第 3 章　微分中值定理和导数的应用

基础知识与规律总结

3.1　微分中值定理

一、罗尔定理

1. 极值

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，x 为该邻域内异于 x_0 的任一点，若恒有 $f(x)\geqslant f(x_0)$（或 $f(x)\leqslant f(x_0)$），则称 $f(x_0)$ 为 $y=f(x)$ 的极小值（或极大值），称点 x_0 为极小值点（或极大值点）. 极大值与极小值统称为极值. 极小值点、极大值点统称为极值点.

注 极值的概念是局部性的. 如果说 $f(x_0)$ 是函数 $f(x)$ 的一个极大值，那只是就 x_0 的某一个邻域，即对其附近的一个局部范围来说，$f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的一个最大值；对 $f(x)$ 的整个定义域而言，$f(x_0)$ 不一定是最大值. 极小值类似. 极大值不一定大于极小值.

最值的概念是整体的，对整个定义域都成立.

如图 3-1 所示，x_1,x_3,x_5 是极小值，x_2,x_4 是极大值.

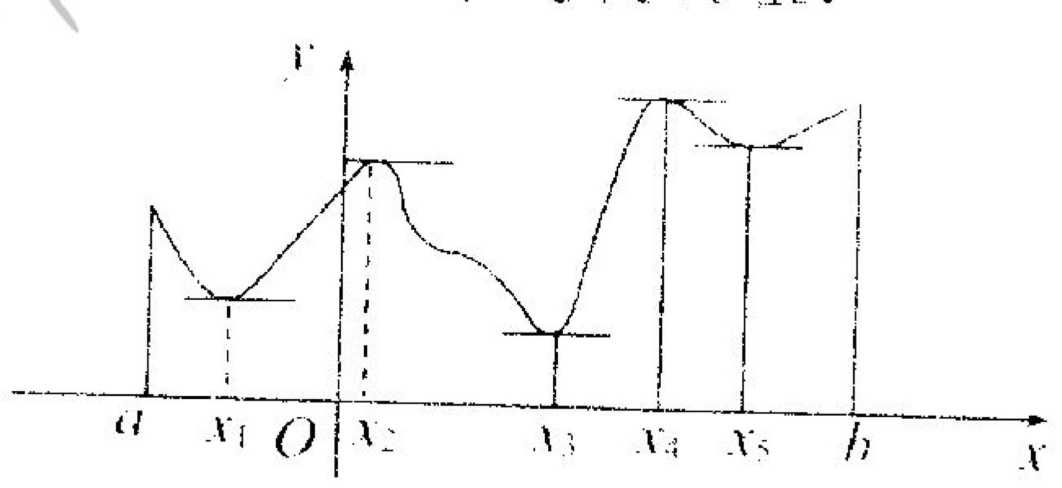

图 3-1

2. 费尔马定理

若函数 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有定义，并且在此邻域内恒有 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 或 $f(x)\geqslant f(x_0)$；

(2) $f(x)$ 在 x_0 处可导，

则有 $f'(x_0)=0$.

注 ① 该定理的几何意义为：若曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处取得极小值或极大值，且曲线在 x_0 处有切线，则切线平行于 x 轴.

② $f'(x_0)=0$ 表示 $f(x)$ 在 x_0 的变化率是零，此时，称 x_0 是 $f(x)$ 的驻点.

③ 定理说明了 $f(x)$ 在 x_0 取得极值的必要条件是 $f'(x_0)=0$，即 x_0 是 $f(x)$ 的驻点.

即可导函数的极值点一定是驻点，但驻点并不一定是极值点.

如，$f(x)=x^3$，$f'(0)=3x^2|_{x=0}=0$，$x=0$ 是 $f(x)=x^3$ 的驻点，但 $f(x)=x^3$ 在 $x=0$ 处没有取得极值.

【例 3.1】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$，证明：存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f'(\xi)=0$.

