观战，发现他的二哥倒地了，急忙出招相救，只见他的招式有点怪异——

招式三　已知点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一个点，满足 $a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}=\vec{0}$，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的　（　）

（A）外心　（B）内心　（C）重心　（D）垂心

这时小英看在眼里，这才是三人中武功最高者，也不敢小瞧，拿出神算子一拨——

解 在等式 $a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}+c\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$ 的两边分别加上 $c\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OA}$，得 $(a+b+c)\overrightarrow{OA}=b\cdot\overrightarrow{BA}+c\cdot\overrightarrow{CA}$，所以

$$\overrightarrow{OA}=\frac{bc}{a+b+c}\left(\frac{\overrightarrow{BA}}{c}+\frac{\overrightarrow{CA}}{b}\right),$$

故 OA 是 $\angle BAC$ 的平分线，同理可得 OB 是 $\angle ABC$ 的平分线，故 O 为 $\triangle ABC$ 的内心。 □

只见神算子到了心头，那蓝色大汉又叫了一声，知道厉害，赶快下地求饶。三人皆道："饶了我们吧，以后再也不敢做坏事了。"两位小英雄也无心取他们的性命，就放他们走了。

这时旁边有人说道，小英的最后一招与小豪昨天对付那个大汉大相似哦，两位英雄相视而笑。又教了众人一招：点 O 是 $\triangle ABC$ 所在平面上的一个点，满足 $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$，则点 O 是 $\triangle ABC$ 的外心。有不少头脑反应快的早就知道这是怎么一回事了，列位看官，你知道吗？

欲知还会发生什么事件，请听下回分解。

助力高考

3.1 ab1962 解题集精选（十三）——廖凡

本期的题目及解答是由历任版主 ab1962 的网上解题集的第 601 ∼ 650 题中精选出，仍然由 kuing 作选题、排版及评注，更多说明请参看《数学空间》总第 1 期。[1]

题目 3.1.1. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n=\dfrac{n-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}$，求 $\{a_n\}$ 的最大最小项。

解

$$a_n=\frac{n-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}=\frac{n-\sqrt{98}+\sqrt{98}-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}=1+\frac{\sqrt{98}-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}。$$

当 $n\geqslant 10$ 时，$a_n>1$ 且 a_n 递减，故 $1<a_n\leqslant a_{10}$；
当 $n\leqslant 9$ 时，$a_n<1$ 且 a_n 递减，故 $a_9\leqslant a_n<1$。
于是 $a_9\leqslant a_n\leqslant a_{10}$，所以最大项为 a_{10}，最小项为 a_9。 □

题目 3.1.2. 已知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 是空间的一个单位正交基底，向量 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}$ 是空间的另一个基底。若向量 $\vec{p}$ 在基底 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 下的坐标为 $(1,2,3)$，求 $\vec{p}$ 在基底 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}$ 下的坐标。

解 因为 $\vec{p}$ 在基底 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ 下的坐标是 $(1,2,3)$，所以 $\vec{p}=1\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}$。

设 $\vec{p}$ 在基底 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}$ 下的坐标是 (x,y,z)，则

$$\vec{p}=x(\vec{a}+\vec{b})+y(\vec{a}-\vec{b})+z\vec{c}=(x+y)\vec{a}+(x-y)\vec{b}+z\vec{c}，$$

故 $x+y=1$, $x-y=2$, $z=3$，解得 $x=\dfrac{3}{2}$, $y=-\dfrac{1}{2}$, $z=3$，故 $\vec{p}$ 在基底 $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{c}$ 下的坐标是 $\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},3\right)$。 □

题目 3.1.3. 以椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$（$a>1$）的短轴的一个端点 $B(0,1)$ 为直角顶点，作椭圆的内接等腰直角三角形 ABC。问：这样的三角形是否存在？如果存在，最多有几个？

解 假设存在，设其中一腰所在的直线方程为 $y=kx+1$（$k>0$），则另一腰所在的直线方程为 $y=-\dfrac{1}{k}x+1$。

联立 $y=kx+1$ 与 $\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$，消 y 得

$$\frac{x^2}{a^2}+k^2x^2+2kx=0，$$

解得

$$x_1=0，x_2=-\frac{2a^2k}{1+a^2k^2}，$$

此腰长为

$$\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2a^2k}{1+a^2k^2}，$$

则另一腰长为

$$\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot\frac{2a^2\cdot\dfrac{1}{k}}{1+\dfrac{a^2}{k^2}}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2a^2}{k^2+a^2}，$$

[1] 上一期的《ab1962 解题集精选（十二）》中忘记贴上相应的此段，抱歉。

于是应有

$$\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2a^2k}{1+a^2k^2}=\sqrt{1+k^2}\cdot\frac{2a^2}{k^2+a^2},$$

即

$$\frac{k}{1+a^2k^2}=\frac{1}{k^2+a^2},$$

$$k^3-1+a^2(k-k^2)=0,$$

$$(k-1)(k^2+k+1-ka^2)=0,$$

故 $k=1$ 或

$$k^2+(1-a^2)k+1=0, \tag{3.1.1}$$

式 (3.1.1) 关于 k 的判别式为

$$\Delta=(a^2-1)^2-4=(a^2-3)(a^2+1)。$$

（1）当 $1<a<\sqrt{3}$ 时，式 (3.1.1) 无实根，故此时这样的三角形只有一个；

（2）当 $a=\sqrt{3}$ 时，式 (3.1.1) 化为 $(k-1)^2=0$，仍解得 $k=1$，故此时这样的三角形还是只有一个；

（3）当 $a>\sqrt{3}$ 时，式 (3.1.1) 有两个不相等的实数根，易知它们都是正的，且都不为 1，故此时这样的三角形有三个。 □

kuing 评注：原解答后面的讨论有误，此处已修正。

题目 3.1.4. 一条倾斜角为 60° 的直线过椭圆左焦点 F 与椭圆交于 A、B 两点，若 FA 的长度是 FB 的长度的 2 倍，求椭圆的离心率。

解 设该椭圆的离心率为 e，因 $|FA|=2|FB|$，可设 $|FB|=t$，$|FA|=2t$，$t>0$。

设椭圆的左准线为 l，作 $AA_1\perp l$，$BB_1\perp l$，$BD\perp AA_1$ 于 D，如图 3.1.1 所示。

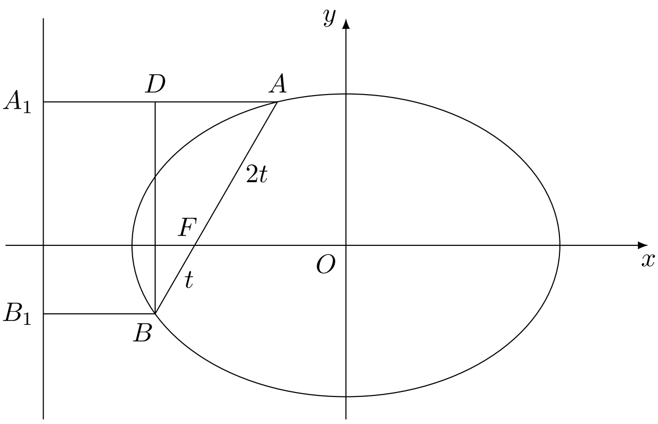


图 3.1.1

则 $|AA_1|=\dfrac{2t}{e}$，$|BB_1|=\dfrac{t}{e}$，于是 $|AD|=\dfrac{2t}{e}-\dfrac{t}{e}=\dfrac{t}{e}$。

因 $\angle A=\angle AFO=60°$，故 $|AB|=2|AD|$，于是 $3t=\dfrac{2t}{e}$，即 $e=\dfrac{2}{3}$。 □

题目 3.1.5. 已知平面上两抛物线准线相互垂直，且两抛物线相交于 A，B，C，D 四点，问 A，B，C，D 四点的关系。

解 不妨设其中一条为 $y^2=2px$，则另一条为 $(x-h)^2=2p_1(y-k)$。若这两条曲线有四个交点，则这四点必在圆 $y^2-2px+(x-h)^2-2p_1(y-k)=0$ 上，即四个交点共圆。 □

题目 3.1.6. 平面上有两直线 l_1, l_2，倾斜角分别为 $150^\circ, 30^\circ$，若 l_1, l_2 上分别有动点 A, B 且 $|AB| = 2\sqrt{3}$，点 M 为 AB 的中点，求 M 的轨迹。

解 不妨设 l_1, l_2 的方程分别为 $x = \pm\sqrt{3}y$，则 $x_A = -\sqrt{3}y_A, x_B = \sqrt{3}y_B$。

设 $M(x, y)$，则 $x_A + x_B = 2x$，$y_A + y_B = 2y$，由 $|AB| = 2\sqrt{3}$ 得

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 = 12,$$

因 $x_A = -\sqrt{3}y_A, x_B = \sqrt{3}y_B$，故

$$x_B - x_A = \sqrt{3}(y_B + y_A) = 2\sqrt{3}y,$$
$$y_B - y_A = \frac{1}{\sqrt{3}}(x_B + x_A) = \frac{2x}{\sqrt{3}},$$

代入化简得

$$\frac{x^2}{9} + y^2 = 1,$$

即为所求。 □

kuing 评注：还可以用平面几何方法去做，如图 3.1.2 所示，设 l_1 与 l_2 相交于 O，作 $\triangle AOB$ 的外接圆，过 M 作 AB 的垂线交外接圆于 C、D，连结 OC、OD。

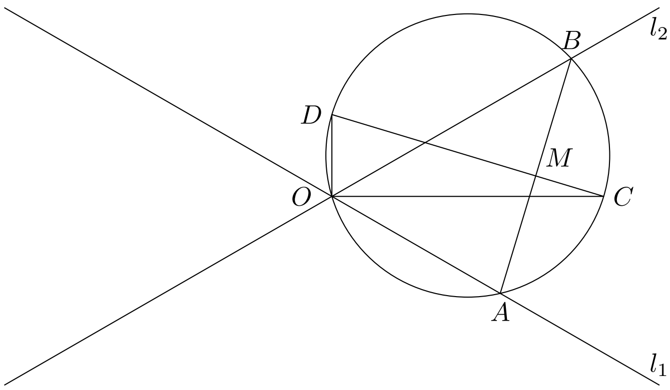


图 3.1.2

因为 M 为 AB 中点，故 CD 为圆的直径，这样便得到 $OC \perp OD$，而且由垂径定理可知 OC、OD 在 l_1 与 l_2 构成的两夹角的平分线上。

由正弦定理有

$$CD = 2R = \frac{AB}{\sin\angle AOB} = \frac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = 4,$$

由此也不难得到 $MC = 1, MD = 3$。

综上可见，问题等价于：长为 4 的线段 CD 两端分别在 l_1 与 l_2 构成的两夹角的平分线上滑动，线段内点 M 满足 $DM = 3MC$，求 M 的轨迹。

这样转化出来的问题就简单多了，设 M 到 OD、OC 的距离分别为 x、y，易见 $x = DM\cos\angle C$，$y = CM\sin\angle C$，从而得到 $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$。

值得一提的是，这种方法还适用于更一般的情形，即使将定长 AB 及其中点 M 换成给定形状的 $\triangle ABM$，同样可以作外接圆及类似的辅助线，转化为那种简单情形，读者不妨试试。

题目 3.1.7. 设函数 $y = \sin[\arccos(x - \pi)]$ 的图象与 x 轴交于 A、B 两点，C 是其图象上任意一点，且 $CD \perp AB$，垂足为 D，求 $|CA| + |CB| + |CD|$ 的最大值。

解 先求 $y=\sin[\arccos(x-\pi)]$ 的定义域，由 $-1\leqslant x-\pi\leqslant 1$ 得定义域为 $[\pi-1,\pi+1]$。

