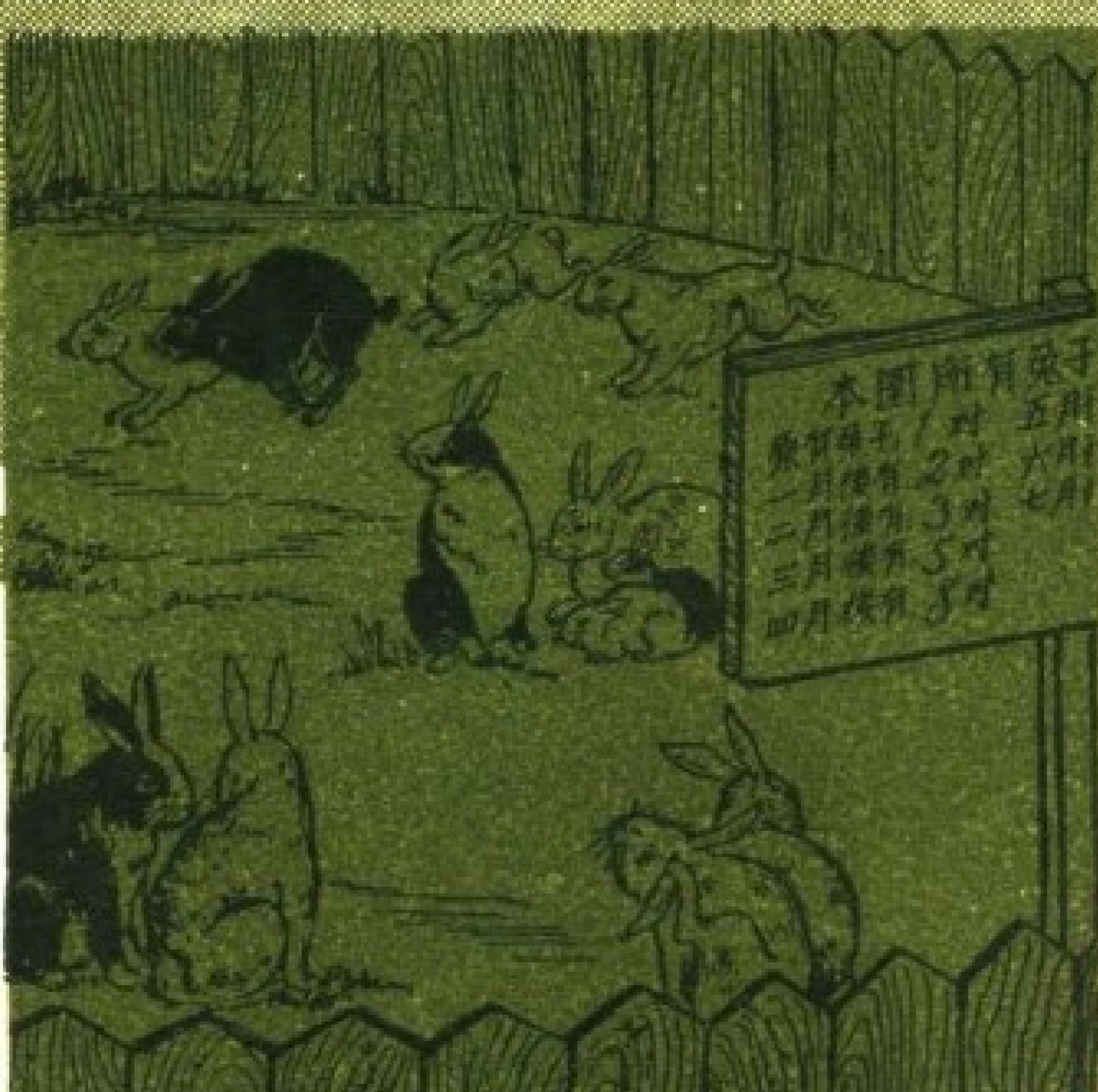
蘇聯青年科學叢書

斐波那契數

伏洛別也夫著



中国青年出版社

內 容 提 要

本書以斐波那契數(一種民間數學)作基礎，詳盡地敍述數論方面一些基本問題，並且講到它和連分數以及幾何中一些問題的關係。只要對於數學有些基本知識的讀者，就可以看得懂這本書，並且會從這裏獲得一定程度的幫助。

Н. Н. ВОРОБЬЕВ
ЧИСЛА ФИБОНАЧЧИ
ТЕХГИЗ, МОСКВА, 1951

原　　序

在初等數學中，有許多困難的同時也是有趣味的問題，它們並沒有被冠以任何名稱，就性質來說倒寧可看作是一種‘民間數學’．這類問題散見於流傳較廣的通俗讀物或純粹包含趣味數學的讀物中，並且人們常常很難斷言這一個或那一個問題最早是在甚麼文獻裏出現的．

這些問題常常以種種不同的形態出現而流傳着；有時，好幾個問題合成一個比較更複雜的問題；反過來，有時一個問題又分解成好幾個比較簡單的問題；總之，常常難以說明，甚麼地方一個問題結束了而甚麼地方另一個問題又開始了．人們可以十分正確地這樣來看，就是說每一個這類問題都牽涉到一些粗淺的數學理論，這些粗淺的數學理論的歷史、問題和方法，是和‘高深數學’的歷史、問題和方法有着密切聯系的．

斐波那契數的理論就是這類粗淺的數學理論之一．從有名的兔子問題開始，經過了七百五十年的攸久歷史，斐波那契數至今仍然是初等數學中非常吸引人的一章．和斐波那契數有關的問題在許多通俗數學讀物中出現，在學校數學小組中常被作爲教材而研討，在數學競賽中常被提出．

這本小册子是 1949-1950 學年，列寧格勒國立列寧勳章

A. A. 日丹諾夫大學數學小組學習材料的內容. 針對着小組參加者的願望,學習材料偏重於數論方面的問題;這本小册子便把這些問題作了比較詳盡的發揮.

本書的對象是 9-10 年級的學生. 極限的觀念僅僅在第三章第 7、第 8 節出現. 對這個觀念還不能充分掌握的讀者,可以毫無影響地略去這幾節不讀而了解後面的內容. 對於二項式係數(第一章第 8 節)以及三角法(第四章第 2、第 3 節),情形也是和對於極限一樣. 書中所陳述的關於除法及連分數的初步理論從未超過學校課程範圍,並且是沒有假定讀者已經學過.

對於循環級數的結構有興趣的讀者,可以參照 A. И. 馬庫希維契所寫的、篇幅不多而內容豐富的小册子'循環級數'*(國家技術理論書籍出版局, 1950). 同樣,對於數論方面的現象有興趣的讀者,可以參考這一門學問裏比較高深的著作.

H. H. 伏洛別也夫

* 我國已有朱美琨譯本.——譯者註

目　次

前　言

1. 上古歷史中很富於出色的數學家們的史實. 許多上古時代數學的成就，到今天仍然足以使人們對於當時的那些創作者起高度的崇敬；歐幾里德、阿基米德、蓋郎的名字更是爲任何有知識的人所熟悉.

至於中古時代的數學，情形就不同了. 除了生活在十六世紀當中的維也德，在中學課程裏幾乎沒有提到一個中古時代數學家的名字，雖然他們是處在一個比較接近於我們所處的時代. 這並不是偶然的. 在這一個階段裏數學發展得非常緩慢，數學家也非常少.

對於我們比較有興趣的是一本著作 'Liber abacci'('算盤書'). 這書是著名意大利數學家比薩的萊翁那度寫的，他的另一個名字叫斐波那契(Fibonacci 是 filius Bonacci 的簡寫，意思是波那契之子). 這本書最初寫於 1202 年，流傳到我們現在的是另一個手本，完成於 1228 年.

'Liber abacci' 是一部內容極爲豐富的著作，幾乎包含了當時算術及代數知識的全部，並且對於後幾個世紀西歐的數學發展起過重要的作用. 特別是因爲這本書的緣故，使歐洲人認識了印度(阿剌伯)字碼. 'Liber abacci' 中所闡述的若

干問題組成了這本小册子很主要的部分.

在 1228 年那個手本的第 123 -124 頁有這樣的問題:

'由一對兔子開始,一年後可以繁殖成多少對兔子?'

'某人把一對兔子放在某處,四面用牆圍起來,目的在觀察,由這一對兔子開始,經過一年的繁殖,總共可以得到多少對兔子. 假設兔子的生殖力是這樣的:每一對兔子每一個月可以生一對兔子,並且兔子在出生兩個月以後就具有生殖後代的能力. 在第一個月裏第一對兔子生了一對後代,因此在第一個月兔子的總數是兩對;在這兩對中,只有第一對能夠在下一個月裏生一對兔子,所以在第二個月裏一共得到 3 對兔子;其中兩對可以在下個月裏從事生殖,所以在第三個月裏有兩對兔子出生,在這個月裏兔子數目增加到 5 對;其中 3 對在下個月可以產生後代,所以在第四個月裏增加到 8 對;其中 5 對可以在第五個月裏產生 5 對後代,再加上上月的 8 對一共是13 對;其中 5 對還不能在下個月生殖,但剩下的 8 對可以生殖,所以在第六個月裏一共得到 21 對兔子;再加上第七個月裏出生的13 對,一共得到34 對;再加上第八個月裏出生的 21 對,得到這個月的總數是 55 對;加上第九個月出生的 34 對,一

兔子的對數
1
第一個月
2
第二個月
3
第三個月
5
第四個月
8
第五個月
13
第六個月
21
第七個月
34
第八個月
55
第九個月
89
第十個月
144
第十一個月
233
第十二個月
377

圖 1

共得到 89 對;加上第十個月出生的 55 對,得到 144 對;再加上第十一個月出生的 89 對,得到這個月裏的總數是 233 對;再加上第十二個月出生的 144 對,得到 377 對;這就是從一對兔子開始,經過一年的繁殖所得到的兔子的總對數.事實上,你可以看出來,我們究竟在這頁的邊上*作了些甚麼;那就是,我們將第一個數加上第二個數,也就是 1 同 2;第二個加上第三個;第三個加上第四個;第四個加上第五個;這樣,一個加上下一個,一直到第十一個數加上第十二個數爲止,也就是 144 加上 233;這樣我們得到了兔子的總對數 377;這個手續一直可以推算下去直到無盡的月數.'

2. 我們現在從兔子轉移到數上來,考慮下面的級數:

$$u_1, u_2, \cdots\cdots, u_n, \tag{1}$$

其中每一項都等於它的前兩項的和,就是,當 $n>2$ 時

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}. \tag{2}$$

凡是一種級數,它的每一項都可以表示爲它前面的項的函數的,稱爲**循環級數**,這種級數在數學裏常常出現.每一項由它前面各項來決定的這種逐次推進的手續稱爲**循環手續**,方程式(2)稱爲**循環方程式**.關於循環級數一般理論的初步,讀者可以參考前面已經提到過的馬庫希維契所寫的小册子(見第iv頁).

首先注意,單單由條件(2)並不能算出級數(1)的各項.

* 見圖 1. 斐波那契把所有的圖表和計算都寫在頁的邊上.

我們可以找到許多滿足條件(2)而各不相同的級數,例如:

$$2, 5, 7, 12, 19, 31, 50, \cdots\cdots,$$

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, \cdots\cdots,$$

$$-1, -5, -6, -11, -17, \cdots\cdots$$

等等.

由此可知,要想唯一地決定級數(1),單單條件(2)是不够的,我們還得找些條件來補充. 例如,我們可以先決定級數(1)的最初幾項. 究竟先要決定多少最初項才能够依靠條件(2)而將以後所有的項都算出來呢?

單由條件(2)不能決定級數(1)的各項這一個事實,從這樣的理由就已經可以明瞭了;就是,並非級數(1)的每一項前面都有兩項,例如第一項的前面就再沒有項了,而第二項前面僅有一項. 由此可知,要完全決定級數(1),除了條件(2)以外,必須先決定最初的兩項.

要決定級數(1),顯然這些條件也已經充分了. 事實上,u_3 可以作爲 u_1 同 u_2 的和而計算出來; u_4 是 u_2 同方才算出的 u_3 之和; u_5 是方才算出的 u_3 同 u_4 之和等等‘一直無盡地推演到任何項’. 由級數的相鄰兩項推出緊隨着的後一項這種方式,使我們可以推算出級數的任何項.

3. 現在我們轉到級數(1)的一個重要的特別情形,這時 $u_1=1, u_2=1$. 如同上面所指出,由條件(2)就可算出級數中所有的各項.

容易看出，在這個特別情形級數的最前面 14 項是

$$1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,$$

這些數正是前面兎子問題裏所出現的。為了對問題創作者表示敬意，凡是級數(1)而適合 $u_1=u_2=1$ 的，稱為**斐波那契級數**；它的每一項稱為**斐波那契數**.

斐波那契數具有很多有趣並且重要的性質，本書的目的就是從事於闡發這些性質.

一　斐波那契數的簡單性質

1. 首先讓我們來求最初 n 個斐波那契數的和．那就是證明

$$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=u_{n+2}-1. \tag{3}$$

事實上，我們有：

$$u_1=u_3-u_2,\qquad u_2=u_4-u_3,$$

$$u_3=u_5-u_4,\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u_{n-1}=u_{n+1}-u_n,\quad u_n=u_{n+2}-u_{n+1}.$$

將上列各等式兩邊加起來，就得到

$$u_1+u_2+\cdots\cdots+u_n=u_{n+2}-u_2,$$

再想到 $u_2=1$，就得所要的結果.