【分析】 遇到题设中出现某点的导数符号，要想到导数的极限定义式.

【证】 不妨设 $f'_+(a)>0$，$f'_-(b)<0$，于是

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0,$$

由极限保号性知，存在一个 $\delta_1>0$，当 $x\in(a,a+\delta_1)$ 时，恒有

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}>0\Rightarrow f(x)>f(a). \tag{1}$$

同理，

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0,$$

由极限保号性知，存在一个 $\delta_2>0$，当 $x\in(b-\delta_2,b)$ 时，恒有

$$\frac{f(x)-f(b)}{x-b}<0\Rightarrow f(x)>f(b). \tag{2}$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，所以 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必存在最大值，由(1)(2)知，最大值只能在 (a,b) 内取得.

令 $\xi\in(a,b)$，$f(\xi)=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}$，又 $f(x)$ 在 $x=\xi$ 处可导，故由费尔马定理可得 $f'(\xi)=0$.

3. 罗尔定理

若函数 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导；

(3) $f(a)=f(b)$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

注 ① 从几何意义上说，罗尔定理指出，在两个高度相同的点之间的一段连续曲线上，若除端点外它在每一点都有不垂直于 x 轴的切线（$f(x)$ 在除端点外的每一点都可导），则在其中必至少有一条切线平行于 x 轴（见图 3-2）.

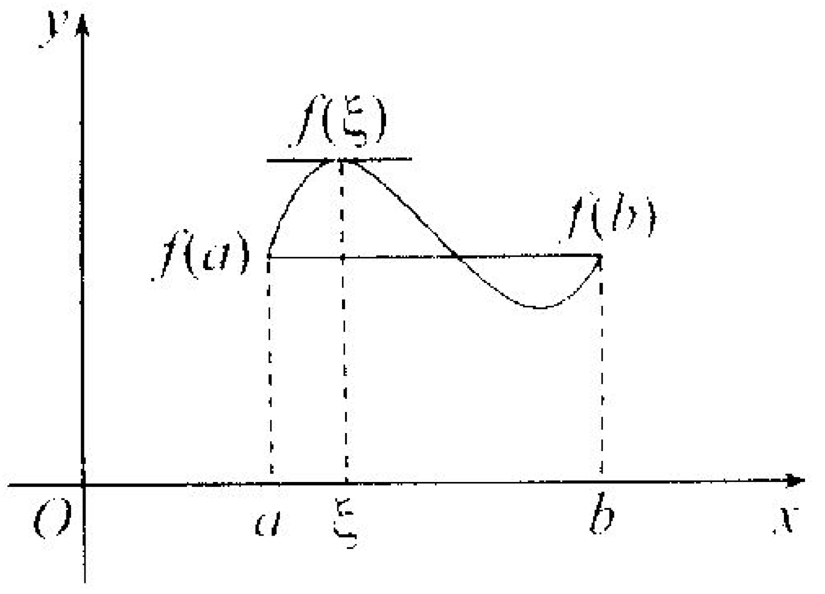

图 3-2

② 定理的条件是充分的，但非必要. 定理中的三个条件缺少任何一个，定理的结论将不一定成立.

如，$f(x)=\begin{cases}x,0<x\leqslant 1\\1,x=0\end{cases}$，不满足定理的条件(1)；

$f(x)=|x|,-1\leqslant x\leqslant 1$，不满足定理的条件(2)；

$f(x)=x,0\leqslant x\leqslant 1$，不满足定理的条件(3).

以上的三个函数，都不能在各自的定义域内找到 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

但是也不能认为定理条件不全具备，就一定不存在属于 (a,b) 的 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

如，函数

$$f(x)=\begin{cases}x^2, -1\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}\\ 2x, \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1\end{cases}$$

不满足定理的三个条件，却存在 $\xi=0\in(-1,1)$，使得 $f'(\xi)=0$.