因 $0\leqslant \arccos(x-\pi)\leqslant\pi$，故

$$y=\sin[\arccos(x-\pi)]=\sqrt{1-\cos^2[\arccos(x-\pi)]}=\sqrt{1-(x-\pi)^2},$$

即

$$(x-\pi)^2+y^2=1\text{（}y\geqslant 0\text{），}$$

它的图象是半圆，如图 3.1.3 所示。

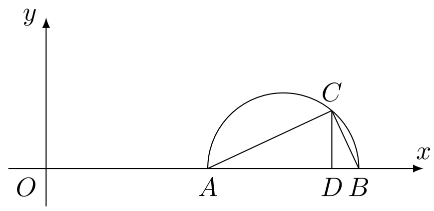


图 3.1.3

故 $|CA|^2+|CB|^2=4$，$|CD|=\dfrac{1}{2}|CA|\cdot|CB|$，所以

$$\begin{aligned}|CA|+|CB|+|CD|&=|CA|+|CB|+\frac{1}{2}|CA|\cdot|CB|\\&\leqslant\sqrt{2(|CA|^2+|CB|^2)}+\frac{1}{4}(|CA|^2+|CB|^2)\\&=2\sqrt{2}+1,\end{aligned}$$

当且仅当 $|CA|=|CB|=\sqrt{2}$ 时上式取等号，故 $|CA|+|CB|+|CD|$ 最大值是 $2\sqrt{2}+1$。 □

题目 3.1.8. 已知 $a,b>0$，求证

$$\sqrt{\frac{a}{3a+b}}+\sqrt{\frac{b}{3b+a}}\leqslant 1\leqslant\sqrt{\frac{b}{3a+b}}+\sqrt{\frac{a}{3b+a}}。$$

证明

$$\left(\sqrt{\frac{a}{3a+b}}+\sqrt{\frac{b}{3b+a}}\right)^2\leqslant 2\left(\frac{a}{3a+b}+\frac{b}{3b+a}\right)=\frac{2(a^2+b^2+6ab)}{3a^2+10ab+3b^2},$$

因 $3a^2+10ab+3b^2-2(a^2+6ab+b^2)=(a-b)^2$，故

$$\frac{2(a^2+b^2+6ab)}{3a^2+10ab+3b^2}\leqslant 1,$$

因此左边成立；

要证

$$\sqrt{\frac{b}{3a+b}}+\sqrt{\frac{a}{3b+a}}\geqslant 1,$$

只要证

$$\frac{b}{3a+b}+\frac{a}{3b+a}+2\sqrt{\frac{b}{3a+b}}\sqrt{\frac{a}{3b+a}}\geqslant 1,$$

只要证

$$2\sqrt{\frac{b}{3a+b}}\sqrt{\frac{a}{3b+a}}\geqslant 1-\frac{b}{3a+b}-\frac{a}{3b+a}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{(3a^2+3b^2+10ab)-(3b^2+3a^2+2ab)}{(3a+b)(3b+a)}\\
&=\frac{8ab}{(3a+b)(3b+a)},
\end{aligned}
$$

即证

$$\sqrt{(3a+b)(3b+a)}\geqslant 4\sqrt{ab}\iff (a-b)^2\geqslant 0,$$

因此右边成立。 □

kuing 评注：原解答最后一步有误，此处已修正。这题虽然有根号，但是毕竟是二元齐次对称，所以玩法肯定还有很多，比较简洁的可以像这样

$$\left(\sqrt{\frac{a}{3a+b}}+\sqrt{\frac{b}{3b+a}}\right)^2\leqslant 2\left(\frac{a}{3a+b}+\frac{b}{3b+a}\right)\leqslant\frac{a}{2}\left(\frac{1}{2a}+\frac{1}{a+b}\right)+\frac{b}{2}\left(\frac{1}{2b}+\frac{1}{a+b}\right)=1,$$

这样就得到左边；而右边由

$$\left(\sqrt{\frac{b}{3a+b}}+\sqrt{\frac{a}{3b+a}}\right)^2\left(b^2(3a+b)+a^2(3b+a)\right)\geqslant(a+b)^3,$$

立得。注意这里虽然用了柯西和 Hölder 不等式，但其实都可以改写成用均值来证，不过没必要这样做。

3.2 2013 届高三一检把关小题的解法集锦——张培强

一年一度的高考，万千模拟的等待。本文整理 2013 年江苏省各市高三第一次质量检测中的第 14 题（把关小题），进行了多解探讨，供大家参考。

题目 3.2.1. （徐州市）如图 3.2.1，在等腰三角形 ABC 中，已知 $AB=AC=1$，$A=120°$，E，F 分别是边 AB，AC 上的点，且 $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AC}$，其中 $m,n\in(0,1)$，若 EF，BC 的中点分别为 M，N，且 $m+4n=1$，则 $\left|\overrightarrow{MN}\right|$ 的最小值为________。

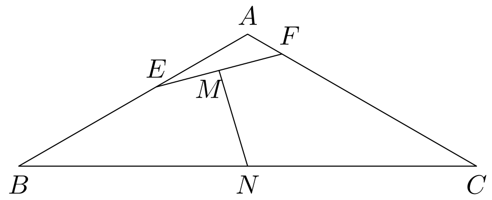


图 3.2.1

解析 1 在 $\triangle AMN$ 中，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$；在 $\triangle AEF$ 中，$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})$；在 $\triangle ABC$ 中，$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$。所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})-\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF})=\frac{1}{2}\left[(1-m)\overrightarrow{AB}+(1-n)\overrightarrow{AC}\right]$，又 $m+4n=1$，所以 $4n=1-m$，即

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left[4n\overrightarrow{AB}+(1-n)\overrightarrow{AC}\right],$$

所以

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{MN}\right|&=\frac{1}{2}\sqrt{16n^2\overrightarrow{AB}^2+(1-n)^2\overrightarrow{AC}^2+8n(1-n)\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{16n^2+(1-n)^2-4n(1-n)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{21n^2-6n+1}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{21\left(n-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{4}{7}},\end{aligned}$$

所以，当 $n=\frac{1}{7}$ 时，$\left|\overrightarrow{MN}\right|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$。 □

解析 2 在四边形 $BNME$ 中，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BN}$；在四边形 $CNMF$ 中，$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CN}$。

所以 $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC}$，即 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{FC})$，又 $\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AC}$，所以 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left[(1-m)\overrightarrow{AB}+(1-n)\overrightarrow{AC}\right]$，下同解析 1。 □

解析 3 选取 $\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{BC}$ 作为一组基底，则有

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}&=\overrightarrow{ME}+\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BN}\\&=\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\\&=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AF})+\overrightarrow{EB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\\&=\frac{1}{2}(m\overrightarrow{AB}-n\overrightarrow{AC})+(1-m)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}(1-m)\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(1-n)\overrightarrow{AC},$$

下同解析 1。 □

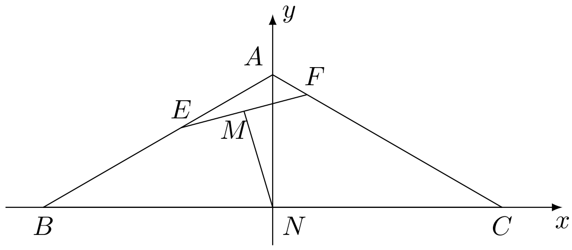


图 3.2.2

解析 4 以 N 为原点，BC 所在直线为 x 轴，建立如图 3.2.2 所示的平面直角坐标系 xNy，则 $A\left(0,\frac{1}{2}\right)$，$B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$。

由题意得，$\overrightarrow{AE}=m\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}m,-\frac{1}{2}m\right)$，$\overrightarrow{AF}=n\overrightarrow{AC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}n,-\frac{1}{2}n\right)$，所以 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}(m-n),\frac{m+n-2}{4}\right)$，所以

$$\begin{aligned}\left|\overrightarrow{MN}\right|&=\frac{1}{2}\sqrt{3(m-n)^2+(m+n-2)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{3(1-5n)^2+(3n+1)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{84n^2-24n+4}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{21\left(n-\frac{1}{7}\right)^2+\frac{4}{7}},\end{aligned}$$

所以，当 $n=\frac{1}{7}$ 时，$\left|\overrightarrow{MN}\right|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{7}}{7}$。 □

题目 3.2.2. （**苏州市**）已知向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 满足 $|\vec{a}|=1$，$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=0$，则 $\left|\vec{b}\right|$ 的最小值为________。

解析 1 设 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 的夹角为 θ，则 $\cos\theta\in[-1,1]$，所以

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=\vec{a}^2-2\vec{b}^2-\vec{a}\cdot\vec{b}=1-2\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{b}\right|\cos\theta=0,$$

即

$$2\left|\vec{b}\right|^2+\left|\vec{b}\right|\cos\theta-1=0,$$

解得

$$\left|\vec{b}\right|=\frac{-\cos\theta+\sqrt{\cos^2\theta+8}}{4},$$

令 $f(t)=\frac{-t+\sqrt{t^2+8}}{4}$，则 $f'(t)=\frac{1}{4}\left(-1+\frac{t}{\sqrt{t^2+8}}\right)=\frac{t-\sqrt{t^2+8}}{4\sqrt{t^2+8}}<0$ 恒成立，所以 $f(t)$ 在 $[-1,1]$ 上是单调减函数，所以 $f(t)\geqslant f(1)=\frac{1}{2}$，即 $\left|\vec{b}\right|$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$。 □

解析 2　如图 3.2.3，在平面直角坐标系 xOy 中，设 $\vec{a}=(1,0)$，$\vec{b}=(x,y)$，则 $\vec{a}+\vec{b}=(x+1,y)$，$\vec{a}-2\vec{b}=(1-2x,-2y)$，所以

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=(x+1)(1-2x)-2y^2=-2x^2-2y^2-x+1=0,$$

即

$$\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{9}{16},$$

可得 $x\in\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，而 $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x}$，所以当 $x=\frac{1}{2}$ 时，$\left|\vec{b}\right|$ 有最小值 $\frac{1}{2}$。 □

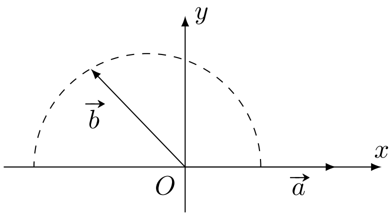


图 3.2.3

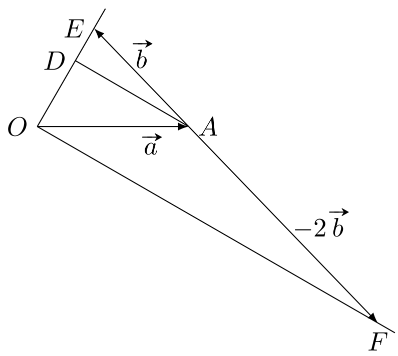


图 3.2.4

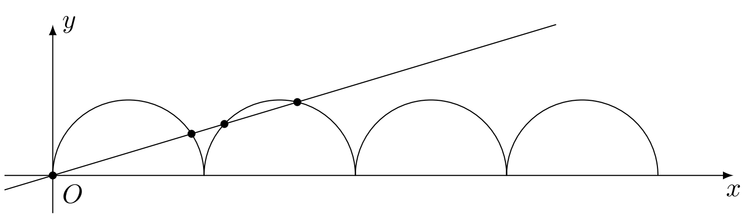
解析 3　如图 3.2.4，作 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，过点 O 作两条互相垂直的射线 OE，OF，设 $\overrightarrow{OE}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{OF}=\vec{a}-2\vec{b}$，连接 EF，则 $\overrightarrow{AE}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AF}=-2\vec{b}$，则在 $\triangle OEF$ 中，$AF=2AE$，过 A 作 $AD\perp OE$ 于点 D，则 $OD=2DE$。