2. 指標為奇數的斐波那契數的和是

$$u_1+u_3+u_5+\cdots\cdots+u_{2n-1}=u_{2n}. \tag{4}$$

為了證明這個等式，先寫出

$$u_1=u_2,\qquad u_3=u_4-u_2,$$

$$u_5=u_6-u_4,\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$u_{2n-1}=u_{2n}-u_{2n-2}.$$

把這些等式兩邊加起來,就得到所要的結果.

3. 指標為偶數的斐波那契數的和可以表成如下形式:

$$u_2+u_4+\cdots\cdots+u_{2n}=u_{2n+1}-1. \tag{5}$$

由第 1 節,我們知道

$$u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_{2n}=u_{2n+2}-1;$$

由此式的兩邊分別減去等式(4)的兩邊就得到

$$u_2+u_4+\cdots\cdots+u_{2n}=u_{2n+2}-1-u_{2n}=u_{2n+1}-1,$$

這正是我們所要的結果.

更進一步,由(4)的兩邊分別減去(5)的兩邊,得到

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots+u_{2n-1}-u_{2n}=-u_{2n-1}+1. \tag{6}$$

在(6)的兩邊各加上 u_{2n+1}:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots-u_{2n}+u_{2n+1}=u_{2n}+1. \tag{7}$$

將(6)與(7)合併起來看,就得到正負相間的斐波那契數的求和公式:

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}u_n=(-1)^{n+1}u_{n-1}+1. \tag{8}$$

4. 公式(3)及(4)是把一串簡明的等式兩邊分別加起來得到的. 這個方法的應用,更進一步的例子就是求最初 n 個斐波那契數的平方和:

$$u_1^2+u_2^2+\cdots\cdots+u_n^2=u_nu_{n+1}. \tag{9}$$

我們注意

$$u_k u_{k+1} - u_{k-1}u_k = u_k(u_{k+1} - u_{k-1}) = u_k^2.$$

將等式

$$u_1^2 = u_1u_2, \qquad u_2^2 = u_2u_3 - u_1u_2,$$
$$u_3^2 = u_3u_4 - u_2u_3, \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$u_n^2 = u_nu_{n+1} - u_{n-1}u_n$$

兩邊加起來就得到(9).

5. 許多關於斐波那契數之間的關係，以完全歸納法來證明，較爲方便.

完全歸納法(也稱爲數學歸納法)的要義可以照下面來敍述：爲了要證明某一個和自然數關聯的命題，對於所有的自然數都成立，只要證明:

(1) 當該自然數爲 1 時命題成立;

(2) 如果對於一個任意選擇的自然數 n 命題是成立的，則對於自然數 $n+1$ 命題也成立.

因此，以歸納法來證明某一個命題對於所有的自然數都成立，這個證明就包含着兩部分.

在第一部分(通常是比較簡單的)中，我們確定所要證明的命題對於 1 是成立的. 證明的這一部分有時被稱爲**歸納的初段**. 在第二部分(通常是比較複雜的)中，是先假設了命題對於某一個任意(不固定的)自然數 n 爲眞，進而推出對於自然數 $n+1$ 命題也成立. 第二部分稱爲**歸納的推演**；第二部分中的假設通常稱爲**歸納法假設**.

對完全歸納法比較詳細的敍述，它的許多應用，以及它的各種不同的表現形式，讀者可以在 И. С. 索明斯基所寫的小册子'數學歸納法'*裏找到(這本小册子是'通俗數學講座'中的第三册，國家技術理論書籍出

---

* 我國已有高徽譯本. ——譯者註

版局 1950 年出版). 例如,歸納法有一種表現形式是'由 n 及 $n+1$ 推演到 $n+2$';這個變體在索明斯基的小冊子裏第 13 頁曾提到並且在第 20 頁問題 18 及 19 加以闡明.

讓我們用歸納法來證明下面的重要公式:

$$u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}. \tag{10}$$

對 m 用歸納法來證明這個公式. $m=1$ 時這個公式取如下的形式:

$$u_{n+1}=u_{n-1}u_1+u_nu_2=u_{n-1}+u_n,$$

它的成立顯然可以看出. $m=2$ 時公式(10)也眞,這是因爲

$$\begin{aligned}u_{n+2}=u_{n-1}u_2+u_nu_3=u_{n-1}+2u_n&=u_{n-1}+u_n+u_n\\&=u_{n+1}+u_n.\end{aligned}$$

歸納的初段是完成了. 至於歸納的推演,我們採用下面的形式:設公式(10)對於 $m=k$ 以及 $m=k+1$ 爲眞,求證它對於 $m=k+2$ 也成立.

因此,設已知 $$u_{n+k}=u_{n-1}u_k+u_nu_{k+1}$$

以及 $$u_{n+k+1}=u_{n-1}u_{k+1}+u_nu_{k+2}.$$

將以上兩個等式的兩邊分別加起來,我們得到

$$u_{n+k+2}=u_{n-1}u_{k+2}+u_nu_{k+3},$$

這正是所要證的結果.

在公式(10)中取 $m=n$, 我們得到

$$u_{2n}=u_{n-1}u_n+u_nu_{n+1},$$

或 $$u_{2n}=u_n(u_{n-1}+u_{n+1}) \tag{11}$$

由這裏就看出來 u_{2n} 可以被 u_n 除盡. 在下一節我們將要證更廣一些的結果.

因爲
$$u_n=u_{n+1}-u_{n-1},$$
所以公式(11)可以寫成
$$u_{2n}=(u_{n+1}-u_{n-1})(u_{n+1}+u_{n-1}),$$
或
$$u_{2n}=u_{n+1}^2-u_{n-1}^2,$$
這就是說, 指標相差 2 的兩個斐波那契數, 它們平方的差仍然是一個斐波那契數.

類似的步驟(取 $m=2n$)可以用來證明
$$u_{3n}=u_{n+1}^3+u_n^3-u_{n-1}^3.$$

6. 將來, 我們會要用到下面這個公式:
$$u_{n+1}^2=u_nu_{n+2}+(-1)^n. \tag{12}$$

對 n 用歸納法來證明這個公式. $n=1$ 時公式(12)取如下的形式:
$$u_2^2=u_1u_3-1,$$
這個顯然是對的.

現在設我們已經證明了公式(12) 對某一個數 n 是成立的. 在它的兩邊加上 $u_{n+1}u_{n+2}$. 我們得到
$$u_{n+1}^2+u_{n+1}u_{n+2}=u_nu_{n+2}+u_{n+1}u_{n+2}+(-1)^n,$$
或
$$u_{n+1}(u_{n+1}+u_{n+2})=u_{n+2}(u_n+u_{n+1})+(-1)^n,$$
或
$$u_{n+1}u_{n+3}=u_{n+2}^2+(-1)^n,$$
或
$$u_{n+2}^2=u_{n+1}u_{n+3}+(-1)^{n+1}.$$

如此就把公式(12)對於任何 n 的情形都證明了.

7. 和以上所證明的關於斐波那契數的性質相類似的，有以下的性質:

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\cdots\cdots+u_{2n-1}u_{2n}=u_{2n}^2,$$

$$u_1u_2+u_2u_3+u_3u_4+\cdots\cdots+u_{2n}u_{2n+1}=u_{2n+1}^2-1,$$

$$nu_1+(n-1)u_2+(n-2)u_3+\cdots\cdots+2u_{n-1}+u_n$$
$$=u_{n+4}-(n+3).$$

這幾個公式的證明我們讓讀者自己去補足.

8. 斐波那契數和另一類更可注意的數——二項式係數——之間存在着一些關聯. 我們現在就來指明一些這類關係. 將二項式係數依照下列方式排成所謂巴斯噶三角形:

$$\begin{array}{llll}
C_0^0 & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

也就是

$$\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

通過其中任意一數而和三角形的直角邊成 45° 角的一條直線稱爲巴斯噶三角形的**遞昇對角線**. 例如通過 1,4,3 或 1,5,6,1 的直線都是遞昇對角線.

讓我們來證明,在任意一條遞昇對角線上的各數的和是一個斐波那契數.

事實上,第一條遞昇對角線以及各遞昇對角線的端點都是 1. 第二條遞昇對角線只含一個 1. 爲了要證明我們所感興趣的那個命題,我們只消證明巴斯噶三角形中,第$(n-2)$和第$(n-1)$條遞昇對角線上各數的總和等於第 n 條遞昇對角線上各數的總和.

位於第$(n-2)$條遞昇對角線上的各數是

$$C_{n-3}^{0},\ C_{n-4}^{1},\ C_{n-5}^{2},\cdots\cdots,$$

位於第$(n-1)$條遞昇對角線上的各數則是

$$C_{n-2}^{0},\ C_{n-3}^{1},\ C_{n-4}^{2},\cdots\cdots$$

這些數的總和是

$$C_{n-2}^{0}+(C_{n-3}^{0}+C_{n-3}^{1})+(C_{n-4}^{1}+C_{n-4}^{2})+\cdots\cdots \qquad (13)$$

不過,就二項式係數而言

$$C_{n-2}^{0}=C_{n-1}^{0}=1$$

同時

$$\begin{aligned}
C_{k}^{i}+C_{k}^{i+1}&=\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots i}\\
&\quad+\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-i+1)(k-i)}{1\cdot 2\cdots\cdots i\cdot(i+1)}\\
&=\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots i}\left(1+\frac{k-i}{i+1}\right)\\
&=\frac{k(k-1)\cdots\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots i}\cdot\frac{i+1+k-i}{i+1}\\
&=\frac{(k+1)k(k-1)\cdots\cdots(k-i+1)}{1\cdot 2\cdots\cdots i\cdot(i+1)}=C_{k+1}^{i+1}.
\end{aligned}$$

因此(13)式等於

$$C_{n-1}^{0}+C_{n-2}^{1}+C_{n-3}^{2}+\cdots\cdots,$$

這就是說,等於巴斯噶三角形第 n 條對角線上各數的和.

由方才得到的這個結果及公式(3)立刻得到:在巴斯噶三角形的第 n 條遞昇對角線的上部(包括這條對角線在內)所有各數的總和等於 $u_{n+2}-1$.

利用公式(4),(5),(6)以及和它們相類似的公式,讀者不難得到斐波那契數和二項式係數之間更多的關係式.

9. 直到現在為止,我們判定斐波那契數都是採用了一種循環方式,就是說,對於指標用歸納法來判定.但是,可以證明,任意一個斐波那契數都可以直接規定作指標的函數.

為了這個目的,讓我們來研究一下滿足關係(2)的各種級數.我們叫這一類的級數做方程式(2)的解.

以下我們用 V, V' 及 V'' 分別表示下面的三個級數:

$$v_1,\ v_2,\ v_3,\cdots\cdots,$$

$$v_1',\ v_2',\ v_3',\cdots\cdots,$$

$$v_1'',\ v_2'',\ v_3'',\cdots\cdots.$$

首先證明兩個簡單的引.

〔引 1〕 若 V 為方程式(2)的一個解,c 是任意一個數,則 cV(這就是級數 $cv_1, cv_2, cv_3,\cdots\cdots$)也是方程式(2)的一個解.

〔證〕 將關係式

$$v_n=v_{n-2}+v_{n-1}$$

的兩邊各乘以 c,我們得到

$$cv_n = cv_{n-2} + cv_{n-1},$$

這就是所要的結果.

〔引2〕 **若級數 V' 與 V'' 都是方程式(2)的解,則它們的和 $V'+V''$(這就是級數 $v_1'+v_1''$, $v_2'+v_2''$, $v_3'+v_3''$,……)也是方程式(2)的解.**

〔證〕 由假設我們有

$$v_n' = v'_{n-1} + v'_{n-2}$$

以及

$$v_n'' = v''_{n-1} + v''_{n-2}.$$

把這兩個式子的兩邊各各相加,就得到

$$v_n' + v_n'' = (v'_{n-1} + v''_{n-1}) + (v'_{n-2} + v''_{n-2}).$$

這個引就證明了.

設 V' 與 V'' 爲方程式(2)的兩個解,它們中間沒有比例關係[就是說,方程式(2)的兩個那樣的解,對於任意一個數 c 一定可以找到一個指標 n 使得 $\frac{v_n'}{v_n''} \neq c$]. 我們來證明,方程式(2)的任意一個解 V 必定能够寫成如下的形式:

$$c_1V_1' + c_2V_2'', \tag{14}$$

其中 c_1 與 c_2 是適當的常數. 因此,可以說(14)是方程式(2)的通解.

首先我們證明,若方程式(2)的兩個解 V' 與 V'' 中間沒有比例關係,則

$$\frac{v_1'}{v_1''} \neq \frac{v_2'}{v_2''} \tag{15}$$

(這就是說 V' 與 V'' 的最初兩項就已經不成比例了).

用反證法來證(15)式. 假設方程式(2)的兩個解 V' 與 V'' 之間有下面的關係:

$$\frac{v_1'}{v_1''}=\frac{v_2'}{v_2''}. \tag{16}$$

由比例的性質，我們立刻得到

$$\frac{v_1'+v_2'}{v_1''+v_2''}=\frac{v_2'}{v_2''}$$

或者，當我們留意到 V' 與 V'' 都是(2)的解時，等於說

$$\frac{v_3'}{v_3''}=\frac{v_2'}{v_2''}.$$

同樣的手續可以繼續下去(歸納法!)，得到

$$\frac{v_3'}{v_3''}=\frac{v_4'}{v_4''}=\cdots\cdots=\frac{v_n'}{v_n''}=\cdots\cdots$$

因此，由(16)就可以推出級數 V' 與 V'' 是成比例的，和原來的假設矛盾. 因此(15)非成立不可.