③ 利用罗尔定理可判断函数的导函数的零点个数，判断方程根的个数.

【例 3.2】 下列函数在给定区间上是否满足罗尔定理的条件，如果满足条件，试求出适合条件的 ξ 值.

(1) $y=|x|, x\in[-2,2]$；　　(2) $y=x\sqrt{2-x}, x\in[0,2]$；

(3) $y=\ln\sin x, x\in\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$.

【解】 (1) $y=|x|$ 在 $[-2,2]$ 上连续，但 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，所以不满足罗尔定理的条件.

(2) 显然 $y=x\sqrt{2-x}$ 在 $[0,2]$ 上连续，

又
$$y'=\sqrt{2-x}+x\frac{-1}{2\sqrt{2-x}}=\frac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}$$

是初等函数，定义域为：$x<2$，

则 $y=x\sqrt{2-x}$ 在 $(0,2)$ 内可导，而且 $y|_{x=0}=y|_{x=2}=0$.

故 $y=x\sqrt{2-x}$ 在 $[0,2]$ 上满足罗尔定理的条件，即存在 $\xi\in(0,2)$，使得

$$y'|_{x=\xi}=0.$$

令 $y'=\dfrac{4-3x}{2\sqrt{2-x}}=0\Rightarrow x=\dfrac{4}{3}$，则满足条件的 $\xi=\dfrac{4}{3}$.

(3) 显然 $y=\ln\sin x$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上连续，

又
$$y'=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x$$

是初等函数，定义域为 $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$，

则 $y=\ln\sin x$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right)$ 内可导，而且 $y|_{x=\frac{\pi}{6}}=y|_{x=\frac{5\pi}{6}}=-\ln 2$.

故 $y=\ln\sin x$ 在 $\left[\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}\right]$ 上满足罗尔定理的条件，即存在 $\xi\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5}{6}\pi\right)$，使得

$$y'|_{x=\xi}=0.$$

令 $y'=\cot x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$，则满足条件的 $\xi=\dfrac{\pi}{2}$.

【例 3.3】 已知函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，在开区间 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$. 试证：在开区间 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi), \xi\in(0,1)$$

【分析】 待证结论可改写为 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$，又由于 $[xf(x)]'|_{x=\xi}=f(\xi)+\xi f'(\xi)$，可见，若令 $F(x)=xf(x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $F(0)=F(1)=0$，即 $F(x)$ 满足罗尔定理的全部条件. 于是在 $(0,1)$ 内至少存在一点 ξ，使得

$$F'(\xi)=f(\xi)+\xi f'(\xi)=0, \xi\in(0,1),$$

即 $$f'(\xi)=-\frac{1}{\xi}f(\xi),\xi\in(0,1).$$

【例 3.4】证明方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间[0,1]内不可能有两个不同的实根.

【证】用反证法.

假设方程在区间[0,1]内有两个不同的实根 a,b，且 $a<b$，则函数 $f(x)=x^3-3x^2+1$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的全部条件，于是，在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=3\xi^2-6\xi=0$，此时 ξ 只能取 0 或 2，矛盾.

由此可见，方程 $x^3-3x^2+1=0$ 在区间[0,1]内不可能有两个不同的实根.

【例 3.5】若 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)$，其中 $a<x_1<x_2<x_3<b$，证明：至少存在一点 $\xi\in(x_1,x_3)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【分析】若用罗尔定理证明 $f''(\xi)=0$，只需证明 $f'(x)$ 在 $[x_1,x_3]$ 的某个子区间上满足罗尔定理的条件.

【证】显然 $f(x)$ 在 $[x_1,x_2]$，$[x_2,x_3]$ 上满足罗尔定理的条件，从而至少存在 $\xi_1\in[x_1,x_2]$，$\xi_2\in[x_2,x_3]$，使得
$$f'(\xi_1)=0,f'(\xi_2)=0.$$
因为 $f(x)$ 在 (a,b) 内具有二阶导数，且 $a<x_1<x_2<x_3<b$.