所以 $\left|\vec{b}\right|^2=AE^2=AD^2+DE^2=OA^2-OD^2+DE^2=1-\frac{3}{4}OD^2$，在 $\mathrm{Rt}\triangle OAD$ 中，$0\leqslant OD\leqslant 1$，所以当 $OD=1$ 时，$\left|\vec{b}\right|$ 有最小值 $\frac{1}{2}$。 □

kuing 注：其实只有解析 1 才是完全正确的，因为题目并没有表明各向量的维数。

题目 3.2.3.（南京、盐城市）已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-(x-1)^2}, & 0\leqslant x<2,\\ f(x-2), & x\geqslant 2,\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)=kx$（$k>0$）有且只有四个根，其最大根为 t，则函数 $g(t)=\frac{25}{24}t^2-6t+7$ 的值域为________。

分析　当 $x\geqslant 2$ 时，$f(x)=f(x-2)$，表示函数 $f(x)$ 的图象在 y 轴右侧以 2 为周期重复出现，而 $0\leqslant x<2$ 时，$y=\sqrt{1-(x-1)^2}$，即 $(x-1)^2+y^2=1$，图象为圆的一半（上半部），作出示意图：



易知，直线 $y=kx$ 与从左到右的前两个半圆相交成四个交点，取临界位置：

与第二个半圆相切时，$\begin{cases}(x-3)^2+y^2=1,\\ y=kx,\end{cases}$ 解 $\frac{3k}{\sqrt{1+k^2}}=1$ 得 $k=\frac{\sqrt{2}}{4}$；

与第三个半圆相切时，$\begin{cases}(x-5)^2+y^2=1, \\ y=kx,\end{cases}$ 解 $\dfrac{5k}{\sqrt{1+k^2}}=1$ 得 $k=\dfrac{\sqrt{6}}{12}$。

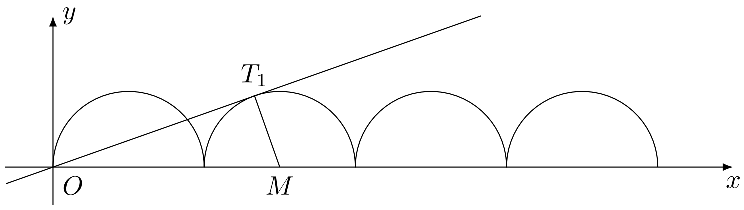
所以 $\dfrac{\sqrt{6}}{12}<k<\dfrac{\sqrt{2}}{4}$。

解析 1 解 $\begin{cases}(x-3)^2+y^2=1, \\ y=kx,\end{cases}$ 得 $t=\dfrac{3+\sqrt{1-8k^2}}{1+k^2}$，确定其单调性，在 $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{12},\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ 内单调减，所以 $\dfrac{8}{3}<t<\dfrac{72+8\sqrt{6}}{25}$，即 $\dfrac{72}{25}-\dfrac{16}{75}<t<\dfrac{72}{25}+\dfrac{8\sqrt{6}}{25}$。

考虑函数 $g(t)=\dfrac{25}{24}t^2-6t+7$ 的对称轴为 $t_0=\dfrac{72}{25}$，则可得所求值域为 $\left[-\dfrac{41}{25},-1\right)$。 □

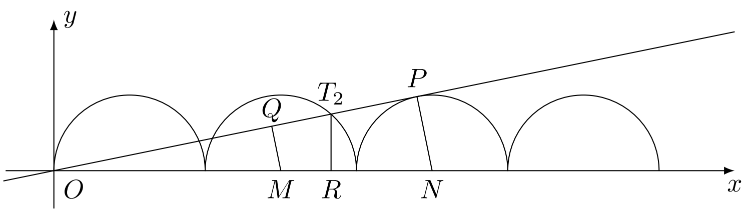
解析 2 考虑运动过程中，直线 $y=kx$ 顺时针旋转使得 t 从小到大变化。

与第二个半圆相切时：



在 $\mathrm{Rt}\triangle OMT_1$ 中，$OM=3$，$MT_1=1$，$OT_1=2\sqrt{2}$，$x_{T_1}=\dfrac{OT_1^2}{OM}=\dfrac{8}{3}$；

与第三个半圆相切时：



考虑 $\mathrm{Rt}\triangle OPN\sim\mathrm{Rt}\triangle OQM$，则 $QM=\dfrac{3}{5}$，所以 $QT_2=\dfrac{4}{5}$，$OQ=\dfrac{6\sqrt{6}}{5}$。

考虑 $\mathrm{Rt}\triangle ORT_2\sim\mathrm{Rt}\triangle OQM$，有 $x_{T_2}=\dfrac{OQ\cdot OT_2}{OM}=\dfrac{72+8\sqrt{6}}{25}$。

所以 $\dfrac{8}{3}<t<\dfrac{72+8\sqrt{6}}{25}$，下同解析 1。 □

解析 3 （求直线与圆的交点）考虑运动过程中，直线 $y=kx$ 顺时针旋转使得 t 从小到大变化。解 $\begin{cases}(x-3)^2+y^2=1, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x,\end{cases}$ 得 $t=\dfrac{8}{3}$；解 $\begin{cases}(x-3)^2+y^2=1, \\ y=\dfrac{\sqrt{6}}{12}x,\end{cases}$ 消去 y 并整理得 $\dfrac{25}{24}x^2-6x+8=0$，即 $\dfrac{25}{24}x^2-6x+7=-1$，又 $g\left(\dfrac{8}{3}\right)=-\dfrac{43}{27}<-1$，则可得值域为 $\left[-\dfrac{41}{25},-1\right)$。 □

题目 3.2.4. **（镇江市）**已知 x，y 为正数，则 $\dfrac{x}{2x+y}+\dfrac{y}{x+2y}$ 的最大值为________。

解析 1

$$\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}=\frac{x(x+2y)+y(2x+y)}{(2x+y)(x+2y)}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{x^2+y^2+4xy}{2x^2+2y^2+5xy}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{xy}{x^2+y^2+\frac{5}{2}xy}\\
&=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{5}{2}}\\
&\leqslant\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2+\frac{5}{2}}\\
&=\frac{2}{3},
\end{aligned}
$$

当且仅当 $x=y$ 时取等。 □

解析 2 设

$$S=\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}=\frac{x\left(x+2y\right)+y\left(2x+y\right)}{\left(2x+y\right)\left(x+2y\right)}=\frac{x^2+y^2+4xy}{2x^2+2y^2+5xy},$$

则

$$\left(1-2S\right)x^2+\left(1-2S\right)y^2+\left(4-5S\right)xy=0,$$

即

$$\left(1-2S\right)\frac{x}{y}+\left(1-2S\right)\frac{y}{x}+\left(4-5S\right)=0,$$

显然 $S\neq\frac{1}{2}$，则

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{4-5S}{1-2S}=0,$$

令 $\frac{x}{y}=t$，则

$$t^2+\frac{4-5S}{1-2S}t+1=0$$

有正数解，所以

$$\begin{cases}\Delta=\left(\frac{4-5S}{1-2S}\right)^2-4\geqslant 0,\\ \frac{4-5S}{1-2S}<0,\end{cases}$$

即 $\frac{4-5S}{1-2S}\leqslant -2$，解得 $\frac{1}{2}<S\leqslant\frac{2}{3}$，即 $\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}$ 的最大值为 $\frac{2}{3}$。 □

解析 3

$$\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}=\frac{1}{2+\frac{y}{x}}+\frac{1}{\frac{x}{y}+2},$$

考虑函数 $f\left(t\right)=\frac{1}{2+t}+\frac{1}{\frac{1}{t}+2}$，求导得

$$f'\left(t\right)=-\frac{1}{\left(2+t\right)^2}+\frac{1}{\left(1+2t\right)^2}=\frac{3-3t^2}{\left(2+t\right)^2\left(1+2t\right)^2},$$

列表得：

t	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(t)$	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

所以当 $t=1$，即 $x=y$ 时，$f(t)_{\max}=f(1)=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$。 □

解析 4 设 $2x+y=s$，$x+2y=t$，则 $x=\dfrac{2s-t}{3}$，$y=\dfrac{2t-s}{3}$，所以

$$\frac{x}{2x+y}+\frac{y}{x+2y}=\frac{2s-t}{3s}+\frac{2t-s}{3t}=\frac{4}{3}-\frac{t}{3s}-\frac{s}{3t}\leqslant\frac{2}{3},$$

当且仅当 $t=s$，即 $x=y$ 时取等。 □

kuing 注：如果熟悉柯西不等式即可口算一步到位：$\dfrac{x}{2x+y}+\dfrac{y}{x+2y}\leqslant\dfrac{x}{9}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{4}{x+y}\right)+\dfrac{y}{9}\left(\dfrac{4}{x+y}+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{2}{3}$。

题目 3.2.5. （连云港市）关于 x 的不等式 $x^2-ax+2a<0$ 的解集为 A，若集合 A 中恰有两个整数，则实数 a 的取值范围是________。

分析 解不等式得 $\dfrac{a-\sqrt{a^2-8a}}{2}<x<\dfrac{a+\sqrt{a^2-8a}}{2}$，其中 $a^2-8a>0$，即 $a<0$ 或 $a>8$，记

$$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8a}}{2}=\frac{4a}{a+\sqrt{a^2-8a}},\quad x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8a}}{2}=\frac{4a}{a-\sqrt{a^2-8a}}。$$

解析 1 易知 $a^2-8a>0$，则 $a<0$ 或 $a>8$。令 $A=(x_1,x_2)$，要使 A 中恰有两个整数，则必须 $1<x_2-x_1\leqslant 3$，即 $1<\sqrt{a^2-8a}\leqslant 3$，即 $1<a^2-8a\leqslant 9$，即 $\begin{cases}a^2-8a-1>0,\\ a^2-8a-9\leqslant 0,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant a<4-\sqrt{17}$ 或 $4+\sqrt{17}<a\leqslant 9$。

当 $-1\leqslant a<4-\sqrt{17}$ 时，

$$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8a}}{2}=\frac{4a}{a+\sqrt{a^2-8a}}=\frac{4}{1-\sqrt{1-\dfrac{8}{a}}}\in\left[-2,\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right),$$

$$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8a}}{2}=\frac{4a}{a-\sqrt{a^2-8a}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-\dfrac{8}{a}}}\in\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2},1\right],$$

所以两整数解为 -1、0，因此

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-8a}}{2}<-1,\\ x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-8a}}{2}>0,\end{cases}$$

解得 $a<-\dfrac{1}{3}$，此时 $-1\leqslant a<-\dfrac{1}{3}$；

当 $4+\sqrt{17}<a\leqslant 9$ 时，

$$x_1=\frac{a-\sqrt{a^2-8a}}{2}=\frac{4a}{a+\sqrt{a^2-8a}}=\frac{4}{1+\sqrt{1-\dfrac{8}{a}}}\in\left[3,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right),$$

$$x_2=\frac{a+\sqrt{a^2-8a}}{2}=\frac{4a}{a-\sqrt{a^2-8a}}=\frac{4}{1-\sqrt{1-\dfrac{8}{a}}}\in\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2},6\right],$$

所以两整数解为 4、5，因此

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{a-\sqrt{a^2-8a}}{2}<4,\\ x_2=\dfrac{a+\sqrt{a^2-8a}}{2}>5,\end{cases}$$

解得 $a>\dfrac{25}{3}$，此时 $\dfrac{25}{3}<a\leqslant 9$。

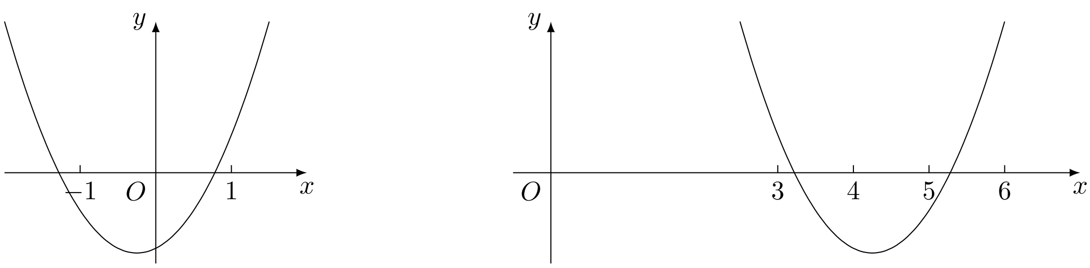
综上可知，实数 a 的取值范围是 $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right)\bigcup\left(\dfrac{25}{3},9\right]$。 □