現在任意拿方程式(2)的一個解 V 來看. 在前言第2節中已闡明，如果 V 的最初兩項 v_1 與 v_2 已決定，則 V 就可完全決定了.

求 c_1 與 c_2 使滿足方程式

$$\begin{aligned} c_1v_1'+c_2v_1''&=v_1,\\ c_1v_2'+c_2v_2''&=v_2. \end{aligned} \tag{17}$$

由引1及引2就知道 $c_1V'+c_2V''$ 正是我們原來的 V.

在(15)成立的條件下,無論 v_1 和 v_2 如何選擇,從方程式(17)可以解出 c_1 和 c_2:

$$c_1=\frac{v_1v_2''-v_2v_1''}{v_1'v_2''-v_1''v_2'},\quad c_2=\frac{v_1'v_2-v_2'v_1}{v_1'v_2''-v_1''v_2'}.$$

[因 (15) 成立所以分母不爲零.] 將所得到的 c_1 和 c_2 的數值代入(14)我們就得到 V 的本來要尋找的表示法.

以上的結果就表示說,爲了要知道方程式(2)所有的解,只消知道兩個無比例關係的解就够了.

我們現在來尋找這類的解而同時又成爲幾何級數的. 由引1知道我們只消考慮首項爲1的幾何級數就够了. 取級數如

$$1,\quad q,\quad q^2,\cdots\cdots$$

這個級數若要是(2)的一個解的話,則必須下式對於所有的 n 都成立:

$$q^{n-2}+q^{n-1}=q^n$$

或者,消去 q^{n-2},

$$1+q=q^2.$$

這個二次方程式的兩個根是 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 及 $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,這兩個數就是我們所要尋找的級數的公比. 我們分別以 α 及 β 來代表它們. 注意 $\alpha\beta=-1$.

這樣,我們就得到了方程式(2)的兩個解同時又是幾何級數. 因此,所有形式如

$$c_1+c_2,\ c_1\alpha+c_2\beta,\ c_1\alpha^2+c_2\beta^2,\ \cdots\cdots \tag{18}$$

各級數都是(2)的解. 我們所求得的兩個幾何級數具有不同的公比,因而這兩個級數之間也就沒有比例關係. 因此,我們以所有可能的 c_1 和 c_2 的數值代入(18)就可得到方程式(2)所有的解.

特別,對於某些 c_1 和 c_2 公式(18)所表示的是斐波那契級數,由以前所說的知道若要這件事成立, c_1 和 c_2 必須被下面的方程系所決定,即

$$c_1+c_2=u_1 \quad 和 \quad c_1\alpha+c_2\beta=u_2,$$

就是說,由方程系

$$c_1+c_2=1,$$

$$c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$

所決定.

解這個方程系,我們得到

$$c_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad c_2=-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}},$$

由此可得

$$u_n=c_1\alpha^{n-1}+c_2\beta^{n-1}=\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

也就是說

$$u_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}. \tag{19}$$

公式 (19) **稱爲比內公式**，是以最初證明它的數學家比內來命名的.

顯然地，對於方程式(2)其他的解也可求出和這個公式類似的公式. 讀者試對前言中第 2 小節所列舉的級數導出類似的公式.

10. 利用比內公式可以求許多與斐波那契數有關的級數的和. 例如，求下列級數的和:

$$u_3+u_6+u_9+\cdots\cdots+u_{3n}.$$

我們有

$$u_3+u_6+\cdots\cdots+u_{3n}=\frac{\alpha^3-\beta^3}{\sqrt{5}}+\frac{\alpha^6-\beta^6}{\sqrt{5}}+\cdots\cdots+\frac{\alpha^{3n}-\beta^{3n}}{\sqrt{5}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{5}}(\alpha^3+\alpha^6+\cdots\cdots+\alpha^{3n}-\beta^3-\beta^6-\cdots\cdots-\beta^{3n}),$$

再將其中出現的幾何級數的和求出來代入就得到

$$u_3+u_6+\cdots\cdots+u_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3}-\alpha^3}{\alpha^3-1}-\frac{\beta^{3n+3}-\beta^3}{\beta^3-1}\right).$$

但是

$$\alpha^3-1=\alpha+\alpha^2-1=\alpha+\alpha+1-1=2\alpha,$$

同理 $\beta^3-1=2\beta$. 因此

$$u_3+u_6+\cdots\cdots+u_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+3}-\alpha^3}{2\alpha}-\frac{\beta^{3n+3}-\beta^3}{2\beta}\right),$$

再加以簡化，

$$u_3+u_6+\cdots\cdots+u_{3n}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\alpha^2-\beta^{3n+2}+\beta^2}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^{3n+2}-\beta^{3n+2}}{\sqrt{5}}-\frac{\alpha^2-\beta^2}{\sqrt{5}}\right)=\frac{1}{2}(u_{3n+2}-u_2)=\frac{u_{3n+2}-1}{2}.$$

11. 下面一個例是利用比內公式來求最初 n 個斐波那契數的立方和.

首先注意

$$u_k^3=\left(\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}\right)^3=\frac{1}{5}\cdot\frac{\alpha^{3k}-3\alpha^{2k}\beta^k+3\alpha^k\beta^{2k}-\beta^{3k}}{\sqrt{5}}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{\alpha^{3k}-\beta^{3k}}{\sqrt{5}}-3\alpha^k\beta^k\frac{\alpha^k-\beta^k}{\sqrt{5}}\right)$$

$$=\frac{1}{5}[u_{3k}-(-1)^k3u_k]=\frac{1}{5}[u_{3k}+(-1)^{k+1}3u_k].$$

因此,

$$u_1^3+u_2^3+\cdots\cdots+u_n^3=\frac{1}{5}\{[u_3+u_6+\cdots\cdots+u_{3n}]$$

$$+3[u_1-u_2+u_3-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}u_n]\},$$

由公式(8)及前一小節的結果就得到

$$u_1^3+u_2^3+\cdots\cdots+u_n^3=\frac{1}{5}\left[\frac{u_{3n+2}-1}{2}+(-1)^{n+1}3u_{n-1}+3\right]$$

$$=\frac{u_{3n+2}+(-1)^{n+1}6u_{n-1}+5}{10}.$$

12. 現在我們到了一個地步,可以來處理這樣一個問題,當指標增大時斐波那契數增大的速度怎樣. 比內公式給這個問題一個盡善的答案.

不難證明下面的定理.

〔定理〕 令 a_n 表示首項為 $\frac{\alpha}{\sqrt{5}}$, 公比為 α 的幾何級數的

第n項，則同a_n最接近的一個整數正好就是斐波那契數u_n.

〔證〕 顯然我們只要證明u_n和a_n之差的絕對值總是小於$\frac{1}{2}$就够了．事實上

$$|u_n - a_n| = \left|\frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} - \frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}\right| = \left|\frac{\alpha^n - \alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}\right| = \frac{|\beta|^n}{\sqrt{5}}.$$

因爲$\beta = -0.68\cdots\cdots$，所以$|\beta| < 1$，即對於任何$n$我們有$|\beta|^n < 1$，並且(由於$\sqrt{5} > 2$) $\frac{|\beta|}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2}$．定理就完全證明了．

懂得極限觀念的讀者，很容易把上面的證明適當改變一下而得出

$$\lim_{n\to\infty} |u_n - a_n| = 0.$$

由於方才證明的這個定理就使我們能够依靠對數表來計算斐波那契數．

例如，計算u_{14}(容易了解u_{14}必然是斐波那契兔子問題的答案)：

$$\sqrt{5} = 2.2361, \qquad \log\sqrt{5} = 0.34949;$$

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180, \qquad \log\alpha = 0.20898;$$

$$\log\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 14 \times 0.20898 - 0.34949 = 2.5762,$$

$$\frac{\alpha^{14}}{\sqrt{5}} = 376.9.$$

同376.9最接近的整數是377；就是u_{14}.

對於指標數目很大的斐波那契數，我們不能够從對數表將它們完全決定，而只能決定開頭幾位數字，以至於所得的數僅僅是近似的數值.

作爲一個習題，讀者試證明，在十進位算法之下，當$n\geqslant 17$時 u_n 的數字位數不多於$\frac{n}{4}$，不少於$\frac{n}{5}$. 那末 u_{1000} 一共有幾位數?

二　斐波那契數的數論上的性質

在繼續討論斐波那契數之前，我們先讓讀者注意數論方面一些最簡單的知識.

1. 我們先說尋求數目 a 與 b 的最大公約數的方法.

若我們用 b 除 a，設所得的商爲 q_0，餘數爲 r_1，則顯然有 $a=bq_0+r_1$，而 $0\leqslant r_1<b$. 注意當 $a<b$ 時，$q_0=0$.

我們再用 r_1 除 b，以 q_1 記所得的商，r_2 記所得的餘數. 顯然有 $b=r_1q_1+r_2$，而 $0\leqslant r_2<r_1$. 因 $r_1<b$，故 $q_1\neq 0$. 其次，用 r_2 除 r_1，而得 $q_2\neq 0$ 及 r_3，使 $r_1=q_2r_2+r_3$，且 $0\leqslant r_3<r_2$. 這樣進行，一直到這種手續不能再繼續爲止.

因爲所有的正整數 $r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots$ 互不相同，並且都小於 b，所以我們的手續遲早必得終止. 由於 $r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots$ 的個數不多於 b，所以這種手續至多 b 步就可完成. 但它只能在某一次相除是整除，就是說，當餘數爲零時，才停止，這時要再除也

就不可能了.

上面所述的手續稱爲歐氏運算. 將它運用到數 a 與 b, 我們即得如下的一列等式:

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_n. \end{aligned} \tag{20}$$

我們現在來討論最後一個異於零的餘數 r_n. r_{n-1} 顯然能被 r_n 除盡. 現在由(20)中取出倒數第二個等式. 它右邊的兩個項都能被 r_n 除盡, 因而 r_{n-2} 也能被 r_n 除盡. 同法繼續進行(歸納法!), 我們可以看出, r_n 能除盡 $r_{n-3}, r_{n-4}, \cdots\cdots$, 最後, 能除盡 a 與 b. 故 r_n 爲 a 與 b 的公約數. 我們現在來證明, r_n 就是 a 與 b 的最大公約數. 要證明這, 我們只須證明 a 與 b 的每一公約數都能除盡 r_n 即可.

令 d 爲 a 與 b 的任一個公約數. 根據(20)的第一個等式, 我們可以看出 d 必能除盡 r_1. 然後再由(20)的第二個等式, d 能除盡 r_2. 同法(歸納法!)我們可證明 d 能除盡 $r_3 \cdots\cdots$, r_{n-1}, 最後, 能除盡 r_n.

這樣一來, 我們已經證明, 歐氏運算在運用到自然數 a 與 b 時, 的確可得到它們的最大公約數. a 與 b 的最大公約數, 我們用 (a,b) 來記它.

現以$(u_{20}, u_{15})=(6765, 610)$為例:

$$6765=610\cdot 11+55,$$
$$610=55\cdot 11+5,$$
$$55=5\cdot 11.$$

由此得$(u_{20}, u_{15})=5=u_5$. 因此,兩個斐波那契數的最大公約數有時也是斐波那契數. 以後我們將證明,事實上一般都是這樣.

2. 幾何中在尋求兩條可通約線段的公約量*時也遇到類似歐氏運算的手續.

我們現在來討論兩條線段: 一條的長為 a, 另一條的長為 b. 從第一線段中,讀出儘可能有的第二線段的倍數(顯而易見,若 $b>a$,我們一次也不能讀出),而用 r_1 記餘下的長. 顯然有 $r_1<b$. 現由第二線段中,讀出儘可能有的長為 r_1 之線段的倍數,而用 r_2 記再得出的剩餘線段. 這樣繼續進行,我們就得出一串剩餘線段,它們的長顯然是遞減的. 如我們所見,一直到此,完全與歐氏運算相似.

然而在對於自然數的歐氏運算與上述幾何的手續中間卻顯出重要差別: 因為像這樣讀出線段的手續可能引到無限多次數,所以這樣得出的剩餘線段列可能中斷,也可能一直下去. 若我們最初所取的兩條線段是不可通約的,就是後面這種情形.

由本章第一節所論,我們可以看出: 若兩條線段的長可用整數來表示,則它們常是可通約的.

我們現在來建立兩個數目的最大公約數的一些簡單性質.

---

*所謂兩條可通約線段,是指可用同一線段作為單位來量盡的二線段;能同時量盡這二線段的最長線段,稱為它們的公約量.——譯者註

3. (a,bc)可爲(a,b)除盡. 事實上,b能被(a,b)除盡,因而bc也能被(a,b)除盡,a顯然也能被(a,b)除盡. 由第1節的證明,這就指出(a,bc)能被(a,b)除盡.

4. $(ac,bc)=(a,b)c$.

〔證〕 (20)的各等式卽描寫出尋求(a,b)的過程. 以c遍乘各等式的每一項,我們得到一系列的等式,容易證明,它們正是構成運用於數目ac與bc的歐氏運算. 對於這運算,最後不爲零的餘數將等於r_nc,卽$(a,b)c$.