所以 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上连续且可导，因此 $f'(x)$ 在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件，则至少存在一点 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(x_1,x_3)$，使得 $f''(\xi)=0$.

二、拉格朗日中值定理和柯西中值定理

1. 拉格朗日中值定理

若函数 $f(x)$ 满足以下条件：

(1) $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内可导.

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

注1 罗尔定理是拉格朗日中值定理的一个特殊情况，满足 $f(a)=f(b)$. 因此，可借助罗尔定理证明拉格朗日中值定理，证明如下.

证明：作辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$.

可以验证 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，因而存在一点 ξ，使 $F'(\xi)=0$，即 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$.

注2 ① 拉格朗日中值定理的几何意义是，若曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都有不垂直于 x 轴的切线（即不平行于 y 轴的切线），则在曲线上至少存在一点 $P(\xi,f(\xi))$，使曲线在点 P 的切线平行于过曲线两端点 A,B 的弦（见图 3-3）.

② $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)\Rightarrow f(b)-f(a)=(b-a)f'(\xi),a<\xi<b$,

或 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(a+\theta(b-a)),0<\theta<1$.

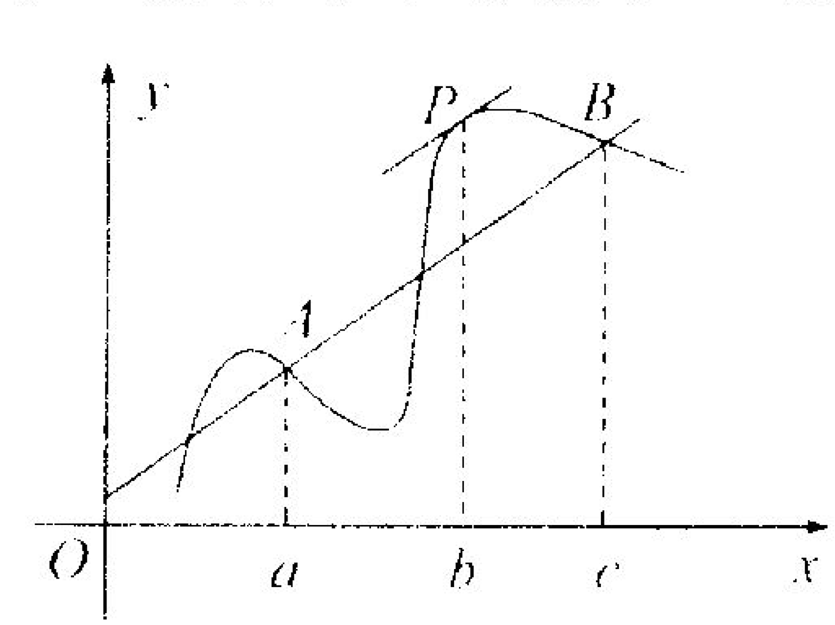

图 3-3

若令 $b=a+h$，则上式变为 $f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)$，$0<\theta<1$.

令 $b=x$，$f(x)-f(a)=(x-a)f'(\xi)$，$a<\xi<x$，ξ 是 x 的函数，但不一定连续.

③ 定理条件是充分的.

如 $f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x<1\\0,x=1\end{cases}$，不满足条件(1)，虽然 $\dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=0$，但不存在 ξ，使 $f'(\xi)=0$.

【例 3.6】 验证以下函数是否满足拉格朗日中值定理的条件，若满足，求出适合条件的 ξ 值.

(1) $f(x)=x^2$，$x\in[1,2]$；

(2) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2},x\leqslant 1\\[2mm]\dfrac{1}{x},\quad x>1\end{cases}$.

【解】 (1) 显然 $f(x)=x^2$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导.