解析 2　考虑函数 $f(x)=x^2-ax+2a$，$a<0$ 或 $a>8$。

（1）当 $a<0$ 时，对称轴 $x_0=\dfrac{a}{2}<0$，$f(0)=2a<0$，所以两整数解为 -1、0，则

$$\begin{cases}f(-2)=4+4a\geqslant 0,\\ f(-1)=1+3a<0,\\ f(1)=1+a\geqslant 0,\end{cases}$$

解得 $-1\leqslant a<-\dfrac{1}{3}$；



（2）当 $a>8$ 时，对称轴 $x_0=\dfrac{a}{2}>4$，$f(4)=16-2a<0$，所以两整数解为 4、5，则

$$\begin{cases}f(3)=9-a\geqslant 0,\\ f(5)=25-3a<0,\\ f(6)=36-4a\geqslant 0,\end{cases}$$

解得 $\dfrac{25}{3}<a\leqslant 9$。

综上可知，实数 a 的取值范围是 $\left[-1,-\dfrac{1}{3}\right)\bigcup\left(\dfrac{25}{3},9\right]$。 □

题目 3.2.6. （**常州市**）已知实数 x，y 同时满足 $4^{-x}+27^{-y}=\dfrac{5}{6}$，$\log_{27}y-\log_4x\geqslant\dfrac{1}{6}$，$27^y-4^x\leqslant 1$，则 $x+y$ 的取值范围是________。

解析 1　（等式消元）由 $4^{-x}+27^{-y}=\dfrac{5}{6}$ 可得，$4^x=\dfrac{1}{\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{27^y}}$，所以 $1\geqslant 27^y-4^x=27^y-\dfrac{1}{\dfrac{5}{6}-\dfrac{1}{27^y}}$，即 $\dfrac{5}{6}(27^y)^2-\dfrac{17}{6}\times 27^y+1\leqslant 0$，解得 $\dfrac{2}{5}\leqslant 27^y\leqslant 3$。

则 $\log_{27}\frac{2}{5}\leqslant y\leqslant\log_{27}3$，所以 $\frac{1}{6}+\log_4 x\leqslant\log_{27}y\leqslant\log_{27}(\log_{27}3)=-\frac{1}{3}$，解得 $x\leqslant\frac{1}{2}$，则 $4^x\leqslant 2$。

所以 $4^{-x}+27^{-y}\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，当且仅当 $4^x=2$，$27^y=3$，即 $x=\frac{1}{2}$，$y=\frac{1}{3}$ 时，取等。

所以 $x+y$ 的取值范围是 $\left\{\frac{5}{6}\right\}$。 □

解析 2 （不等式消元）由 $27^y-4^x\leqslant 1$ 可得，$27^y\leqslant 4^x+1$，则 $\frac{5}{6}=\frac{1}{4^x}+\frac{1}{27^y}\geqslant\frac{1}{4^x}+\frac{1}{4^x+1}$，整理得 $5\left(4^x\right)^2-7\times 4^x-6\geqslant 0$，解得 $4^x\geqslant 2$ 或 $4^x\leqslant-\frac{3}{5}$（舍），即 $x\geqslant\frac{1}{2}$。

考虑 $27^{-y}=\frac{5}{6}-4^{-x}\geqslant\frac{1}{3}$，则 $y\leqslant\frac{1}{3}$；又 $\log_{27}y-\frac{1}{6}\geqslant\log_4 x\geqslant-\frac{1}{2}$，则 $y\geqslant\frac{1}{3}$，故 $y=\frac{1}{3}$。

所以 $4^{-x}+\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$，即 $x=\frac{1}{2}$。

所以 $x+y$ 的取值范围是 $\left\{\frac{5}{6}\right\}$。 □

3.3 一定要加强命题吗——程汉波、杨春波

近年来众多文章结合具体实例指出“有些不等式问题直接证明原问题比证明其加强命题更困难”，有些共同的例子已逐渐成为加强命题的象征，似乎不加强命题便很难下手一样。然而任何一种解题方法都存在优势与不足，我们不希望神化一种而否定另一种，“加强命题”确实是解题的一把利器，但过度的强调和灌输反而使一些纯朴自然的解法淹没于无形之中，这对于学生发散思维的训练是不利的。

本文结合一些文献中论证“加强命题”优越性的实例进行反思，指出很多实例其实无需加强命题也可证明，而且在一定程度上更容易理解与掌握。

例 3.3.1. 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$，求证：当 $n \geqslant 2$ 时，有

$$a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right)。$$

分析 笔者在众多文章及著作中看到分析该不等式直接证明如何受阻，更有甚者说该题很难直接证明，进而用数学归纳法证明其加强形式 $a_n^2 > 2\left(\frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n}\right) + \frac{1}{n}$，着实巧妙。但遗憾的是很多读者被巧妙的证法震撼的同时也缺少了思考与质疑，一定要加强命题吗？真的很难直接证明吗？摆脱数学归纳法的束缚，笔者找到了一个更简洁的直接证法。

证明 由题意得，$a_{k-1} = a_k - \frac{1}{k}$（$k \geqslant 2$），$a_1 = 1$，则

$$a_k^2 - a_{k-1}^2 = a_k^2 - \left(a_k - \frac{1}{k}\right)^2 = \frac{2a_k}{k} - \frac{1}{k^2}\ （k \geqslant 2），$$

于是令 $k = 2, 3, \cdots, n$ 并累加，得

$$\begin{aligned}
a_n^2 &= \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{2a_k}{k} - \frac{1}{k^2}\right) + a_1^2 \\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{2a_k}{k} - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2} + 1 \\
&> \sum_{k=2}^{n}\frac{2a_k}{k} + 1 - \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k(k-1)} \\
&= \sum_{k=2}^{n}\frac{2a_k}{k} + \frac{1}{n} \\
&> \sum_{k=2}^{n}\frac{2a_k}{k},
\end{aligned}$$

得证。 □

例 3.3.2. （2012 年第八届北方数学奥林匹克第 6 题）设 n 是正整数，证明：

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) < 2。$$

分析 文 [1]、[2] 中均用加强命题的技巧证明了 $\left(1 + \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{3^n}\right) < 2 - \frac{1}{3^n}$，从而突破了直接使用数学归纳法难以实现从 $n = k$ 到 $n = k + 1$ 过渡的瓶颈，思路独特，令人耳目一新。但是，非加强命题不可吗？答案是否定的。为何一定要将我们的思路局限于“数学归纳法”呢？打开此思维束缚，并可得到以下四个令人赏心悦目的证明。

证明 1 原不等式等价于 $\sum\limits_{i=1}^{n}\ln\left(1+\dfrac{1}{3^i}\right)<\ln 2$，又因当 $x>-1$ 时，有 $\ln(1+x)\leqslant x$，于是

$$\sum_{i=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{3^i}\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{3^i}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{1}{2}<\ln 2,$$

得证。 □

证明 2 由 n 元均值不等式，得

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^n}\right)&<\left(\frac{1+\frac{1}{3}+1+\frac{1}{3^2}+\cdots+1+\frac{1}{3^n}}{n}\right)^n\\&=\left(\frac{n+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{n}\right)^n\\&<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n,\end{aligned}$$

又由 $\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n$ 单调递增，且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}}=\sqrt{e}$，可知

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^n}\right)<\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<\sqrt{e}<2,$$

得证。 □

证明 3 由伯努利不等式：对 $r>1$，和任意实数 $x>-1$，有 $1+rx\leqslant(1+x)^r$，则

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^n}\right)&=\left(1+3^{n-1}\cdot\frac{1}{3^n}\right)\left(1+3^{n-2}\cdot\frac{1}{3^n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\\&\leqslant\left(1+\frac{1}{3^n}\right)^{3^{n-1}}\left(1+\frac{1}{3^n}\right)^{3^{n-2}}\cdots\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\\&=\left(1+\frac{1}{3^n}\right)^{3^{n-1}+3^{n-2}+\cdots+1}\\&=\left(1+\frac{1}{3^n}\right)^{\frac{3^n-1}{2}}\\&<\left(1+\frac{1}{3^n}\right)^{\frac{3^n}{2}}\\&<\sqrt{e}\\&<2,\end{aligned}$$

得证。 □

证明 4 构造

$$f(n)=\frac{\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}{1-\frac{1}{3^n}},$$

则

$$\frac{f\left(n+1\right)}{f\left(n\right)}=\frac{\left(1+\dfrac{1}{3^{n+1}}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^{n}}\right)}{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}}=\frac{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{n+1}}-\dfrac{1}{3^{2n+1}}}{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}}<\frac{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}}=1,$$

于是 $f\left(n\right)$ 单调递减，则 $f\left(n+1\right)<f\left(n\right)<\cdots<f\left(2\right)<f\left(1\right)=2$，所以

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3^{2}}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3^{n}}\right)<2\left(1-\frac{1}{3^{n}}\right)<2,$$

得证。 □

注 （1）由上面的直接证法可知原赛题可以加强为：
设 n 是正整数，证明：$\left(1+\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3^{2}}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{3^{n}}\right)<\sqrt{e}$。
这是加强命题的证法难以发现与达到的。
（2）类似地，也可以不加强命题而证明 2011 年自主招生考试（华约）第 13 题：
设 $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{ax+b}$，$f\left(1\right)=1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{2}{3}$，数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+1}=f\left(x_n\right)$，且 $x_1=\dfrac{1}{2}$。
（I）求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；（求得 $x_n=\dfrac{2^{n-1}}{1+2^{n-1}}$）
（II）求证：$x_1x_2\cdots x_n>\dfrac{1}{2e}$。

例 3.3.3. （2006 年高考数学江西卷理科第 22 题）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\dfrac{3}{2}$，且

$$a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}\text{（}n\geqslant 2\text{，}n\in\mathbb{N}^{+}\text{）。}$$

（1）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
（2）证明：对一切正整数 n，不等式 $a_1\cdot a_2\cdots a_n<2\cdot n!$ 恒成立。

分析 在第（1）问中求得 $a_n=\dfrac{n\cdot 3^n}{3^n-1}$，则第（2）问中的不等式转化为 $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3^{i}}\right)>\frac{1}{2}$，同样地，众多文章是用加强命题的技巧去证明 $\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3^{i}}\right)\geqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3^{n}}$，很多师生也觉得该题很难直接证明，加强命题是再自然不过的证法，是上上之策。真的如此吗？且看如下四个无需加强命题的证法。

证明 1 当 $k\geqslant 1$，且 $k\in\mathbb{N}^{+}$ 时，有

$$1-\frac{1}{3^{k}}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{k}}\right)\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{1}{3^{2}}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{k}}\right)}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{3^{k-1}}},$$

令 $k=2,3,\cdots,n$ 时，所得式子累乘，得

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{3^{k}}\right)\geqslant\prod_{k=2}^{n}\sqrt[3]{1-\frac{1}{3^{k-1}}},$$

两边同时三次方并约分整理后得

$$\left(1-\frac{1}{3^{n}}\right)^{3}\prod_{k=2}^{n-1}\left(1-\frac{1}{3^{k}}\right)^{2}\geqslant 1-\frac{1}{3},$$

于是有

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3^k}\right)^2 \geqslant \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3}{1-\frac{1}{3^n}} \geqslant \frac{8}{27} > \frac{1}{4},$$

两端开方后得证。 □

证明 2 当 $k \geqslant 1$，且 $k \in \mathbb{N}^+$ 时，有

$$1-\frac{1}{3^k} = \frac{\left(1-\frac{1}{3^k}\right)\left(1+\frac{1}{3^{k-1}}\right)}{1+\frac{1}{3^{k-1}}} = \frac{1+\frac{1}{3^k}+\frac{1}{3^k}-\frac{1}{3^{2k-1}}}{1+\frac{1}{3^{k-1}}} > \frac{1+\frac{1}{3^k}}{1+\frac{1}{3^{k-1}}},$$