5. 若$(a,c)=1$,則$(a,bc)=(a,b)$. 事實上,由第3節,(a,bc)是(ab,bc)的一個約數. 但由第4節

$$(ab,bc)=(a,c)b=1\cdot b=b.$$

故知b可被(a,bc)除盡. 另一方面,(a,bc)是a的一個約數. 由第1節的證明,這就指出,(a,bc)能除盡(a,b). 但由第3節,(a,b)能除盡(a,bc),故$(a,b)=(a,bc)$.

6. a能被b除盡的充分而且必要的條件是$(a,b)=b$. 這是顯而易見的.

7. 若c能被b除盡,則$(a,b)=(a+c,b)$.

〔證〕 設對於數目a與b運用歐氏運算而得出一系列等式(20). 現在將這運算施用於數目$a+c$與b. 因由假設,c能被b除盡,故可令$c=c_1b$,運算的第一步就給與我們一個等式:

$$a+c=(q_0+c_1)b+r_1.$$

這運算中以後的各步就是序列(20)的第二、第三等等等式.

如前，最後不爲零的餘數卽爲 r_n，也就是說 $(a, b)=(a+c, b)$.

只借助第 3-6 節的結果，就是說，不要重又回到歐氏運算的概念及序列(20)，來證明本定理，對於讀者將是一個有用的習題.

現在我們來討論斐波那契數的一些有關可除性的性質.

8.〔定理〕 若 n 能被 m 除盡，則 u_n 也能被 u_m 除盡.

〔證〕 設 n 可被 m 除盡，卽 $n=mm_1$. 我們現在就 m_1 施用歸納法來證明.

若 $m_1=1$, $n=m$, 則對此種情形，u_n 顯然能被 u_m 除盡. 今假定，u_{mm_1} 能被 u_m 除盡，而來討論 $u_{m(m_1+1)}$. 但 $u_{m(m_1+1)}=u_{mm_1+m}$，由(10)，

$$u_{m(m_1+1)}=u_{mm_1-1}u_m+u_{mm_1}u_{m+1}.$$

上式右邊第一項顯然能被 u_m 除盡. 其第二項是 u_{mm_1} 的倍數，由歸納法假設，也能被 u_m 除盡. 故 u_m 能除盡它們的和卽 $u_{m(m_1+1)}$. 本定理卽已證明.

9. 最有趣的是斐波那契數關於它的約數的算術性質的問題. 我們現在來證明：若 n 爲異於 4 的合數，則 u_n 也是一個合數.

事實上，對於這樣的 n，我們可以將它寫成 $n=n_1n_2$，這裏 $1<n_1<n$, $1<n_2<n$ 而且或者 $n_1>2$, 或者 $n_2>2$. 不妨假定 $n_1>2$. 則由剛才所證明的定理，u_n 能被 u_{n_1} 除盡，在這裏 $1<u_{n_1}<u_n$, 也就是說，u_n 是一個合數.

10. 〔定理〕 **相鄰的兩個斐波那契數是互質數.**

〔證〕 現在假定這定理不成立，設 u_n 與 u_{n+1} 有一個公約數 $d>1$. 則它們的差 $u_{n+1}-u_n$ 也能被 d 除盡. 但因 $u_{n+1}-u_n=u_{n-1}$，故 u_{n-1} 也能被 d 除盡. 同法可以證明(歸納法!) d 能除盡 u_{n-2}, u_{n-3} 等等，最後，也能除盡 u_1. 但 $u_1=1$，故不可能為 $d>1$ 除盡. 這就得一矛盾. 本定理卽已證明.

11. 〔定理〕 **等式** $(u_m,u_n)=u_{(m,n)}$ **成立.**

〔證〕 現在不妨假定 $m>n$. 施用歐氏運算於數目 m 與 n:

$$m=nq_0+r_1, \quad 這裏\ 0\leqslant r_1<n,$$

$$n=r_1q_1+r_2, \quad 這裏\ 0\leqslant r_2<r_1,$$

$$r_1=r_2q_2+r_3, \quad 這裏\ 0\leqslant r_3<r_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$r_{t-2}=r_{t-1}q_{t-1}+r_t, \quad 這裏\ 0\leqslant r_t<r_{t-1},$$

$$r_{t-1}=r_tq_t.$$

如我們所知，r_t 是 m 與 n 的最大公約數.

由 $m=nq_0+r_1$ 卽得

$$(u_m,u_n)=(u_{nq_0+r_1},u_n),$$

或

$$(u_m,u_n)=(u_{nq_0-1}u_{r_1}+u_{nq_0}u_{r_1+1},u_n),$$

由第8與第7節有

$$(u_m,u_n)=(u_{nq_0-1}u_{r_1},u_n).$$

由第10與第5節有

$$(u_m,u_n)=(u_{r_1},u_n).$$

同法可以證明

$$(u_{r_1}, u_n) = (u_{r_2}, u_{r_1}),$$

$$(u_{r_2}, u_{r_1}) = (u_{r_3}, u_{r_2})$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$(u_{r_{t-1}}, u_{r_{t-2}}) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}}).$$

比較所有的等式，卽得

$$(u_m, u_n) = (u_{r_t}, u_{r_{t-1}}),$$

但因 r_{t-1} 能被 r_t 除盡，故 $u_{r_{t-1}}$ 也能被 u_{r_t} 除盡，因而 $(u_{r_t}, u_{r_{t-1}}) = u_{r_t}$. 注意 $r_t = (m, n)$，我們卽得所求.

特別，由剛才所證，我們卽得第 8 節的逆定理：若 u_m 能除盡 u_n，則 m 能除盡 n. 事實上，若 u_m 能除盡 u_n，則由第 6 節

$$(u_n, u_m) = u_m. \tag{21}$$

但由所證，

$$(u_n, u_m) = u_{(n, m)}. \tag{22}$$

比較(21)與(22)，我們卽得

$$u_m = u_{(n,m)},$$

卽得，$m = (n, m)$，而這就是說 n 能爲 m 除盡.

12. 結合第 8 節之定理及第 11 節之定理之系，我們有：**u_n 爲 u_m 除盡之充分而且必要的條件是 n 能爲 m 除盡.**

由此，關於斐波那契數的可除性，我們可以由討論它的指標的可除性來判斷.

例如現在我們將得出一些斐波那契數的'可除性判定法'．在這裏，所謂可除性判定法，我們是指某種方法，依靠它，我們可以決定一個斐波那契數是否可以被某一個已知的數除盡．

斐波那契數是偶數的充分而且必要的條件是它的指標能被 3 除盡．

斐波那契數能被 3 除盡的充分而且必要的條件是它的指標能被 4 除盡．

斐波那契數能被 4 除盡的充分而且必要的條件是它的指標能被 6 除盡．

斐波那契數能被 5 除盡的充分而且必要的條件是它的指標能被 5 除盡．

斐波那契數能被 7 除盡的充分而且必要的條件是它的指標能被 8 除盡．

所有這些以及其他類似的可除性判定法，讀者可由本節開始時所述的命題，而分別考慮第三、第四、第六、第五、第八個斐波那契數即容易得出．

讀者同時可以證明：用 8 除後餘數爲 4 的斐波那契數不存在，也沒有可被 17 除盡的奇斐波那契數．

13. 現在任取一個整數 m. 若有一個斐波那契數 u_n 可被 m 除盡，則我們可以找到任意多個能被 m 除盡的斐波那契數．例如數目 u_{2n}, u_{3n}, u_{4n}, ……即是．

現在有趣的是在確定：對於一個已知數 m，我們是否可以

找到一個可被它除盡的斐波那契數.　下面將證明，這是可能的.

令 $\bar{k}$ 表示用 m 除 k 所得的餘數.　我們現在寫出一序列由這樣的餘數所作成的對:

$$<\bar{u}_1, \bar{u}_2>, <\bar{u}_2, \bar{u}_3>, <\bar{u}_3, \bar{u}_4>, \cdots\cdots, <\bar{u}_n, \bar{u}_{n+1}>, \cdots\cdots. \quad (23)$$

若我們規定兩個數對 $<a_1, b_1>$ 與 $<a_2, b_2>$ 當 $a_1=b_1$ 與 $a_2=b_2$ 時相等，則用 m 除後所得的餘數作成的數對的全體，其中不相等的數目爲 m^2.　因之，若在級數(23)中取出首先的 m^2+1 個，則其中必定出現相等的數對.

設 $<\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}>$ 爲在級數(23)中首先重複的一對.　我們現在將指出，這對就是 $<1, 1>$.　事實上，假若不然，就是說，假定第一次重複的數對是 $<\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}>$，而 $k>1$.　在(23)中，我們找出與 $<\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}>$ 相等的數對 $<\bar{u}_l, \bar{u}_{l+1}>(l>k)$.　因 $u_{l-1}=u_{l+1}-u_l$ 及 $u_{k-1}=u_{k+1}-u_k$，而 $\bar{u}_{l+1}=\bar{u}_{k+1}$, $\bar{u}_l=\bar{u}_k$，故用 m 除 u_{l-1} 及 u_{k-1} 所得的餘數也相同，即是說 $\bar{u}_{l-1}=\bar{u}_{k-1}$.　由此可知 $<\bar{u}_{k-1}, \bar{u}_k>=<\bar{u}_{l-1}, \bar{u}_l>$，但數對 $<\bar{u}_{k-1}, \bar{u}_k>$ 在級數(23)中出現比 $<\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}>$ 爲早，故 $<\bar{u}_k, \bar{u}_{k+1}>$ 不是首先重複的數對，這與我們的假設相衝突.　故知 $k>1$ 的假定是不對的，也就是說 $k=1$.

由是可知，$<1, 1>$ 是(23)中首先重複的數對. 設它在第 t 個位置重複(由剛才所說，我們可以假定 $1<t<m^2+1$)，就是說 $<\bar{u}_t, \bar{u}_{t+1}>=<1, 1>$. 此即說明 u_t 與 u_{t+1} 在用 m 除後

有同樣的餘數. 也即是說它們的差能爲 m 整除. 但

$$u_{t+1}-u_t=u_{t-1},$$

故第$(t-1)$個斐波那契數能被 m 除盡.

如是,我們業已證明下面的定理.

〔定理〕 **任給一個整數 m,則在前面 m^2 個斐波那契數中必有一個能被 m 除盡.**

我們要注意,定理的證明並未肯定是哪一個斐波那契數能被 m 除盡. 它只說,第一個能被 m 除盡的斐波那契數一定不會很大.

三 斐波那契數與連分數

1. 我們現在來討論式子

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{q_3+\cdots\cdots+\cfrac{1}{q_n}}}},\tag{24}$$

這裏 $q_1, q_2, \cdots\cdots q_n$, 是**正**整數,而 q_0 則是**非負**整數. 如是,數 q_0 與數 $q_1, q_2, \cdots\cdots, q_n$ 不同,它可以等於零. 這關於數 q_0 的多少有些特別的假定,我們要常記在心裏,以後將不在每次特別提及.

(24)式稱爲**連分數**,而數 $q_0, q_1, \cdots\cdots, q_n$ 則稱爲這連分數

的部分商．連分數在許多的數學問題中都有用處．讀者若欲加以詳細了解，可參考 A. Я. 亨琴所著‘連分數’．將某一數變成連分數的手續稱爲展開這個數成一個連分數．

我們現在來看在將一個普通分數 $\frac{a}{b}$ 作這樣的展開時，如何去尋求它的部分商．

爲此，我們現在對於數目 a 與 b 施用歐氏運算：

$$\begin{aligned} a &= bq_0 + r_1, \\ b &= r_1q_1 + r_2, \\ r_1 &= r_2q_2 + r_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-2} &= r_{n-1}q_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} &= r_nq_n. \end{aligned} \tag{25}$$

由(25)的第一等式即得

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{r_1}{b} = q_0 + \frac{1}{\frac{b}{r_1}}.$$

但由第二等式即得

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}},$$

故

$$\frac{a}{b} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}}.$$

由(25)的第三等式，我們得

$$\frac{r_1}{r_2}=q_2+\frac{r_3}{r_2}=q_2+\cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}},$$

因之

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cfrac{1}{\cfrac{r_2}{r_3}}}}.$$

繼續進行這種手續(歸納法!)，我們容易看出，最後卽得

$$\frac{a}{b}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots\cdots+\cfrac{1}{q_n}}}.$$

由歐氏運算本身，我們可以知道 $q_n>1$. (若 q_n 等於 1，則 r_{n-1} 等於 r_n，而 r_{n-2} 卽可被 r_{n-1} 整除，也就是說整個的運算早一步卽已終止.) 由此，我們可以用 $(q_n-1)+\frac{1}{1}$ 去替代 q_n 來討論，卽是說，我們可以把 (q_n-1) 作爲是倒數第二個部分商，而 1 則是最後一個. 這樣的默契對於以後的討論是相當方便的.

歐氏運算在施用到任何一對已知自然數 a 與 b 時，是一種有完全一定性及唯一決定性的運算. 由此運算中的一序列等式所規定的，將 $\frac{a}{b}$ 展開成連分數時所得的部分商也是唯一

決定的. 所以,對於每一個有理分數 $\frac{a}{b}$,我們可以用一種方法,而且也只有一種方法,將它展開成連分數.