所以 $f(x)=x^2$ 在 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，则有

$$\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=3=f'(\xi)\text{，又 }f'(x)=2x\Rightarrow 2\xi=3\Rightarrow\xi=\frac{3}{2}.$$

(2) ① 显然 $\dfrac{3-x^2}{2}$，$\dfrac{1}{x}$ 分别在 $[0,1)$ 和 $(1,2]$ 上连续，又

$$f_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{3-x^2}{2}=1=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{x}=f_+(1)=f(1),$$

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，因此 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续.

② 当 $x<1$ 时，$f'(x)=\left(\dfrac{3-x^2}{2}\right)'=-x$；

当 $x>1$ 时，$f'(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

又 $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1-x^2}{2(x-1)}=-1$，

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1-x}{x(x-1)}=-1$.

所以 $f'(1)=-1$，即 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，因此 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 内可导.

且 $$f'(x)=\begin{cases}-x, & 0<x\leqslant 1\\-\dfrac{1}{x^2}, & 1<x<2\end{cases}.$$

故由 ①② 可知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件.

因而存在 $\xi\in(0,2)$，使 $\dfrac{f(2)-f(0)}{2-0}=f'(\xi)$，即 $f'(\xi)=-\dfrac{1}{2}$.

当 $0<\xi\leqslant 1$ 时，$f'(\xi)=-\xi=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\xi=\dfrac{1}{2}$.

当 $1<\xi<2$ 时，$f'(\xi)=-\dfrac{1}{\xi^2}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow\xi=\sqrt{2}$.

故取 $\xi=\dfrac{1}{2}$ 或 $\sqrt{2}$ 均满足定理要求.

推论：若函数 $f(x)$ 在区间 I 上可导，且 $f'(x)\equiv 0$，则 $f(x)=C$，$x\in I$（C 是常数）.

注 这个结论常常用来证明一个函数恒等于某个常数的命题.

【例 3.7】证明当 $|x| < \dfrac{1}{2}$ 时，$3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$.

【证】令
$$f(x) = 3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3),$$

则 $f'(x) = -\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{3-12x^2}{\sqrt{1-(3x-4x^3)^2}} = -\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \dfrac{3(1-4x^2)}{\sqrt{(1-x^2)(1-4x^2)^2}}$. (1)

因为 $|x| < \dfrac{1}{2}$，所以 $0 < 1 - 4x^2 \leqslant 1$.

由(1)可推得
$$f'(x) = -\frac{3}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

所以 $f(x) = C$，令 $x = 0 \to C = \pi$.

故 $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$.

【例 3.8】证明：$|\arctan x - \arctan y| \leqslant |x - y|$.

【分析】不等式的一端可以写成 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 时，要想到利用拉格朗日中值定理处理一下.

【证】设 $f(t) = \arctan t$，则 $f'(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$，在区间 $[x,y]$ 或 $[y,x]$ 上应用拉格朗日中值定理，有
$$\arctan x - \arctan y = \frac{1}{1+\xi^2}(x-y), \xi \text{ 介于 } x, y \text{ 之间},$$

于是
$$\frac{|\arctan x - \arctan y|}{|x-y|} = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

由于 $0 < \dfrac{1}{1+\xi^2} \leqslant 1$，所以 $0 \leqslant \dfrac{|\arctan x - \arctan y|}{|x-y|} \leqslant 1$.

即 $|\arctan x - \arctan y| \leqslant |x - y|$.

2. 柯西中值定理

若函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件：

(1) 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

(2) 在开区间 (a,b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$，

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ，使得
$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

注 ① 在柯西中值定理中令 $g(x) = x$，它就是拉格朗日中值定理.

② 几何意义同拉格朗日中值定理.

$x = g(t)$，$y = f(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$，则 $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ 表示连接曲线两端点 A、B 弦的斜率.

【例 3.9】对 $f(x) = x^2$，$g(x) = x^3$ 在 $[0,1]$ 上用柯西中值定理计算相应的 ξ.