令 $k = 1, 2, \cdots, n$ 时，以上式子累乘，得

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{3^k}\right) > \prod_{k=1}^{n}\frac{1+\frac{1}{3^k}}{1+\frac{1}{3^{k-1}}} = \frac{1+\frac{1}{3^n}}{2} > \frac{1}{2},$$

得证。 □

证明 3 由伯努利不等式：对 $0 < r < 1$，和任意实数 $x > -1$，有 $1 + rx \geqslant (1+x)^r$，则

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{3^n}\right) &= \left[1+\frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\left[1+\frac{2}{3^2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdots\left[1+\frac{2}{3^n}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &\geqslant \left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3^2}}\cdots\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3^n}} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}+\frac{2}{3^2}+\cdots+\frac{2}{3^n}} \\ &= 2^{-1+\frac{1}{3^n}} \\ &> \frac{1}{2},\end{aligned}$$

得证。 □

证明 4 构造

$$f(n) = \frac{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}{1+\frac{1}{3^n}},$$

则

$$\frac{f(n+1)}{f(n)} = \frac{\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)}{1+\frac{1}{3^{n+1}}} = \frac{1+\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{3^{2n+1}}}{1+\frac{1}{3^{n+1}}} > \frac{1+\frac{1}{3^{n+1}}}{1+\frac{1}{3^{n+1}}} = 1,$$

于是 $f(n)$ 单调递增，则 $f(n+1) > f(n) > \cdots > f(2) > f(1) = \frac{1}{2}$，所以

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{3^n}\right) > \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{3^n}\right) > \frac{1}{2},$$

得证。 □

例 3.3.4. （2012 年广东高考试题理科第 19 题）设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$2S_n = a_{n+1} - 2^{n+1} + 1$（$n \in \mathbb{N}^+$），且 a_1，$a_2 + 5$，a_3 成等差数列。

（1）求 a_1 的值；

（2）求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

（3）证明：对一切正整数 n，有 $\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n} < \dfrac{3}{2}$。

分析 易得 $a_n = 3^n - 2^n$。文 [1] 中用加强命题的技巧证明了

$$\frac{1}{3^1 - 2^1} + \frac{1}{3^2 - 2^2} + \cdots + \frac{1}{3^n - 2^n} < \frac{3}{2} - \frac{1}{3^n},$$

从而突破了直接使用数学归纳法难以实现从 $n = k$ 到 $n = k + 1$ 过渡的瓶颈，进而“顺手牵羊”地解决了原问题。但是，一定要加强命题吗？其实，究其原因，还是受到“数学归纳法”的束缚，若发散思维并可得到如下三个优美的证明。

证明 1 由于

$$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{3^k - 2^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{k-1} - \dfrac{2^k}{3}} < \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{k-1} - 2^{k-1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{a_{k-1}} \text{（}k \geqslant 2\text{，}k \in \mathbb{N}^+\text{），}$$

所以

$$\frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \text{（}n \geqslant 2\text{）。}$$

当 $n = 1$ 时，$\dfrac{1}{a_1} = 1 < \dfrac{3}{2}$，得证；

当 $n \geqslant 2$ 时

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{3^{n-1}} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{n-1}} < \frac{3}{2},$$

得证。 □

证明 2 由 $a^k - b^k = (a - b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$，其中 $k \geqslant 2$，$k \in \mathbb{N}^+$，得

$$\frac{1}{a_k} = \frac{1}{3^k - 2^k} = \frac{1}{3^{k-1} + 3^{k-2} \cdot 2 + \cdots + 3 \cdot 2^{k-2} + 2^{k-1}} < \frac{1}{3^{k-1}}\text{。}$$

下同证明 1。 □

证明 3 由 $a^k - b^k = (a - b)\left(a^{k-1} + a^{k-2}b + \cdots + ab^{k-2} + b^{k-1}\right)$，$3^{k-1} > 2^{k-1}$，其中 $k \geqslant 2$，$k \in \mathbb{N}^+$，得

$$\frac{1}{3^k - 2^k} = \frac{1}{3^{k-1} + 3^{k-2} \cdot 2 + \cdots + 3 \cdot 2^{k-2} + 2^{k-1}} < \frac{1}{k \cdot 2^{k-1}} \leqslant \frac{1}{2^k}\text{。}$$

当 $n = 1$ 时，$\dfrac{1}{a_1} = 1 < \dfrac{3}{2}$，得证；

当 $n \geqslant 2$ 时

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 1 + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2^n} < \frac{3}{2},$$

得证。 □

例 3.3.5. （第 9 届加拿大数学奥林匹克试题）设 $0 < a < 1$，定义 $a_1 = 1 + a$，$a_n = \dfrac{1}{a_{n-1}} + a$，$n \geqslant 2$。证明：对一切自然数 n，都有 $a_n > 1$。

分析 众多文章分析指出，若直接使用数学归纳法，从 $n=k$ 到 $n=k+1$ 时，右端常量不变，而左端改变，很难实施递推，进而用加强明天的技巧去证明技巧证明 $1<a_n<\dfrac{1}{1-a}$ 来突破此瓶颈。但是，一定得加强命题才能突破此瓶颈吗？若不加强命题递推真的很难实施吗？且看笔者用“跳跃归纳法”挽回南辕北辙的局面。

证明 （1）$a_1=1+a>1$，$a_2=\dfrac{1}{1+a}+a=\dfrac{1+a+a^2}{1+a}>1$；

（2）假设 $n=k$（$k\geqslant 1$）时，有 $a_k>1$。则当 $n=k+2$ 时，有

$$a_{k+2}=\frac{1}{a_{k+1}}+a=\frac{1}{\dfrac{1}{a_k}+a}+a>\frac{1}{1+a}+a=\frac{1+a+a^2}{1+a}>1。$$

综合（1）、（2）可知对一切自然数 n，都有 $a_n>1$。 □

例 3.3.6. （2010 年全国高考江苏卷附加题压轴题）已知 $\triangle ABC$ 的三边长都是有理数。

（I）求证：$\cos A$ 是有理数；

（II）求证：对任意正整数 n，$\cos nA$ 都是有理数。

证明 1（参考答案的证明） 由 AB、BC、AC 为有理数及余弦定理知 $\cos A=\dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$ 为有理数。

下面用数学归纳法证明 $\cos nA$ 和 $\sin A\cdot\sin nA$ 都是有理数。

（1）当 $n=1$ 时，由（I）知 $\cos A$ 为有理数，从而有 $\sin A\cdot\sin A=1-\cos^2 A$ 也是有理数；

（2）假设当 $n=k$（$k\geqslant 1$）时，$\cos kA$ 和 $\sin A\cdot\sin kA$ 均是有理数。当 $n=k+1$ 时，由

$$\cos(k+1)A=\cos A\cdot\cos kA-\sin A\cdot\sin kA,$$

$$\begin{aligned}\sin A\cdot\sin(k+1)A&=\sin A\cdot(\sin A\cdot\cos kA+\cos A\cdot\sin kA)\\&=(\sin A\cdot\sin A)\cdot\cos kA+(\sin A\cdot\sin kA)\cdot\cos A,\end{aligned}$$

及（1）和归纳假设，知 $\cos(k+1)A$ 与 $\sin A\cdot\sin(k+1)A$ 都是有理数。即当 $n=k+1$ 时，结论成立。

综合（1）、（2）可知，对任意正整数 n，$\cos nA$ 是有理数。 □

为了证明 $\cos nA$ 是有理数，却找来 $\sin A\sin nA$ 与之“作伴”，之后用数学归纳法同时归纳证明 $\cos nA$ 以及 $\sin A\sin nA$ 都是有理数，有点加强命题的味道，这种证明技巧在此之前非常少见，刚公布答案时师生很多都觉得诡异，因而当年对于该题的讨论与争议异常激烈，曾在《数学通讯》（教师刊）的“争鸣”栏目（问题 196）中出现。但是笔者因此产生疑问：解决该题一定需要加强命题吗？其实若熟悉数学归纳法的其他形式，便知答案是否定的。

证明 2（第二数学归纳法） （1）当 $n=1$ 时，由（I）知 $\cos A$ 是有理数；

（2）假设当 $1\leqslant n\leqslant k$ 时，$\cos nA$ 是有理数，则当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}\cos\,(k+1)\,A&=\cos[(k-1)A+2A]\\&=\cos(k-1)A\cos 2A-\sin(k-1)A\sin 2A\\&=\cos(k-1)A\cos 2A-2\sin(k-1)A\sin A\cos A\\&=\cos(k-1)A\cos 2A-\cos A[\cos(k-2)A-\cos kA],\end{aligned}$$

由归纳假设知，上式中每一项均为有理数，所以 $\cos(k+1)A$ 也为有理数。

综合（1）、（2）可知对任意正整数 n，都有 $\cos nA$ 为有理数。 □

证明 3 （1）当 $n=1$ 时，由（I）知 $\cos A$ 是有理数。当 $n=2$ 时，因 $\cos 2A=2\cos^2 A-1$，故 $\cos 2A$ 也为有理数；

（2）假设 $\cos kA$ 和 $\cos(k+1)A$ 都是有理数，那么当 $n=k+2$ 时，由

$$\cos kA+\cos(k+2)A=2\cos A\cos(k+1)A,$$

知 $\cos(k+2)A=2\cos A\cos(k+1)A-\cos kA$ 为有理数。

综合（1）、（2）可得，对任意正整数 n，$\cos nA$ 都是有理数。 □

正如费孝通先生关于文化交流的名言：各美其美，美人之美，美美与共，世界大同。对于数学又何尝不是如此呢？任何一种解题方法都存在优势与不足，我们不希望神化一种而否定另一种。兼容并包，才能更快的提升自我，也能宽阔我们的胸怀。因而教师不应该仅仅灌输学生众多的解题技巧，而更应该教会学生思考问题的方法，从而提高数学的综合素养，只有这样才能更好的促进学生的终生发展。

参考文献

[1] 黄汉桥, 程汉波. 加强命题，巧证数列不等式 [J]. 数学教学. 2013（3）:45-47.

[2] 程汉波, 杨春波. 一道北方女子数学奥林匹克试题的加强、探源与推广 [J]. 数学通讯. 2013（3）（上半月）:54-55.