2. 設

$$\omega=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots+\cfrac{1}{q_n}}} \tag{26}$$

是某一個連分數,我們現在來討論下面的數:

$$q_0,\ q_0+\frac{1}{q_1},\ q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}},\cdots\cdots$$

這些數,寫成普通既約分數的形式:

$$\frac{P_0}{Q_0}=\frac{q_0}{1},$$

$$\frac{P_1}{Q_1}=q_0+\frac{1}{q_1},$$

$$\frac{P_2}{Q_2}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{P_n}{Q_n}=\omega,$$

稱爲連分數 ω 的收斂子.

注意,由 $\frac{P_k}{Q_k}$ 到 $\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$ 的推演,我們可以由構成這些收斂子的最後一個部分商的替代來完成,就是說用 $q_k+\frac{1}{q_{k+1}}$ 去代

替 q_k.

3. 下面的引在連分數論中佔有很重要的地位:

〔引〕 **對於一切連分數(26),有下列的關係:**

$$P_{k+1}=P_k q_{k+1}+P_{k-1}, \tag{27}$$

$$Q_{k+1}=Q_k q_{k+1}+Q_{k-1}, \tag{28}$$

$$P_{k+1}Q_k-P_kQ_{k+1}=(-1)^k. \tag{29}$$

我們現在同時對 k 施用歸納法來證明這三個等式.

我們先就 $k=1$ 來證明:

$$\frac{P_1}{Q_1}=q_0+\frac{1}{q_1}=\frac{q_0q_1+1}{q_1}.$$

因爲數 q_0q_1+1 與 q_1 是互質數,故 $\frac{q_0q_1+1}{q_1}$ 是既約分數. 由定義 $\frac{P_1}{Q_1}$ 也是既約分數. 但相等的既約分數須有同樣的分子和分母,故得 $P_1=q_0q_1+1$ 及 $Q_1=q_1$.

$$\frac{P_2}{Q_2}=q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}}=\frac{q_0(q_1q_2+1)+q_2}{q_1q_2+1}. \tag{30}$$

由第二章第7節,數 $q_0(q_1q_2+1)+q_2$ 與 q_1q_2+1 的最大公約數等於 (q_2, q_1q_2+1),據同一理由,這就等於 $(q_2, 1)$,也就是 1. 這就說明(30)右邊的分數是既約的,因而有

$$P_2=q_0(q_1q_2+1)+q_2=(q_0q_1+1)q_2+q_0=P_1q_2+P_0$$

及 $$Q_2=q_1q_2+1=Q_1q_2+Q_0.$$

等式 $$P_2Q_1-P_1Q_2=(-1)^1$$

的成立不難證明.

這就證明了歸納的初段.

現在假定等式(27),(28),(29)是對的,而來討論收斂子

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}=\frac{P_k q_{k+1}+P_{k-1}}{Q_k q_{k+1}+Q_{k-1}}.$$

由前面所作的注意,從$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$到$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}$的推演可以用 $q_{k+1}+\frac{1}{q_{k+2}}$ 去替代$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}$的表示式中的 q_{k+1} 來完成;因為在 P_k, Q_k, P_{k-1}, Q_{k-1} 的表示式中並不包含 q_{k+1},故

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}=\frac{P_k\left(q_{k+1}+\frac{1}{q_{k+2}}\right)+P_{k-1}}{Q_k\left(q_{k+1}+\frac{1}{q_{k+2}}\right)+Q_{k-1}},$$

記住歸納法假設(27)與(28)成立,卽得

$$\frac{P_{k+2}}{Q_{k+2}}=\frac{P_{k+1}q_{k+2}+P_k}{Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k}. \tag{31}$$

現在我們來證明(31)的右邊是一個既約分數. 為此,我們只須指出它的分子與分母是互質數卽可.

假定數 $P_{k+1}q_{k+2}+P_k$ 與 $Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k$ 有一個公約數 $d>1$. 則式子

$$(P_{k+1}q_{k+2}+P_k)Q_{k+1}-(Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k)P_{k+1}$$

也一定能被 d 除盡. 但由歸納法假設 (29),這個式子等於 $(-1)^{k+1}$ 而不可能被 d 除盡.

由是可知,(31)的右邊是一既約分數,因而(31)是由兩個

既約分數做成的等式. 這就指出

$$P_{k+2}=P_{k+1}q_{k+2}+P_k$$

及

$$Q_{k+2}=Q_{k+1}q_{k+2}+Q_k.$$

要完成證明中歸納的推演,我們還須指出

$$P_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+2}=(-1)^{k+1}. \tag{32}$$

這個已經證明了的等式

$$P_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_{k+2}=P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1}+P_kQ_{k+1}$$
$$-P_{k+1}q_{k+2}Q_{k+1}-P_{k+1}Q_k,$$

由歸納法假設(29),(32)成立卽可得出. 由此,歸納的推演卽已建立,而整個的引也已證明.

〔系〕

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}-\frac{P_k}{Q_k}=\frac{(-1)^k}{Q_kQ_{k+1}}. \tag{33}$$

證明甚爲顯然.

因爲連分數的部分商都是正整數,故由剛才所證明的引,卽得

$$\begin{aligned}&P_0<P_1<P_2<\cdots\cdots,\\&Q_0<Q_1<Q_2<\cdots\cdots\end{aligned} \tag{34}$$

這項簡單而重要的注意我們以後還要作精密的討論.

4. 我們現在運用第3節的引來描述部分商皆等於1的所有連分數. 對於這種分數,我們有下面的有趣定理.

〔定理〕 **若一個連分數有 n 個部分商,每一個部分商都**

等於 1,則這個連分數等於 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

〔證〕 我們用 α_n 來記這個以 n 個 1 爲部分商之連分數. 顯而易見,

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots, \alpha_n$$

是 α_n 的一序列收斂子.

令 $$\alpha_k = \frac{P_k}{Q_k}.$$

因爲 $$\alpha_1 = 1 = \frac{1}{1}.$$

又 $$\alpha_2 = 1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1},$$

故 $P_1 = 1, P_2 = 2$. 再, $P_{n+1} = P_n q_{n+1} + P_{n-1} = P_n + P_{n-1}$. 由是有(比較第一章第 8 節) $P_n = u_{n+1}$.

同理, $Q_1 = 1, Q_2 = 1$, 又 $Q_{n+1} = Q_n q_{n+1} + Q_{n-1} = Q_n + Q_{n-1}$, 故得 $Q_n = u_n$. 這就說明,

$$\alpha_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}. \tag{35}$$

讀者可將這結果與公式(12)及(29)比較.

5. 設現有兩個連分數 ω 與 ω':

$$\omega = q_0 + \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cdots}}, \qquad \omega' = q_0' + \cfrac{1}{q_1' + \cfrac{1}{q_2' + \cdots}},$$

這裏

$$q_0' \geqslant q_0, \ q_1' \geqslant q_1, \ q_2' \geqslant q_2, \cdots\cdots \tag{36}$$

用

$$\frac{P_0}{Q_0},\ \frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_2}{Q_2},\cdots\cdots$$

表 ω 的收斂子,用

$$\frac{P_0'}{Q_0'},\ \frac{P_1'}{Q_1'},\ \frac{P_2'}{Q_2'},\cdots\cdots$$

表 ω' 的收斂子.

由第3節的引和(36),我們容易看出

$$P_0' \geqslant P_0,\quad P_1' \geqslant P_1,\quad P_2' \geqslant P_2,\cdots\cdots$$

$$Q_0' \geqslant Q_0,\quad Q_1' \geqslant Q_1,\quad Q_2' \geqslant Q_2,\cdots\cdots$$

所有的部分商中,有最小值的顯然是1. 由此可知,若某一連分數的所有部分商都是1,則它的收斂子的分子和分母比其他任何連分數的收斂子的分子和分母要增加得慢些.

我們現在來估計這增加的緩慢程度. 顯而易見,若不考慮部分商都是1的連分數,則收斂子的分子和分母增加得最慢的連分數,當推除去一個部分商為2外,其餘的部分商都是1的連分數. 這種連分數與斐波那契數也有關聯,正如下面的引所指出的.

〔引〕 **若連分數 ω 的部分商為 $q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots q_n$, 而**

$$q_0=q_1=q_2=\cdots\cdots=q_{i-1}=q_{i+1}=\cdots\cdots=q_n=1,\ q_i=2\ (i\neq 0),$$

則

$$\omega=\frac{u_{i+1}u_{n-i+3}+u_iu_{n-i+1}}{u_iu_{n-i+3}+u_{i-1}u_{n-i+1}}.$$

〔證〕 我們現在關於 i 用歸納法來證明它.

若 $i=1$,則對所有的 n

$$\omega=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cdots+\cfrac{1}{1}}},$$

$n-1$ 個部分商 $\Big\{$

由本節開頭所證，

$$\omega=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{a_{n-1}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{u_{n-1}}{u_n}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{2u_n+u_{n-1}}{u_n}}$$

$$=1+\frac{u_n}{u_{n+2}}=\frac{u_{n+2}+u_n}{u_{n+2}},$$

若設 $u_0=0$，則

$$\omega=\frac{u_2u_{n+2}+u_1u_n}{u_1u_{n+2}+u_0u_n}.$$

這就證明了歸納的初段.

現在設對於所有的 n

$$i\text{ 個部分商}\left\{1+\cfrac{1}{1+\cdots+1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{a_{n-i}}}}\right.$$

$$=\frac{u_{i+1}u_{n-i+3}+u_iu_{n-i+1}}{u_iu_{n-i+3}+u_{i-1}u_{n-i+1}}. \tag{37}$$

現在取連分數

$$i+1\text{ 個部分商}\left\{1+\cfrac{1}{1+\cdots+1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{a_{n-i-1}}}}\right..$$

顯而易見，這連分數可看成是

$$1+\cfrac{1}{\cdots\cdots\cdots}$$

$$i\text{ 個部分商}\left\{1+\cdots+1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{a_{n-i-1}}}\right.. \tag{38}$$

(38)中在虛線以下的連分數，根據(37)，等於

$$\frac{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_iu_{n-i}}{u_iu_{n-i+2}+u_{i-1}u_{n-i}}.$$

由此可知,整個的分數(38)等於

$$1+\frac{1}{\dfrac{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_iu_{n-i}}{u_iu_{n-i+2}+u_{i-1}u_{n-i}}}=\frac{(u_i+u_{i+1})u_{n-i+2}+(u_{i-1}+u_i)u_{n-i}}{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_iu_{n-i}}$$

$$=\frac{u_{i+2}u_{n-i+2}+u_{i+1}u_{n-i}}{u_{i+1}u_{n-i+2}+u_iu_{n-i}}.$$

這就證明了歸納的推演,而整個的引也就證明了.

〔系〕 若連分數 ω 的部分商不全都是 1, $q_0\neq0$, 又若這些部分商的個數不少於 n 個,則將 ω 寫成普通分數 $\frac{P}{Q}$ 時,我們有

$$P\geqslant u_{i+1}u_{n-i+3}+u_iu_{n-i+1}>u_{i+1}u_{n-i+2}+u_iu_{n-i+1}=u_{n+2},$$

同理 $$Q>u_{n+1}.$$

在這裏,第 3 節的引扮演着一個主要的脚色,由於它,在將一個連分數簡化爲普通分數的過程中,我們僅得到既約分數. 因此,由於它的既約性,所得的分數的分子和分母將不會產生減少的情形.

6. 由上節所證,我們可得下面的定理,它指出斐波那契數在歐氏運算的特殊地位.

〔定理〕 **若我們對於兩個數 a 與 b 施用歐氏運算,則這運算的步數,在 $b=u_n$ 時,對於某些 a 是 $n-1$, 在 $b<u_n$ 時,對於所有的 a 都小於 $n-1$.**

〔證〕 定理的第一部分證明很簡單. 因爲 a 只須取緊跟在 b 後面的斐波那契數,卽 u_{n+1} 卽可. 這時

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\alpha_n.$$

連分數 α_n 有 n 個部分商,就是說,歐氏運算的步數,在施用於數 a 與 b 時,等於 $n-1$.

我們現來證明定理的第二部分. 假設定理不成立,就是說,歐氏運算的步數不小於 $n-1$. 將比 $\frac{a}{b}$ 展開成連分數 ω. 顯而易見, ω 的部分商將不小於 n 個(顯然比歐氏運算的步數多 1). 因 b 不是斐波那契數,故 ω 的部分商不全是 1, 因而由第 5 節的引, $b>u_n$, 這與定理的條件相反.

上面的定理指出,歐氏運算當運用到相鄰的斐波那契數時,在某種意義上是'等長'.

7. 式

$$q_0+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\dots+\cfrac{1}{q_n+\dots}}} \tag{39}$$

稱爲無限連分數. 上段的定義及結果可以自然地擴展到無限連分數.

令

$$\frac{P_0}{Q_0},\ \frac{P_1}{Q_1},\dots\dots,\frac{P_n}{Q_n},\dots\dots \tag{40}$$

爲分數(39)的一列(顯然是無限的)收斂子. 現在證明這個級數是有極限的.