【解】显然 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足柯西定理的条件，则
$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(1)-f(0)}{g(1)-g(0)} = 1 \Rightarrow \frac{2\xi}{3\xi^2} = 1 \Rightarrow \xi = \frac{2}{3}.$$

【例 3.10】设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，$b > a > 0$，证明：存在 $\xi, \eta \in (a,b)$，使得
$$f'(\xi) = (a^2 + ab + b^2)\frac{f'(\eta)}{3\eta^2}.$$

【分析】$f'(\xi)=(a^2+ab+b^2)\dfrac{f'(\eta)}{3\eta^2}$ 中 $3\eta^2=(x^3)'|_{x=\eta}$，可取 $g(x)=x^3$.

【证】设 $g(x)=x^3$，则 $g'(x)\neq 0(x\in[a,b])$，所以 $f(x),g(x)$ 在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件，故存在 $\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\eta)}{g'(\eta)}\text{，即}\frac{f(b)-f(a)}{b^3-a^3}=\frac{f'(\eta)}{3\eta^2}.$$

于是
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a^2+ab+b^2)\frac{f'(\eta)}{3\eta^2}. \tag{1}$$

又由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$. (2)

由(1)(2)联立可得 $f'(\xi)=(a^2+ab+b^2)\dfrac{f'(\eta)}{3\eta^2}$.

三、泰勒定理

1. 泰勒定理

设 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内具有 $n+1$ 阶导数，x 为该邻域内异于 x_0 的任一点，则在 (x,x_0) 或 (x_0,x) 内至少存在一个 ξ，使得

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x), \tag{1}$$

其中
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}\text{（拉氏型 }n\text{ 阶泰勒余项），}$$

或
$$R_n(x)=o[(x-x_0)^n]\text{（皮亚诺型 }n\text{ 阶泰勒余项）.}$$

当 $x_0=0$ 时，(1) 成为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x). \tag{2}$$

其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$ 或 $R_n(x)=o(x^n)$.

(1) 式称为 n 阶泰勒公式，(2) 式称为 n 阶麦克劳林公式.

2. 常见函数的麦克劳林展开式

(1) $\dfrac{1}{1-u}=1+u+u^2+\cdots+u^n+o(u^n)$；

(2) $\dfrac{1}{1+u}=1-u+u^2-\cdots+(-1)^nu^n+o(u^n)$；

(3) $e^u=1+u+\dfrac{1}{2!}u^2+\cdots+\dfrac{1}{n!}u^n+o(u^n)$；

(4) $\sin u=u-\dfrac{u^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{u^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(u^{2n+1})$；

(5) $\cos u=1-\dfrac{u^2}{2!}+\cdots+(-1)^n\dfrac{u^{2n}}{(2n)!}+o(u^{2n})$；

(6) $\ln(1+u)=u-\dfrac{u^2}{2}+\dfrac{u^3}{3}-\cdots+(-1)^n\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+o(u^{n+1})$；

(7) $(1+u)^\alpha=1+\alpha u+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}u^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}u^n+o(u^n)$.

3.2 洛必达法则

一、$\frac{0}{0}$ 未定式

定理 1 设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件：

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$；

(2) $f(x),g(x)$ 在 x_0 的某邻域内可导（在 x_0 点除外），且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 ∞）.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$（或为 ∞）.

这种在一定条件下通过分子分母分别求导再求极限来确定未定式值的方法称为洛必达法则.

定理 2 设函数 $f(x),g(x)$ 满足条件：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0,\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$；

(2) 存在一个 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$f(x),g(x)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 ∞）.

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$（或为 ∞）.

【例 3.11】 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$（$\alpha$ 为任何实数）.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha$.

【例 3.12】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$.

【例 3.13】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}$.

【解】 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{1+x^2}=1$.