能力提升

4.1 伪旁切圆的几个结论——文武光华数学工作室（潘成华，田开斌，褚小光）

定义 4.1.1. 与三角形外接圆外切又与三角形的两边相切的圆，称为三角形的伪旁切圆。

显然三角形伪旁切圆也有三个。

定理 4.1.1 (曼海姆定理)**.** 如图 4.1.1，$\triangle ABC$ 的 A-伪旁切圆与外接圆圆 O 外切于 D，与 AB 和 AC 延长线分别相切于 E 和 F，EF 中点 I，则 I 是 $\triangle ABC$ 的 A-旁切圆圆心。

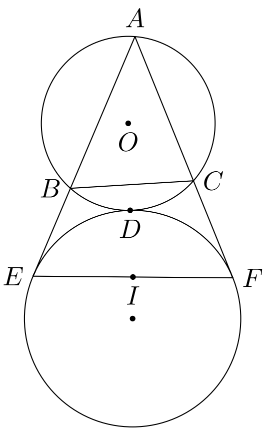


图 4.1.1

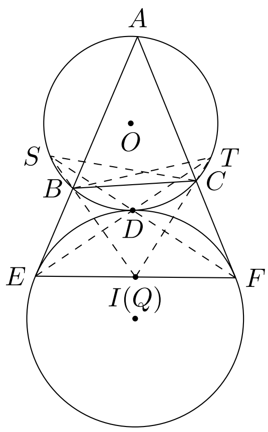


图 4.1.2

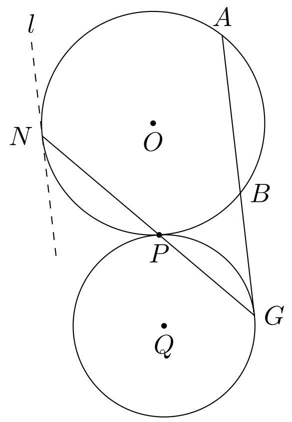


图 4.1.3

引理 4.1.1. 已知 $\odot O$、$\odot Q$ 外切于 P，$\odot O$ 的弦 AB 所在的直线与 $\odot Q$ 相切于 G，直线 PG 交 $\odot O$ 于 N，则 N 是 $\overset{\frown}{ANB}$ 的中点。

证明 如图 4.1.3，过点 N 作直线 $l \parallel AB$，因为 AB 是 $\odot Q$ 切线，P 是两圆位似中心，因为 l 是 $\odot O$ 切线，所以 $l \parallel AB$，进而 N 是 $\overset{\frown}{ANB}$ 的中点。 □

曼海姆定理的证明 如图 4.1.2，设直线 DF, DE 分别交 $\odot O$ 于 S, T，根据引理 4.1.1则 S, T 分别是 $\overset{\frown}{ASC}$ 与 $\overset{\frown}{ATB}$ 的中点，设直线 BS, CT 交于 Q 是 A-旁切圆圆心，在 $\triangle SQC$ 与 $\triangle TQC$ 中，根据 Ceva 角元定理可知

$$\frac{\sin\angle SQF}{\sin\angle CQF} = \frac{\sin\angle SCF}{\sin\angle QCF}\cdot\frac{\sin\angle QSF}{\sin\angle CSF} = \frac{\sin\angle ABS}{\sin\angle ABT}\cdot\frac{\sin\angle BTE}{\sin\angle QTE} = \frac{\sin\angle BQE}{\sin\angle TQE},$$

经过简单计算得 $\angle SQF + \angle BQE = 180^\circ$，因此 E, Q, F 共线，易知 Q 是 EF 中点，即 Q, I 重合，即 I 是 $\triangle ABC$ 的 A-旁切圆圆心。 □

第一题 如图 4.1.4，$\odot O_1, \odot O_2$ 是 $\triangle ABC$ 的 B-,C-伪旁切圆，切点分别是 D, E, F, G，点 M 是 DE 中点，连结 MF 交 O_1O_2 于 W。

求证：$BW \perp O_1O_2$。

证明 如图 4.1.5，取 FG 中点 N，根据曼海姆定理，N, M 就是 $\triangle ABC$ 的 B-,C-旁切圆圆心，易知 $\angle FNA = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle BCA = \angle EDG$，因此 M, N, G, D 四点共圆，延长 NB 交 $\odot(MNGD)$ 于 H，MC 交 $\odot(MNGD)$ 于 K，易知 $\angle HDG = \angle DGK = 90^\circ$，因此四边形 $DGKH$ 是矩形，所以 $\triangle MNB \sim \triangle O_2KH$，$\triangle MNC \sim \triangle HO_1K$，$\triangle BGN \sim \triangle HO_1K$，于是 $\dfrac{MN}{O_2K} = \dfrac{BN}{HK} = \dfrac{NG}{O_1K} = \dfrac{NF}{O_1K}$，$\angle MNF = \angle MDG = \angle MKG$，所以 $\triangle O_2KO_1 \sim \triangle MNF$，因此 $\angle O_2O_1G = \angle MFN$，进而 W, F, O_1, G 四点共圆，又因为 B, G, O_1, F 四点共圆，因此 W, F, O_1, G, B 五点共圆，即得 $BW \perp O_1O_2$。 □

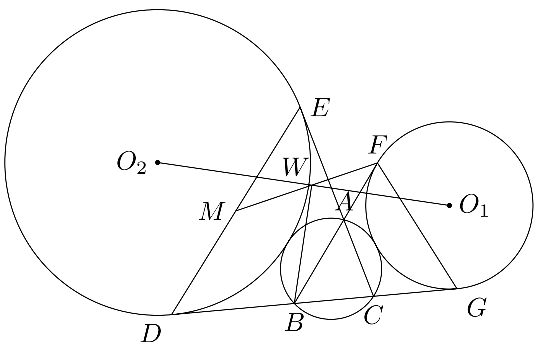


图 4.1.4

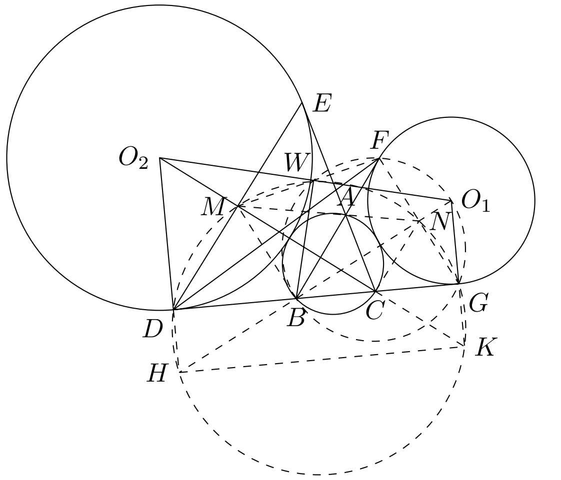


图 4.1.5

第二题 如图 4.1.6，$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 是 $\triangle ABC$ 的 B-,C-伪旁切圆，他们在 AB, BC, AC 切点是 D, E, F, G, 点 M, N 分别是 DE, FG 中点，线段 MF, NE 交于 Q，$\triangle ABC$ 内切圆 $\triangle I$ 切 BC 于 S。

求证：$QS \perp O_1O_2$。

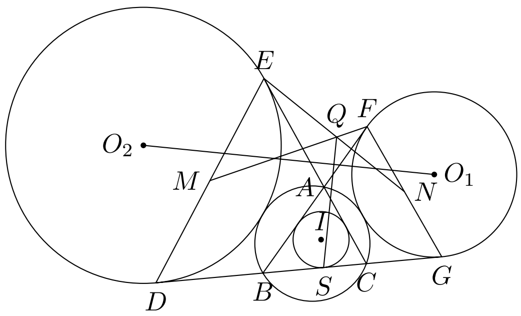


图 4.1.6

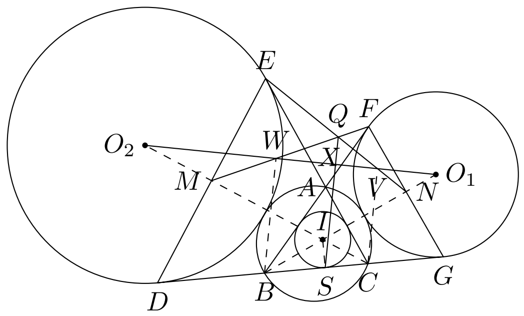


图 4.1.7

证明 如图 4.1.7，连结 O_2C, O_1B, BW, CV，根据曼海姆定理，点 N、M 分别是 $\triangle ABC$ 的 B-,C-旁切圆圆心，可知 O_2、M、I、C 共线，O_1、N、I、B 共线，设 MF, NE 分别交 O_2O_1 于 W、V，连结 WB, VC，根据第一题，易知 $WB \parallel VC$，作 $QX \perp O_1O_2$ 于 X，易知点 W, F, O_1, B 四点共圆，所以 $\angle QWV = \angle FBO_1 = \dfrac{1}{2}\angle ABC = \angle IBC$，同理 $\angle QVW = \angle ICB$，于是 $\triangle QWV \sim \triangle IBC$，得 $\dfrac{WX}{XV} = \dfrac{BS}{CS}$，于是 $XS \parallel WB$，根据第一题可知 $XS \perp O_2O_1$，进而 Q、X、S 共线，所以 $QS \perp O_1O_2$。 □

第三题 如图 4.1.8，已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 是 $\triangle ABC$ 的 B-,C-伪旁切圆，他们在 AB, BC, AC 上的切点是 D, E, F, G，点 M, N 分别是 DE, FG 中点，直线 EN 交 O_1O_2 于 V，直线 FM 交 O_1O_2 于 W，线段 MF, NE 交于 Q。

求证：$\dfrac{WQ}{QV} = \dfrac{MB}{NC}$。

证明 如图 4.1.9，根据曼海姆定理，点 N、M 分别是 $\triangle ABC$ 的 B-,C-旁切圆圆心，M、A、N 共线，易知

$$\angle MEA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB，\angle MAE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle CAB，$$

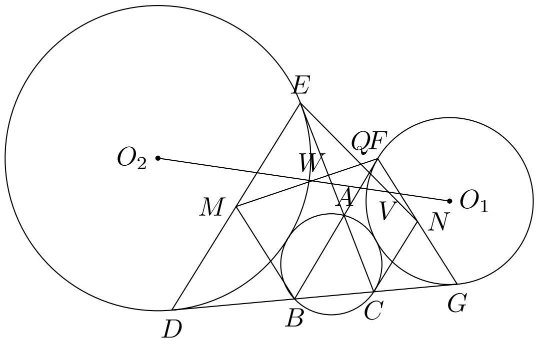


图 4.1.8

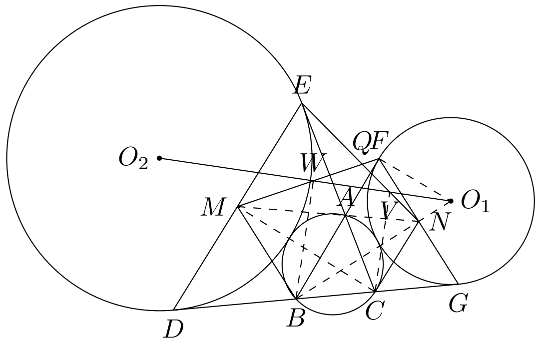


图 4.1.9

于是

$$\angle AFN=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC，\angle FAN=90^\circ-\frac{1}{2}\angle CAB，$$

我们很容易知道

$$\angle AMB=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB， \tag{4.1.1}$$

$$\angle NCB=90^\circ+\frac{1}{2}\angle ACB， \tag{4.1.2}$$

根据 (4.1.1) 和 (4.1.2) 得到 $\angle NMB+\angle NCB=180^\circ$，所以 M,N,C,B 四点共圆，

$$\frac{MB}{NC}=\frac{\sin\angle MCB}{\sin\angle NBC}=\frac{\sin\dfrac{\angle ACB}{2}}{\sin\dfrac{\angle ACB}{2}},$$

根据第一题可知 $WB\perp O_1O_2$，可知 W,B,O_1,F 四点共圆，于是 $\angle FWO_1=\angle FBO_1=\dfrac{1}{2}\angle ABC$，同理 $\angle EVO_2=\dfrac{1}{2}\angle ACB$，

$$\frac{WQ}{VQ}=\frac{\sin\angle QVO_2}{\sin\angle QWO_1}=\frac{\sin\dfrac{\angle ACB}{2}}{\sin\dfrac{\angle ACB}{2}},$$

于是

$$\frac{WQ}{QV}=\frac{MB}{NC}。$$

□

第四题 如图 4.1.10，已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 是 $\triangle ABC$ 的 B-,C-伪旁切圆，他们在 AB,BC,AC 上切点是 D,E,F,G，点 M,N 分别是 DE,FG 中点，直线 MB 交 NC 于 T。

求证：$S_{\triangle MFT}=S_{\triangle ENT}$。

证明 如图 4.1.11，根据曼海姆定理，点 N、M 分别是 $\triangle ABC$ 的 B-,C-旁切圆圆心，M、A、N 共线，设 MF、EN 交于 Q，易知

$$\angle MEA=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ACB，\angle MAE=90^\circ-\frac{1}{2}\angle CAB，$$

于是

$$\angle EMA=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC，\angle AFN=90^\circ-\frac{1}{2}\angle ABC，\angle FAN=90^\circ-\frac{1}{2}\angle CAB，$$