爲此,我們現在分别考慮級數:

$$\frac{P_0}{Q_0},\ \frac{P_2}{Q_2},\dots\dots,\frac{P_{2n}}{Q_{2n}},\dots\dots \tag{41}$$

和

$$\frac{P_1}{Q_1},\ \frac{P_3}{Q_3},\dots\dots,\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}},\dots\dots \tag{42}$$

由(33)與(34),

$$\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}-\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}=\frac{P_{2n+2}}{Q_{2n+2}}-\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}+\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}-\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}$$

$$=\frac{-1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}}+\frac{1}{Q_{2n+1}Q_{2n}}>0.$$

這就指出,級數(41)是一個遞增級數. 同理,由

$$\frac{P_{2n+3}}{Q_{2n+3}}-\frac{P_{2n+1}}{Q_{2n+1}}=\frac{1}{Q_{2n+3}Q_{2n+2}}-\frac{1}{Q_{2n+2}Q_{2n+1}}<0,$$

可知級數(42)是一個遞減級數.

級數(42)中所有的數都大於級數(41)中所有的數. 事實上,讓我們現在來討論數

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \text{ 及 } \frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}},$$

我們現在取一個奇數 k,大於 $2n$ 及 $2m+1$. 由(33)即得

$$\frac{P_k}{Q_k}>\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}, \tag{43}$$

又因(41)是遞增級數,(42)是遞減級數,即得

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}}>\frac{P_{2n}}{Q_{2n}} \tag{44}$$

和

$$\frac{P_k}{Q_k}<\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}. \tag{45}$$

比較(43),(44)及(45),我們有

$$\frac{P_{2n}}{Q_{2n}}<\frac{P_{2m+1}}{Q_{2m+1}}.$$

由(33)及(34)

$$\left|\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}}-\frac{P_n}{Q_n}\right|=\frac{1}{Q_{n+1}Q_n}<\frac{1}{n^2},$$

因此，當 n 增大時，第 $n+1$ 個與第 n 個收斂子的差的絕對值趨於零。

由上所述，我們可知級數(41)及(42)有一個同樣的極限，它顯然就是(40)的極限．**這個極限稱爲無限連分數(39)的值．**

我們現在來證明，任何數都不能是上面這個連分數的一個值．爲此，我們現在取兩個連分數 ω 與 ω'（有限或無限都是一樣）．設 $q_0, q_1, q_2, \cdots\cdots$ 與 $q_0', q_1', q_2', \cdots\cdots$ 分別是它們的部分商．現在證明，由 $\omega=\omega'$ 即得 $q_0=q_0'$，$q_1=q_1'$，$q_2'=q_2'$，等等．事實上，q_0 是 ω 的整數部分，q_0' 是 ω' 的整數部分，所以 $q_0=q_0'$．再，連分數 ω 與 ω' 可以分別表示爲

$$q_0+\frac{1}{\omega_1} \quad 及 \quad q_0'+\frac{1}{\omega_1'},$$

這裏 ω_1 與 ω_1' 是新的連分數．由 $\omega=\omega'$ 及 $q_0=q_0'$，即得 $\omega_1=\omega_1'$．這就說明數 ω_1 與 ω_1' 的整數部分也相等，也就是說 $q_1=q_1'$．繼續這種論證（歸納法！），即得 $q_2=q_2'$，$q_3=q_3'$ 等等．

因爲有理數常可展開爲有限連分數，故由剛才所證，它不能再展開成無限連分數．由是可知，無限連分數的值必須是無理數．

將無理數展開爲連分數的理論是數論上內容深入而結果有趣的一支． 在這裏，我們將不深研這種理論，而只用一個與斐波那契數有關的例題來作結束．

8. 現在求下面無限連分數的值：

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots\cdots}}$$

由上所證，這個值就是 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$. 我們現在來計算這個極限.

如在第一章第12節中所指出的，u_n 是最靠近 $\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}$ 的整數；就是說，

$$u_n=\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}+\theta_n,$$

此處 $|\theta_n|<\frac{1}{2}$，無論任何 n 皆成立.

因此，由本章第4節所證，

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\sqrt{5}}+\theta_{n+1}}{\frac{\alpha^n}{\sqrt{5}}+\theta_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha+\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}}{1+\frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\alpha+\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}\right)}.$$

但 $\theta_{n+1}\sqrt{5}$ 是一有限的值（它的絕對值小於2），而 α^n 則隨 n 的值趨於無窮（因 $\alpha>1$）. 這就說明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_{n+1}\sqrt{5}}{\alpha^n}=0.$$

同理，有
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta_n\sqrt{5}}{\alpha^n}=0,$$

故得
$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\alpha.$$

剛才所證的定理說明，相鄰的兩個斐波那契數的比隨它的指標的增加而趨於 α. 它可用來作數 α 的近似計算（比較

第一章第 12 節中 u_n 的計算). 由這種計算所得的誤差,卽使我們所取的斐波那契數不大,也是很小. 例如(在小數五位以內)

$$\frac{u_{10}}{u_9}=\frac{55}{34}=1.6176,$$

而 $\alpha=1.6180$. 我們可以看出,誤差小於 0.1%.

但另一方面,若利用一個無理數的連分數展開式的收斂子來作這個無理數的近似計算,則以數 α 所得的誤差爲最壞. 所有其他的數若用它的收斂子來描繪它自己,則就某種意義說,都比對於 α 來得精確. 但不管怎樣,我們將不再停留在這裏了.

四 斐波那契數與幾何

1. 我們將一條單位長線段 AB (圖 2) 分成這樣的兩部分,使其中長的一部分是短的一部分和原來線段的比例中項.

圖 2

我們現在用 x 來代表這長的部分的長. 顯而易見,其中短的部分等於 $1-x$,由我們的問題的條件卽得比例:

$$\frac{1}{x}=\frac{x}{1-x}, \tag{46}$$

由此得

$$x^2=1-x. \tag{47}$$

(47) 的正根是 $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; 故比例(46)中的比皆等於

$$\frac{1}{x}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}=\frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=a.$$

這樣的分割(點 C_1)稱爲**中外比分割**,也被人稱爲**黃金分割**.

若取方程式(47)的負根,則分點 C_2 卽在線段 AB 之外,如圖 2 所示(這樣的分割在幾何上稱爲外分). 容易證明,在這裏,我們也有黃金分割:

$$\frac{C_2B}{AB}=\frac{AB}{C_2A}=a.$$

2. 黃金分割在幾何上常常遇到.

我們都知道內接於半徑 R 的圓的正十角形的一邊 a_{10}(圖 3),等於

$$2R\sin\frac{360°}{2\times10},$$

卽 $2R\sin 18°$.

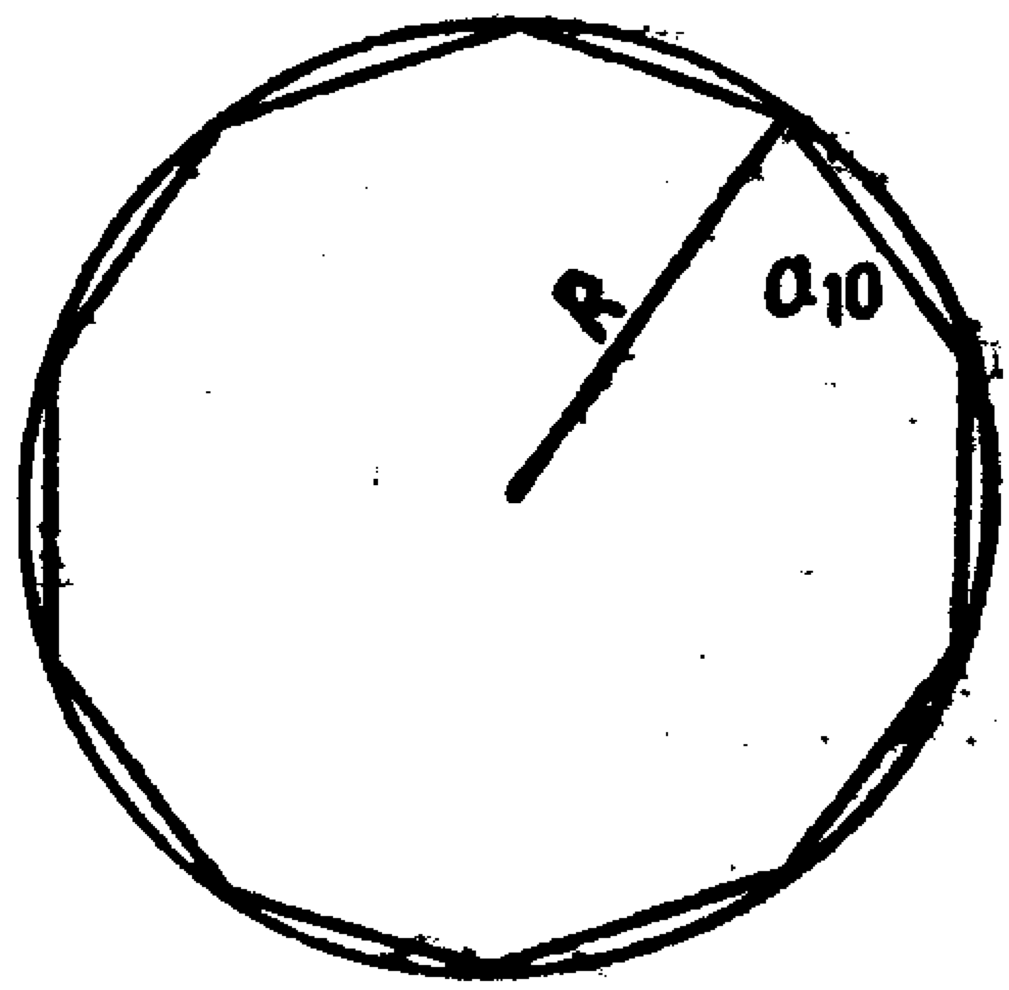


圖 3

我們現在來計算 $\sin 18°$. 由已知三角公式,我們有:

$$\sin 36°=2\sin 18°\cos 18°$$

$$\cos 36°=1-2\sin^2 18°,$$

由此得 $\sin 72°=4\sin 18°\cos 18°(1-2\sin^2 18)$……………(i)

因 $\sin 72°=\cos 18°\neq 0$,

故由(i)卽得 $1=4\sin 18°(1-2\sin^2 18°)$,

由是可知 $\sin 18°$ 是方程式

$$1=4x(1-2x^2)$$

或
$$8x^3-4x+1=0$$
的一個根．將上面方程式左邊析因式，則得
$$(2x-1)(4x^2+2x-1)=0,$$
故
$$x_1=\frac{1}{2},\quad x_2=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\quad x_3=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}.$$

因 $\sin 18^\circ$ 是不等於 $\frac{1}{2}$ 的正數，故 $\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

由是，
$$a_{10}=2R\frac{\sqrt{5}-1}{4}=R\frac{\sqrt{5}-1}{2}=\frac{R}{\alpha}.$$

換句話說，a_{10} 等於圓的半徑經黃金分割後的長的部分．

實用上在計算 a_{10} 時，我們可以不用 α 而用相鄰斐波那契數的比（第一章第 12 節或第三章第 8 節），由此可近似地算出 a_{10} 是 $\frac{8}{13}R$ 乃至 $\frac{5}{8}R$.

3. 我們現在來討論正五角形．它的對角線做成一正五角星形（圖 4）．

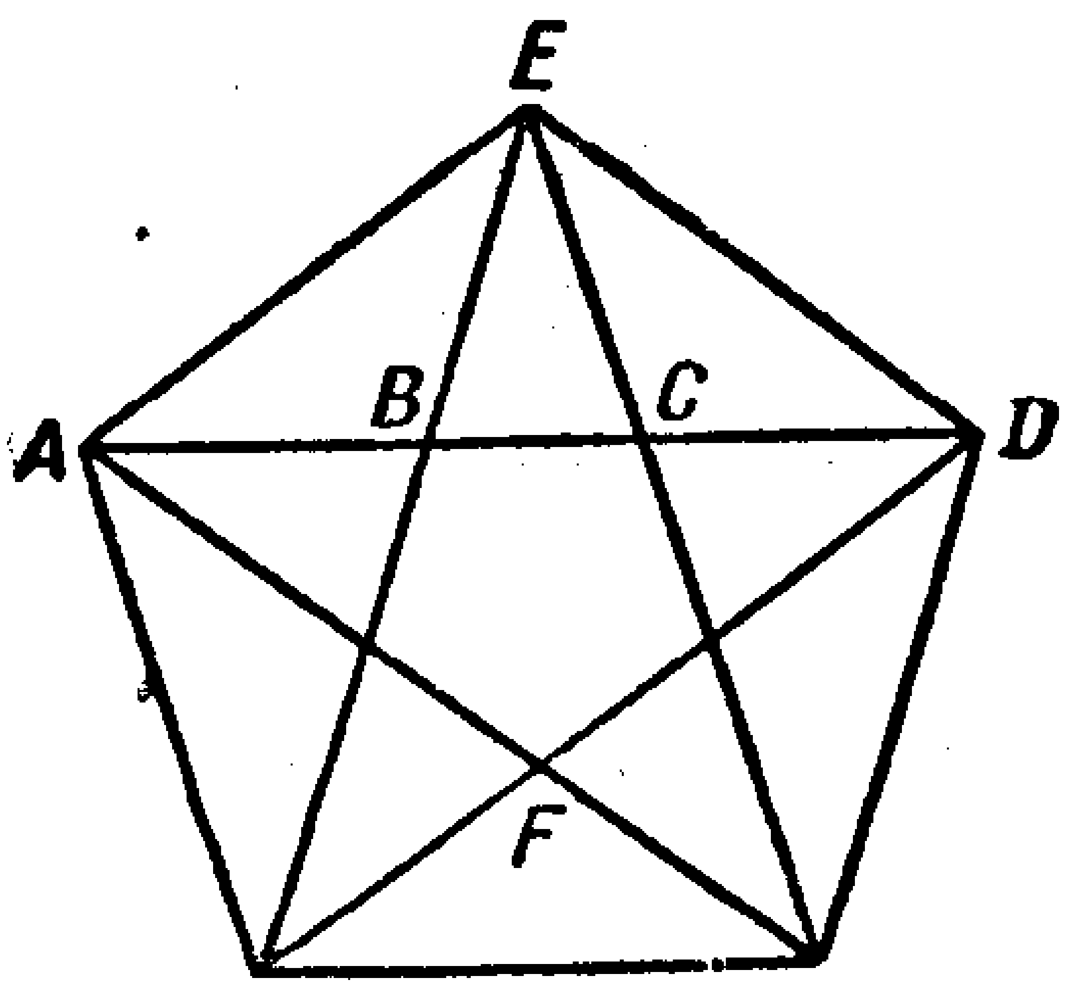


圖　4

角 AFD 等於 108°，而角 $ADF=36^\circ$.

