《线性代数》考研基础练习题

第六章　相似矩阵及二次型

一．填空题

1、已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$，则 $a=$_______.

2、实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_1+x_3)^2$ 的秩为___________.

3、实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 的矩阵为_________________.

4、$5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3=1$ 表示的图形为_____________.

二．选择题

1、设 A,B 为同阶可逆方阵，则（　　）.

（A）$AB=BA$　　（B）存在可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=B$

（C）存在可逆阵 C，使 $C^TAC=B$　　（D）存在可逆阵 P,Q，使 $PAQ=B$

2、设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}4&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B（　　）.

（A）合同且相似　（B）合同但不相似　（C）不合同但相似　（D）不合同且不相似

3、设 n 阶方阵 A 能正交相似对角化，则矩阵 A（　　）.

（A）一定有 n 个不同特征值　（B）A 为正交阵　（C）A 为对称阵　（D）A 为正定阵

4、已知 A 是 3 阶实对称矩阵，如果 $(x,y,z)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 表示的图形为旋转双叶双曲面，则 A 的正的特征值个数为（　　）.

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

5、$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，则 A 与 B（　　）.

（A）合同且相似（B）合同但不相似（C）不合同但相似（D）不合同且不相似

三．计算题

1．用矩阵记号表示下列二次型：

（1）$f=2x^2+4xy+2y^2-2yz-3z^2-4xz;$　　（2）$f=x_1x_2-x_2^2-x_1x_4+3x_3^2-2x_3x_4+2x_4^2.$

2．求一个正交变换化下列二次型成标准形：

（1） $f=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2x_2x_3$;

（2） $f=2x_1x_2+2x_1x_3-2x_1x_4-2x_2x_3+2x_2x_4+2x_3x_4$

3．用 Lagrange 配方法化不列二次型为标准形：

（1） $f=x^2+y^2-7z^2-2xy-4xz-4yz$；

（2） $f=x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$.

4．用初等变换法化二次型为标准形：

（1） $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$；

（2） $f=2x^2-2xy+3y^2-3xz+9z^2$.

5．证明：二次型 $f = x^T Ax$ 在 $\|x\| = 1$ 时的最大值为方阵 A 的最大特征值.

6．t 取什么值时，下列二次型是正定的?

（1） $f = x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$；

（2） $f = 2x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$.

7．已知二次曲面 $x^2 + ay^2 + z^2 + 2bxy + 2xz + 2yz = 4$，可以经过正交变换 $(x, y, z)^T = P(\xi, \eta, \zeta)^T$ 化为圆柱面方程 $\eta^2 + 4\zeta^2 = 4$，求 a, b 的值和正交矩阵 P。

8．已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

（1）求 a 的值；

（2）求正交变换 $x=Py$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形；

（3）求方程 $f(x_1,x_2,x_3)$=0 的解。

9．设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2x_2^2-2x_3^2+2bx_1x_3(b>0)$，其中二次型的矩阵 A 的特征值之和为 1，特征值之积为 -12.

（1）求 a,b 的值；

（2）求正交变换 $x=Py$，把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为标准形。