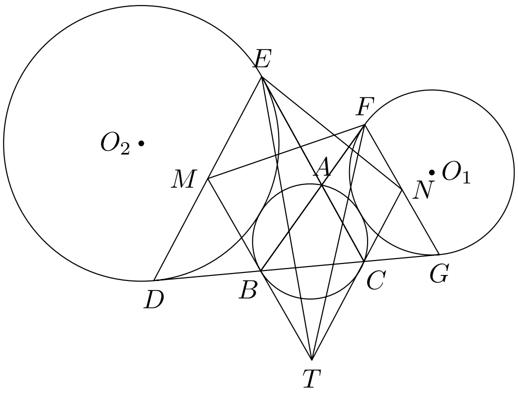


图 4.1.10

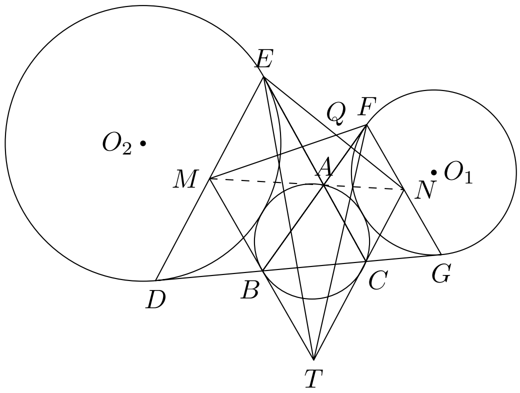


图 4.1.11

于是 $\triangle MAE \sim \triangle FAN$，得到 $\dfrac{MA}{AE} = \dfrac{FA}{AN}$，进而 $\triangle MAF \sim \triangle EAN$，进一步得到

$$\angle QMA + \angle QNA = \angle AEN + \angle ENA = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle CAB, \tag{4.1.3}$$

我们很容易知道

$$\angle AMB = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ACB, \tag{4.1.4}$$

$$\angle ANC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle ABC, \tag{4.1.5}$$

所以根据 (4.1.3)、(4.1.4)、(4.1.5)得到

$$\angle QMT + \angle QNT = 180^\circ, \tag{4.1.6}$$

由 $\triangle MAF \sim \triangle EAN$ 得到

$$\frac{NE}{MF} = \frac{AE}{AM} = \frac{\sin\angle AME}{\sin\angle AEM} = \frac{\cos\dfrac{\angle ABC}{2}}{\cos\dfrac{\angle ACB}{2}},$$

$$\frac{MT}{NT} = \frac{\sin\angle MNT}{\sin\angle NMT} = \frac{\cos\dfrac{\angle ABC}{2}}{\cos\dfrac{\angle ACB}{2}},$$

所以 $\dfrac{MT}{NT} = \dfrac{NE}{MF}$，所以 $MT \cdot MF = NE \cdot NT$，根据 (4.1.6) 得 $S_{\triangle MFT} = S_{\triangle ENT}$。 □

第五题 如图 4.1.12，已知 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 是 $\triangle ABC$ 的 B-,C-伪旁切圆，D,E,F,G 是切点，M,N 分别是 DE,FG 中点。

求证：$\angle BMG = \angle DNC$。

证明 如图 4.1.13，根据曼海姆定理，N,M 分别是 B-,C-旁切圆圆心，易知 $\angle ANF = 90^\circ - \dfrac{1}{2}\angle ACB = \angle EDC$，得到 M,N,G,D 四点共圆，可知 $\angle NMG = \angle NDG$，设 DN,BM 交于 S，CN 交 MG 于 T，直线 MB,NC 交于 P，结论等价于 M,N,T,S 四点共圆，即证 $\angle NMT = \angle NST$。因为 $\angle NMG = \angle NDG$，因此只要证明 $\angle NST = \angle NDG$，即 $ST \parallel BC$。设直线 MB、NC 交于点 P，根据 Menelaus 定理可知

$$\frac{PC}{CN} \cdot \frac{ND}{DS} \cdot \frac{SB}{BP} = 1, \tag{4.1.7}$$

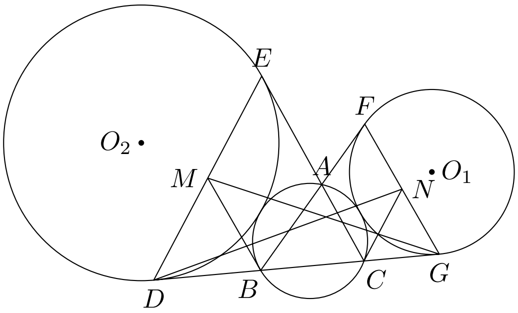


图 4.1.12

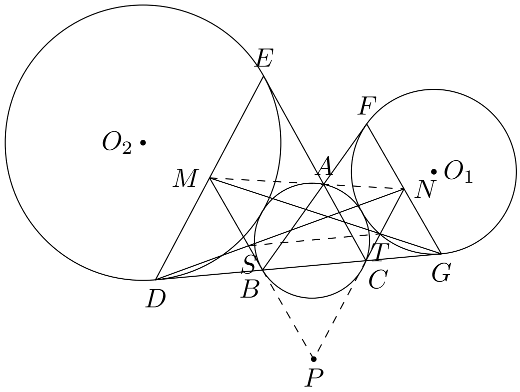


图 4.1.13

$$\frac{PB}{BM}\cdot\frac{MG}{GT}\cdot\frac{TC}{CP}=1, \tag{4.1.8}$$

易知 $MB \parallel GF$，$NC \parallel DE$，可知

$$\frac{DN}{DS}=\frac{DG}{DB},\ \frac{PC}{CN}=\frac{BC}{CG},\ \frac{PB}{BM}=\frac{BC}{BD},\ \frac{MG}{TG}=\frac{DG}{CG},$$

由 (4.1.7)、(4.1.8) 得 $\dfrac{TC}{PC}=\dfrac{SB}{BP}$，我们得到 $ST \parallel BC$。 □

4.2 利用多项式除法解高次方程组——何万程

在中学阶段并没有系统讨论过高次方程组的解法，通常解高次方程组得方法就是消元法。若用代入消元法，如果变量次数高于一次，计算将会非常复杂，而且对次数超过四次的通常都是不可行的，对次数是三次或四次的，虽然理论上可行，但实施起来要解非常复杂的无理方程，因此代入消元法并不是普遍适用的方法。若用加减消元法，中学阶段只系统讨论过二元一次方程组和三元一次方程组的加减消元法，这种乘常数再进行加减的方法对高次方程组通常也是失效的。

下面介绍一个利用多项式除法解高次方程组的方法，这个方法是一个特殊的加减消元法。这个方法的原理如下：设 f、g 是多项式，若

$$f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0，g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0，$$

则对任意多项式 $f'\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，$g'\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，必定有

$$f'\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)+g'\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)g\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)=0。$$

首先介绍二元高次方程组 $\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0, \end{cases}$ 的消元法，假定需要消去元 y：

1. 先把 x 看成常数，选取 $f(x,y)$、$g(x,y)$ 中 y 次数较高的一个作为 $p_1(x,y)$，另一个作为 $p_2(x,y)$，计算 $\dfrac{p_1(x,y)}{p_2(x,y)}$，其余式是 $r(x,y)=\dfrac{r_1(x,y)}{r_2(x,y)}$（$r_1(x,y)$、$r_2(x,y)$ 都是多项式），$r_1(x,y)$ 中 y 的次数一定比 $p_1(x,y)$ 和 $p_2(x,y)$ 都要小；
2. 若 $r_1(x,y)$ 的系数全是 0，则满足 $r_1(x,y)=0$ 的所有解都是原方程组的解；
3. 若 $r_1(x,y)$ 的系数不全是 0，且不是所有含变量 y 的系数都是 0，则令 $p_2(x,y)$ 取代原来的 $p_1(x,y)$，$r_1(x,y)$ 取代原来的 $p_2(x,y)$，继续上述计算步骤；
4. 若 $r_1(x,y)$ 的系数不全是 0，且所有含变量 y 的系数都是 0，则已消元成功。

例 4.2.1. 解方程组

$$\begin{cases} 5x^2+5xy-3y^2-3x+y+1=0, \\ 3x^2-7xy+y^2-9x-4y+2=0。 \end{cases}$$

解 因为

$$\begin{aligned} & 5x^2+5xy-3y^2-3x+y+1 \\ = & -3\left(3x^2-7xy+y^2-9x-4y+2\right)-(16x+11)\,y+14x^2-30x+7, \\ & 3x^2-7xy+y^2-9x-4y+2 \\ = & \frac{-(16x+11)\,y+98x^2+171x+37}{(16x+11)^2}\left(-(16x+11)\,y+14x^2-30x+7\right) \\ & -\frac{604x^4+702x^3-1633x^2+472x+17}{(16x+11)^2}, \end{aligned}$$

因为

$$604x^4+702x^3-1633x^2+472x+17=\left(x^2+2x-1\right)\left(604x^2-506x-17\right),$$

解 $x^2+2x-1=0$ 得 $x=-1\pm\sqrt{2}$，解 $604x^2-506x-17=0$ 得 $x=\dfrac{253\pm9\sqrt{917}}{640}$，把 x 值逐个代入原方程组中求解 y 的公共值，得原方程组的解是

$$\begin{cases} x=-1\pm\sqrt{2}, \\ y=-3\pm2\sqrt{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x=\dfrac{253\pm9\sqrt{917}}{640}, \\ y=\dfrac{127\mp11\sqrt{917}}{640}。 \end{cases}$$

□

对于元数大于二的高次方程组，可以利用例如第一个方程和每个其他方程组成方程组，按二元方程组的消元方法消去同一个元，得到的新的方程组比原来的方程组元数少一，方程个数比原来的少一，这样不断下去，就能把元数变成二了。

例 4.2.2. 求一个整系数高次方程，使其一根为 $\sqrt[3]{2}+\sqrt[5]{3}$。

解 令 $x=\sqrt[3]{2}+\sqrt[5]{3}$，$a=\sqrt[3]{2}$，$b=\sqrt[5]{3}$，我们得方程组

$$\begin{cases} x=a+b, \\ a^3=2, \\ b^5=3, \end{cases}$$

由 $x=a+b$ 及 $b^5=3$ 消去 b，得

$$-a^5+5a^4x-10a^3x^2+10a^2x^3-5ax^4+x^5-3=0,$$

上面的方程与 $a^3=2$ 消去 a，得

$$\begin{aligned} &25x^{21}-260x^{18}-225x^{16}+1101x^{15}-13410x^{13}-2410x^{12}+675x^{11}-35109x^{10}+2840x^9-13770x^8 \\ &+6660x^7-2355x^6+5427x^5+1980x^4+670x^3-540x^2-360x-59=0, \end{aligned}$$

上面的方程可变为

$$\left(5x^3-1\right)^2\cdot\left(x^{15}-10x^{12}-9x^{10}+40x^9-540x^7-80x^6+27x^5-1620x^4+80x^3-540x^2-360x-59\right)=0,$$

所以 $x^{15}-10x^{12}-9x^{10}+40x^9-540x^7-80x^6+27x^5-1620x^4+80x^3-540x^2-360x-59=0$ 和 $25x^{21}-260x^{18}-225x^{16}+1101x^{15}-13410x^{13}-2410x^{12}+675x^{11}-35109x^{10}+2840x^9-13770x^8+6660x^7-2355x^6+5427x^5+1980x^4+670x^3-540x^2-360x-59=0$ 都是所求的方程。 □