由是，據正弦定律，
$$\frac{AD}{AF}=\frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ}$$
$$=2\cos 36^\circ$$
$$=2\,\frac{1+\sqrt{5}}{4}=\alpha.$$

因顯然有 $AF=AC$，故

$$\frac{AD}{AF}=\frac{AD}{AC}=a,$$

所以點 C 分線段 AD 爲黃金分割.

但由黃金分割的定義，常有

$$\frac{AC}{CD}=a.$$

注意 $AB=CD$，我們卽得

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB}{BC}=a.$$

由此可知，線段 BC, AB, AC, AD 中，每一條皆是它前面一條的 a 倍.

讀者附帶可以證明

$$\frac{AD}{AE}=a.$$

4. 讓我們現在取一個邊長爲 a 與 b 的矩形，而在這個矩形內作儘可能大的內接正方形，如圖 5 所示.

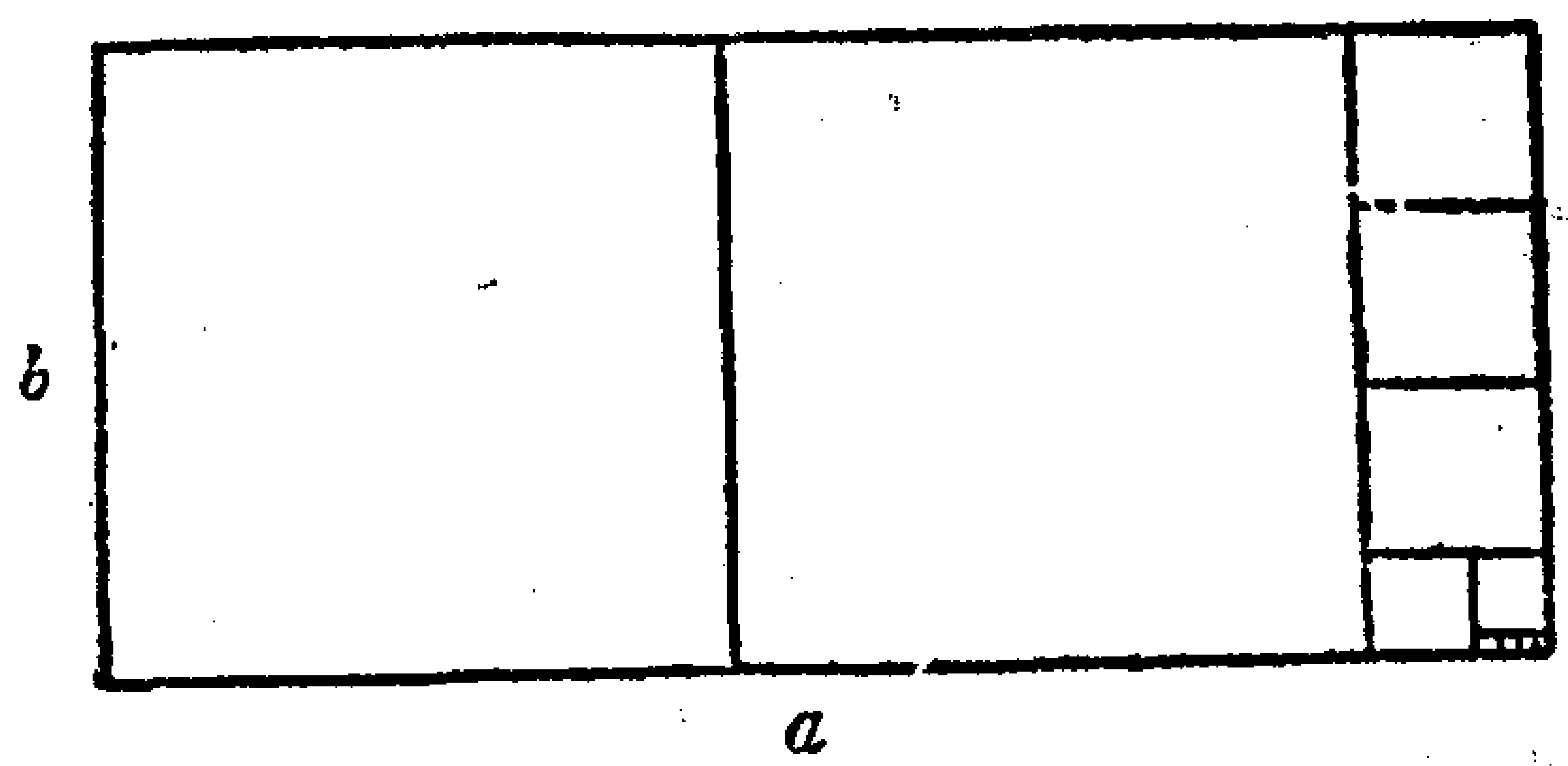


圖 5

第二章第 2 節的論證指出，若 a 與 b 爲整數，則這樣的手續與施用於這兩個數的歐氏運算相對應．同樣大小的正方形數目，在這裏(第三章第 1 節)即等於將 $\frac{a}{b}$ 展開成連分數時所對應的部分商．