从上面的例子我们可以看到，这种消元法虽然普遍适用，但计算通常都比较繁琐，所以如果方程结构比较特殊的话应先考虑特殊解法以避免繁琐的计算。

朝花夕拾

5.1 【封面故事】Kepler-Poinsot 多面体——何万程

把正十二面体每个面按照图 5.1.1 的方法延展成一个正五角星，得到的多面体称为小星状正十二面体。把正二十面体连结同一顶点的五个顶点按照图 5.1.2 的方法延展成一个正五角星，得到的多面体称为大星状正十二面体。小星状正十二面体和大星状正十二面体称为 Kepler 多面体。按照上述方法延展所在的平面称为 Kepler 多面体的面，延展后正五角星的顶点称为 Kepler 多面体的顶点，延展后连结正五角星两顶点的边称为 Kepler 多面体的棱。

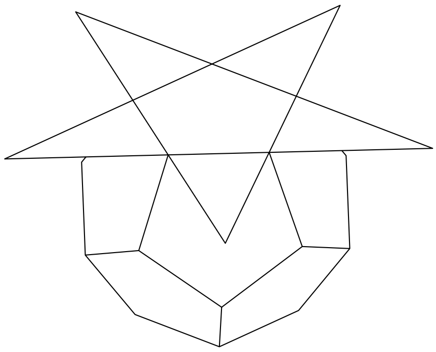


图 5.1.1

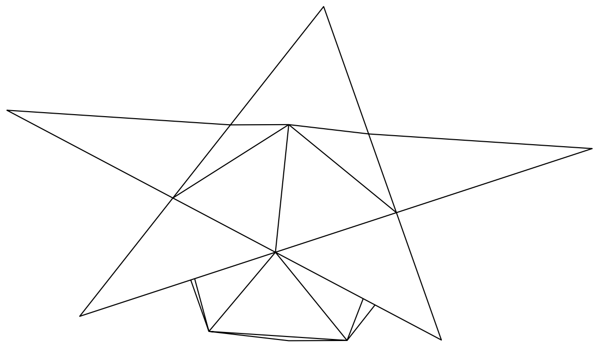
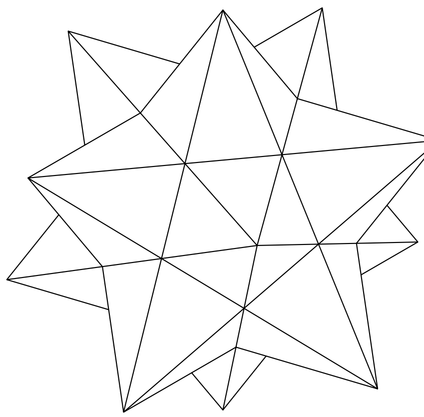
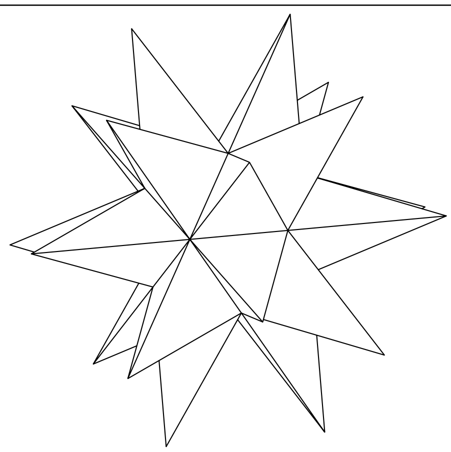


图 5.1.2

表 5.1.1　Kepler 多面体的直观图、顶点数、面数、棱数

名称	直观图	顶点数	面数	棱数
小星状正十二面体		12	12	30
大星状正十二面体		20	12	30

由表 5.1.1 中的数据可以看出，小星状正十二面体并不符合 Euler 公式 $V+F-E=2$，其中 V 是顶点数，F 是面数，E 是棱数。

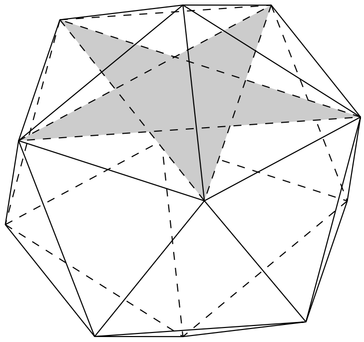


图 5.1.3

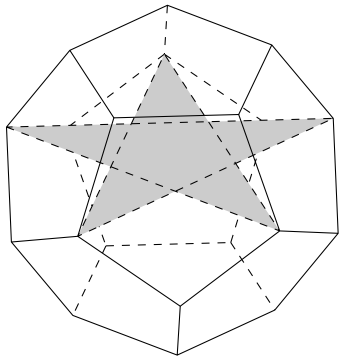


图 5.1.4

小星状正十二面体可以看成在正十二面体各面上补一个正五棱锥构成的，且其顶点构成正十二面体。大星状正十二面体可以看成在正二十面体各面上补一个正三棱锥构成的，且其顶点构成正二十面体。

小星状正十二面体也可以利用图 5.1.3 的星状化方法构造而成，大星状正十二面体也可以利用图 5.1.4 的星状化方法构造而成。图 5.1.5 是小星状正十二面体其中一个角的展开图，图 5.1.6 是大星状正十二面体其中一个角的展开图。

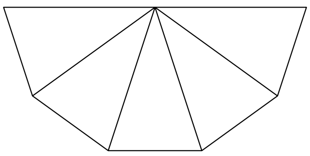


图 5.1.5

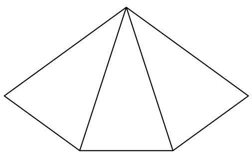


图 5.1.6

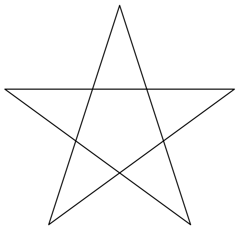


图 5.1.7

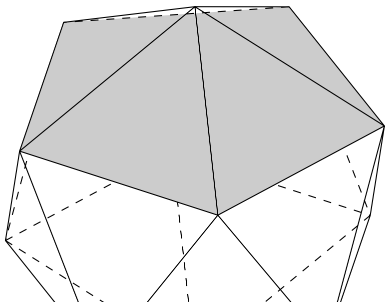


图 5.1.8

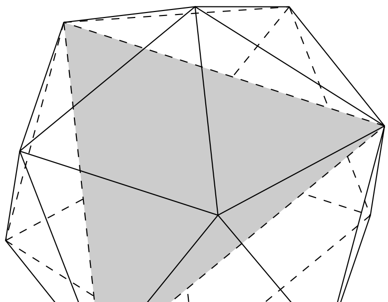
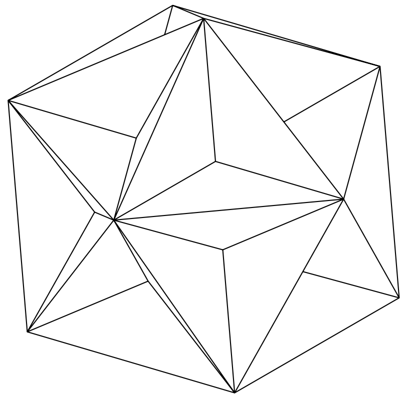
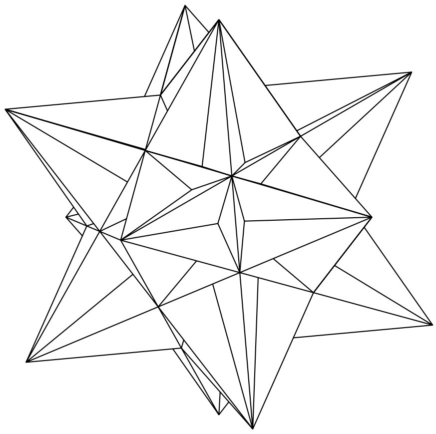


图 5.1.9

把正二十面体按图 5.1.8 所示，连结同一顶点的五个顶点的正五边形，所有这些正五边形得到的多面体称为大正十二面体。把正二十面体按图 5.1.9 所示，连结成一个正三角形，所有这些正三角形得到的多面体称为大正二十面体。大正十二面体和大正二十面体称为 Poinsot 多面体。按照上述构造法正五边形或正三角形所在的面称为 Poinsot 多面体的面，正五边形或正三角形的顶点称为 Poinsot 多面体的顶点，正五边形或正三角形的边称为 Poinsot 多面体的棱。

表 5.1.2　Poinsot 多面体的直观图、顶点数、面数、棱数

名称	直观图	顶点数	面数	棱数
大正十二面体		12	12	30
大正二十面体		12	20	30

由表 5.1.2 中的数据可以看出，大正十二面体并不符合 Euler 公式 $V+F-E=2$，其中 V 是顶点数，F 是面数，E 是棱数。

大正十二面体可以看作在正十二面体各面切去一个正三棱锥得到的，图 5.1.11 是大正十二面体的展开图。

大正二十面体的构成非常复杂，但用下面的构造法可以比较简单地构造出这个多面体：

（1） 正十二面体各面向内挖一个侧面是正三角形的正五棱锥（如图 5.1.10 右下侧所示）;

（2） 在所挖的正五棱锥向外补一个图 5.1.10 左上侧的凹多面体。

步骤（2）所补的凹多面体如果把凹下去的四面体补上，则会得到大星状十二面体。因此，大正二十面体也可以看作大星状十二面体切去六十个小三棱锥后得到的。

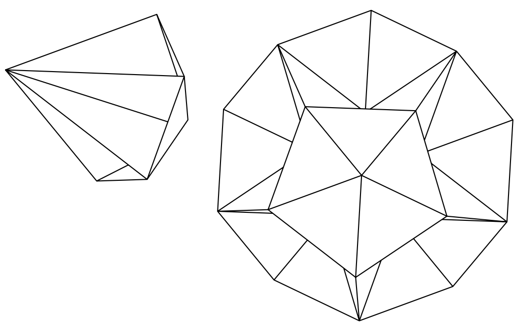


图 5.1.10

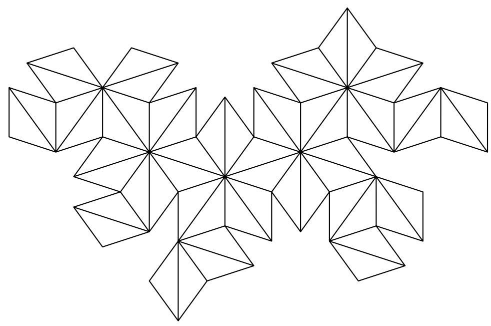


图 5.1.11

图 5.1.11 是小大正十二面体的展开图，图 5.1.12 是图 5.1.10 右下侧凹多面体的展开图，图 5.1.13 是图 5.1.10 左上侧凹多面体的展开图。

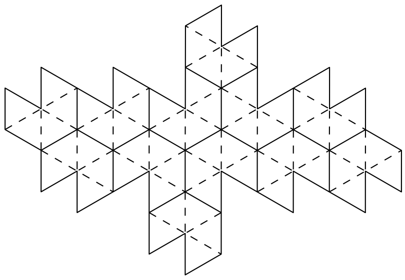


图 5.1.12

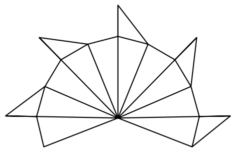


图 5.1.13

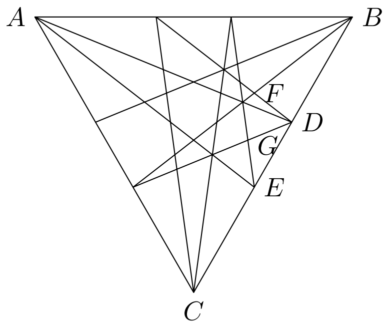


图 5.1.14

Kepler 多面体和 Poinsot 多面体并称为 Kepler-Poinsot 多面体。

各面都是全等的正多边形或正多角星，各顶点所成的多面角都全等的凹多面体称为凹正多面体。Kepler-Poinsot 多面体是仅有的四种凹正多面体。

封面的图就是大正二十面体，pdf 版的封面如果用 Adobe Reader 9.0 或以上版本可以单击图形激活 3D 效果，可通过鼠标旋转图形观看各个位置（当然 Acrobat 9.0 或以上版本亦可以），激活 3D 效果后还有更多功能可按鼠标右键选择。