若我們把一個這樣的矩形，它兩邊的比等於相鄰兩個斐波那契數的比(圖 6)，分成正方形；則由第三章第 4 節，除了其中兩個是同樣大小外，所有的正方形全不相同．

現在設矩形兩邊的比等於 α．(爲簡單起見，這樣的矩形

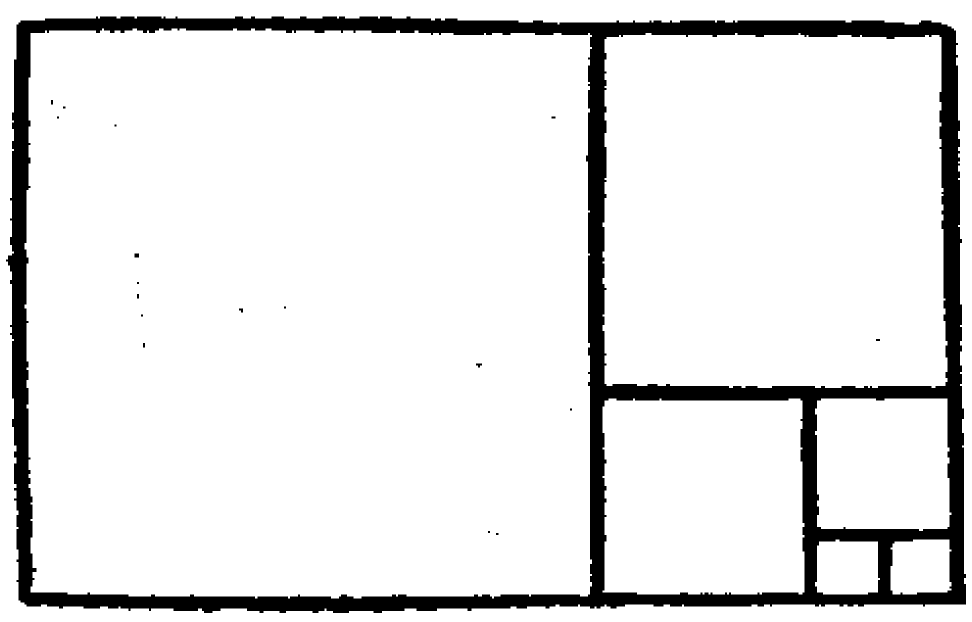


圖 6

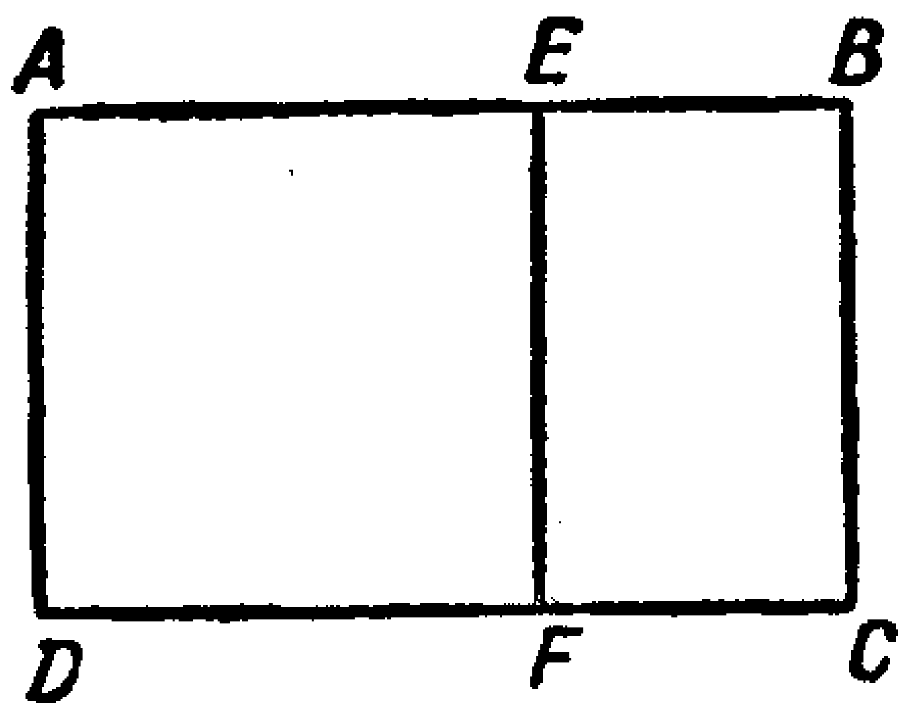


圖 7

我們稱爲黃金分割矩形．)現在我們來證明，若在黃金分割矩形中作一個儘可能最大的正方形(圖 7)，則我們重新得一個黃金分割矩形．

事實上，由假設 $$\frac{AB}{AD}=\alpha,$$

因 $AEFD$ 是一個正方形，故

$$AD=AE=EF.$$

這就指出， $$\frac{EF}{EB}=\frac{AB-FB}{EB}=\alpha^2-1.$$

但 $a^2-1=a$，故 $$\frac{EF}{EB}=a.$$

黃金分割矩形依照圖 8 所示'差不多完全'爲正方形 I，II，III，……所取盡．在取盡的過程中，每次作出輪到的內接正方形後，留下的圖形即爲一個黃金分割矩形．

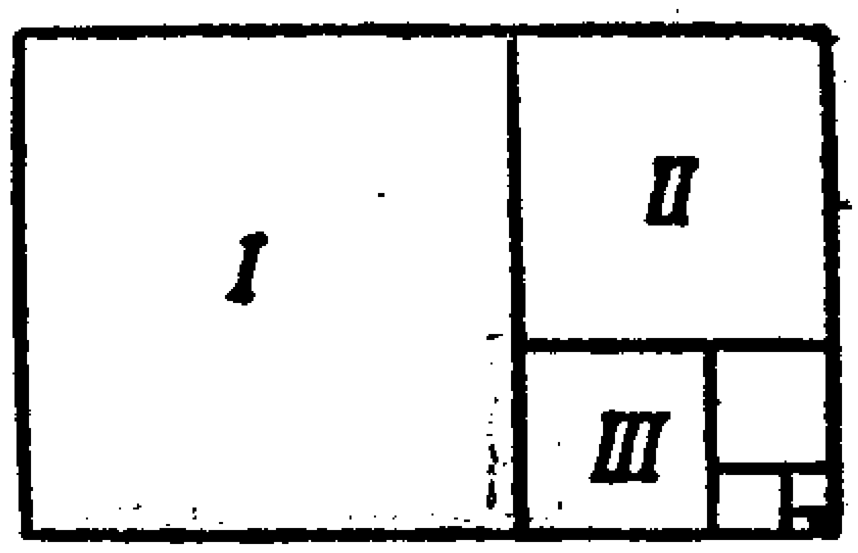


圖 8

讀者可將這論證與第三章第 4 及第 8 節比較．

我們可注意，若在一個正方形內作內接黃金分割矩形 I 和正方形 II 與 III，如圖 9 所示，則留下的矩形仍是一個黃金分割矩形．這證明留給讀者．

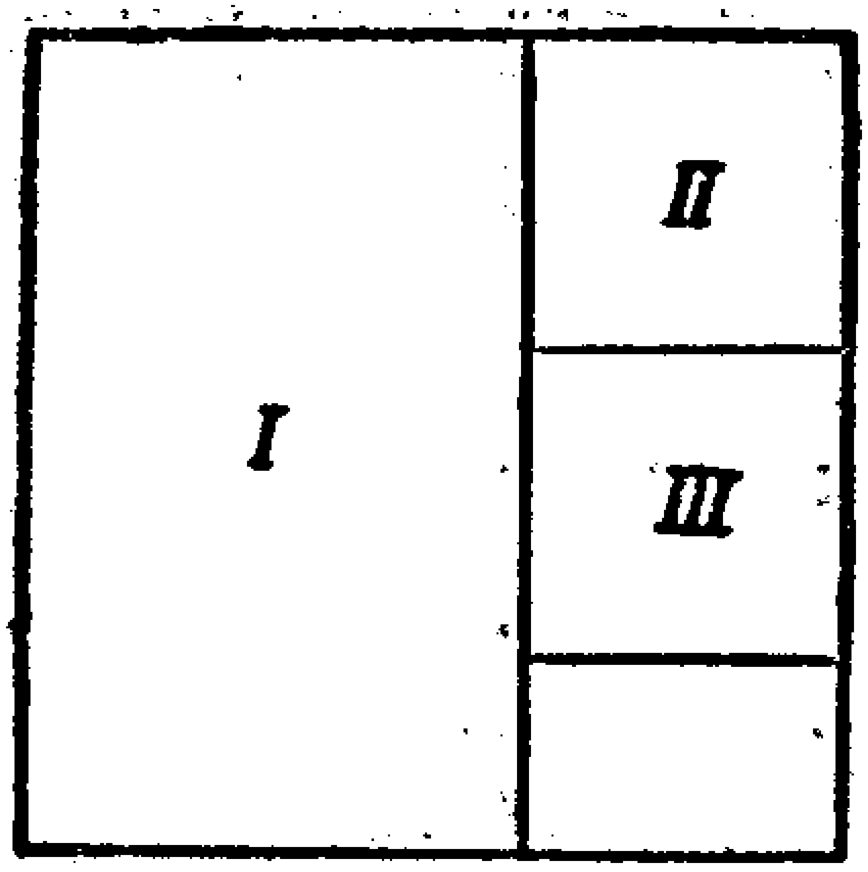


圖 9

5. 就式樣說，黃金分割矩形看起來是'調和'而相稱的．具有這種形式的物件用起來相當便利．因此我們許多矩形的日常用品(書，洋火盒，衣櫥等)常是取這樣的形式．

黃金分割矩形以及另外的圖形，在其中可觀察出中外比分割的，曾經被上古及中世紀若干的哲學家們提昇到美學上乃至哲學上的原則去．黃金分割以及一些數字的關係曾經被用來企圖解釋自然現象和社會生活，而隨着數 a 和它的收斂子，卻產生了各種各樣神秘的'運算'．自然，像這樣的'理論'與科學是毫無共同之處的．

6. 我們現在敍述一個簡短的幾何學上的謬論來結束本文. 我們立刻要憑直覺來'證明' $64=65$. 爲此,讓我們取一個邊長爲 8 的正方形而把它分成 4 個部分,如圖 10 所示. 然後我們把這幾個部分拼成矩形(圖 11),它的邊長爲 13 與 5,即面積等於 65.

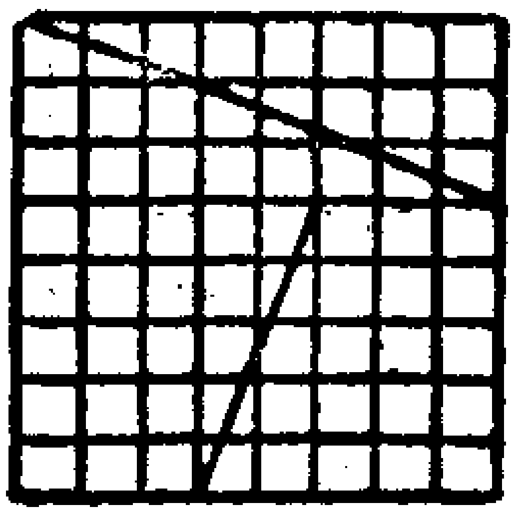


圖 10

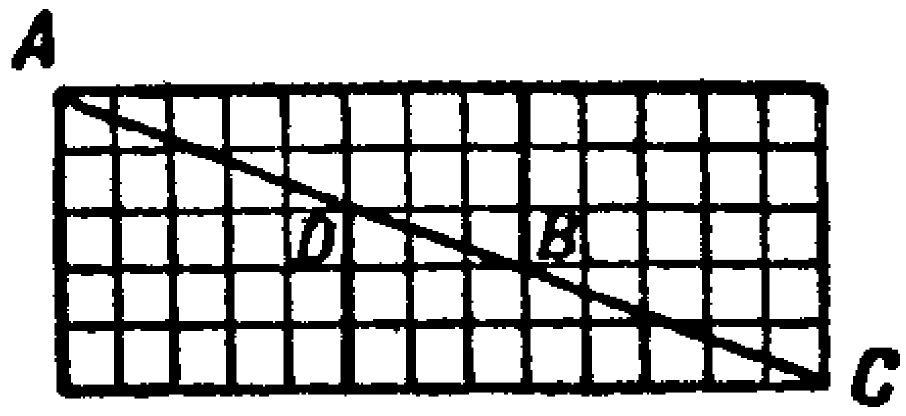


圖 11

對於這種初看起來頗爲神秘的現象並不難找出它的解釋. 事實就在圖 11 中的 A, B, C, D 四點實際不是在一條直線上,而是一個平行四邊形的頂點,它的面積恰好就等於那'多出來的'一個單位.

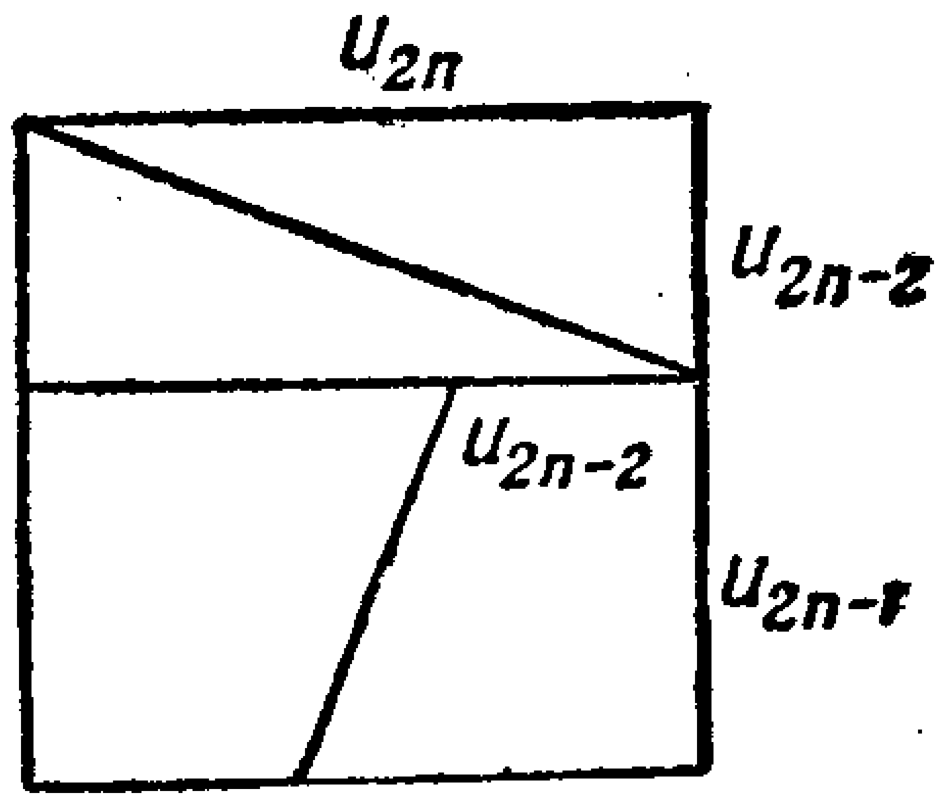


圖 12

若我們不用邊長爲 8 的正方形,而用以某一個指標充分大的偶數的斐波那契數 u_{2n} 爲邊長的正方形,則這種不正確的'證明'(這樣的證明稱爲詭辯)好像是眞實的,然而是用一種明知是虛僞的說法作出的,可以做得更'使人相信'.

我們現在把這個正方形分成幾部分(圖 12),然後又把這

幾個部分拼成一個矩形(圖 13). 沿着矩形的對角線伸展成

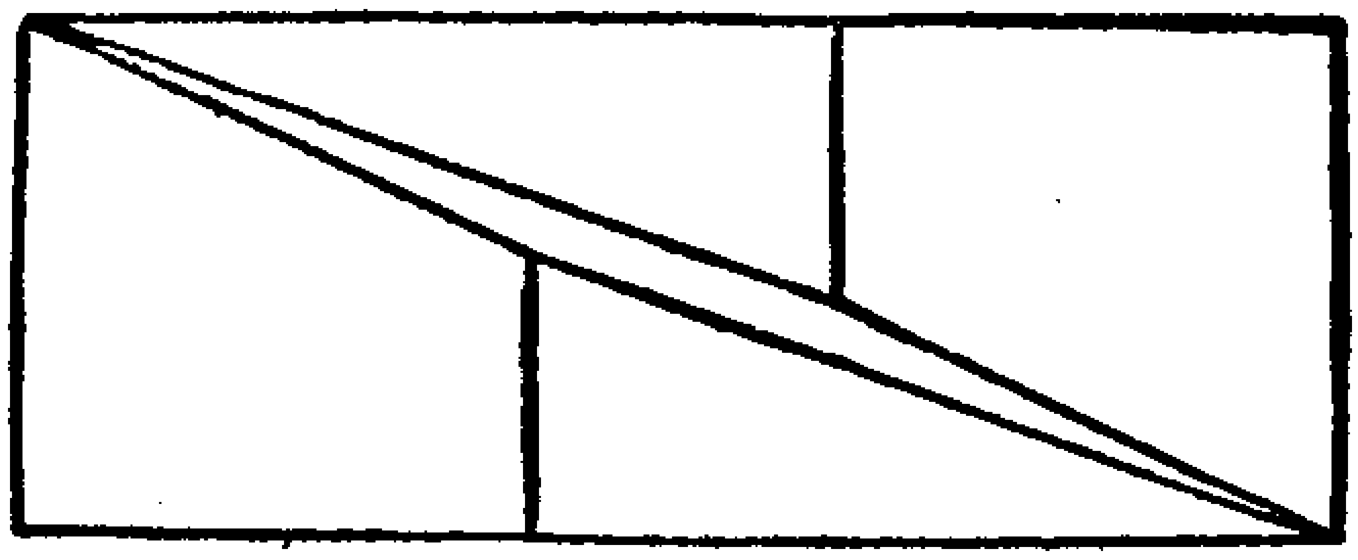


圖　13

一平行四邊形的'空處',依據第一章第 6 節面積等於 1. 這一空缺處最大的寬度,即平行四邊形的高,容易算出它等於

$$\frac{1}{\sqrt{u_{2n}^2+u_{2n-2}^2}}.$$

因此,若我們把一邊長為 21 公分的正方形分開,然後把它變成邊長為 34 公分和 13 公分的矩形,則可得出此空缺處的寬度為$\frac{1}{\sqrt{21^2+8^2}}$公分,即將近0.4公厘,這對視覺可以說是無足輕重.

結　　語

並不是所有的關於斐波那契數的問題都可以像我們所討論的那樣容易解決. 我們來指出一些問題,它們的解答或者是一般尚未知道,或者是必須要經過複雜的途徑,依靠高深的研究方法才能得到.

1. 設 u_n 可以被質數 p 所整除,而比 u_n 小的任何斐波那契數都不能被 p 整除. 在這種情形,我們稱 p 為 u_n 的固有因

數. 例如, 11 是 u_{10} 的固有因數, 17 是 u_9 的固有因數等等.

可以證明, 所有的斐波那契數, 除開 u_1, u_2, u_6 及 u_{12}, 都至少有一個固有因數.

2. 自然地就會發生這樣的問題: 以 n 爲指標的斐波那契數具有某一個先已給定的質數 p 作爲它的固有因數, n 是一個甚麼數呢?

由第二章第 13 節, 我們知道 $n \leqslant p^2$. 事實上可以證明 $n \leqslant p+1$. 更進一步, 若 p 是 $5t \pm 1$ 形的質數時, u_{p-1} 可以被 p 整除, 若 p 是 $5t \pm 2$ 形的質數時, u_{p+1} 可以被 p 整除. 但是, 具有已給的固有因數的斐波那契數, 它的指標怎樣用具體的公式表示出來, 我們還不知道.

3. 在第二章第 9 節裏, 我們證明, 除了 u_4 以外, 若斐波那契數的指標是合數, 則這個斐波那契數本身也必然是合數. 反過來, 就不對(指標是質數的斐波那契數不一定是質數), 例如, $u_{19}=4181=37 \times 113$. 因此產生了這樣的問題, 斐波那契數而同時又是質數的是否有無窮多個, 換句話說, 在所有質數的斐波那契數中是否有一個最大的數存在. 目下這個問題還有待解決.

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝斐波那契数
作者＝（苏联）伏洛别也夫著　　高？译
页数＝５２
ＳＳ号＝１１２３２８７２
出版日期＝１９５３年０２月第１版