【例 3.14】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin\sqrt[3]{x-1}}$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{(1-\sqrt{\cos x})(1+\sqrt{\cos x})}{x(1-\cos\sqrt{x})(1+\sqrt{\cos x})}$（根式有理化）

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x(1-\cos\sqrt{x})}\text{（等价无穷小代换 }1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2\text{）}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\cdot\frac{1}{2}(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2}.$$

(2) 因为当 $x\to 1$ 时，$\sqrt[3]{x-1}\to 0$，

所以 $\ln(1+\sqrt[3]{x-1})\sim\sqrt[3]{x-1}$，$\arcsin\sqrt[3]{x-1}\sim\sqrt[3]{x-1}$，

故 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(1+\sqrt[3]{x-1})}{\arcsin\sqrt[3]{x-1}} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}} = 1.$

二、$\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式

定理 3 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$；

(2) $f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 的邻域内可导（在 x_0 点除外），且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 ∞），

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

定理 4 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足条件

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$；

(2) 存在一个 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$f(x)$，$g(x)$ 可导，且 $g'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为 ∞），

则 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

注1 使用洛必达法则的注意事项：

① 洛必达法则是求未定式极限的有效方法，但只有 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式才可以用此法则；洛必达法则的条件是充分条件而不是必要条件.

② 利用法则前，先利用根式有理化或因式分解消去使分母为零的因子，并利用等价无穷小代换化简；

③ 每用完一次法则，要将式子整理化简；

④ 为简化运算，经常将法则和等价无穷小结合使用.

注2 当 $x\to 0$ 时，分子或分母中含 $\sin\frac{1}{x}$，$\cos\frac{1}{x}$，$e^{\frac{1}{x}}$ 或当 $x\to\infty$ 时，分子或分母中含 $\sin x$，$\cos x$ 不能使用洛必达法则.

如，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$ 就不能用，因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin x}{x-\sin x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\cos x}{1-\cos x},$$

当 $x\to\infty$ 时，分子、分母的极限均不存在.

【例 3.15】求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

【解】由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)'}{(\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}}{\cos x}$ 不存在，也不为 ∞，故不能用洛必达法则，可用以下方法求其极限.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0.$$

【例 3.16】求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cot x}{\cot 2x}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+x}{x^2}$.

【解】(1) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\cot x}{\cot 2x}=\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\csc^2 x}{2\csc^2(2x)}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2(2x)}{\sin^2 x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to\pi}\frac{2\sin(2x)\cos(2x)\cdot 2}{2\sin x\cos x}$$

$$=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}=\lim_{x\to\pi}\frac{4\cos 4x}{2\cos 2x}=2.$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{2}=+\infty$，故原极限不存在.

【例 3.17】$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n>0)$.

【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$.

【例 3.18】求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$（$n$ 为正整数，$\lambda>0$）.

【解】$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2 e^{\lambda x}}=\cdots=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0$.

注 上题中，当 n 为任意正实数时，该结论仍成立，由以上两个例题可以看出，对数函数 $\ln x$，幂函数 $x^n(n>0)$，指数函数 $e^{\lambda x}(\lambda>0)$ 均为当 $x\to+\infty$ 时的无穷大，但这三个函数增大的“速度”是很不一样的，幂函数增大的“速度”比对数函数快得多，而指数函数增大的“速度”又比幂函数快得多. 请记住以下结论.

(1) 当 $x\to+\infty$ 时，以下各函数趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为：

$$\ln x,x^\alpha(\alpha>0),a^x(a>1),x^x,$$

则立即可得 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0(\alpha>0)$；

(2) 当 $n\to\infty$ 时，通项趋于 $+\infty$ 的速度由慢到快为：

$$\ln n,n^\alpha(\alpha>0),a^n(a>1),n!,n^n.$$

三、其他未定式 $\infty-\infty, 0\cdot\infty, 1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ 的计算

方法：要先转化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，才可使用洛必达法则.

① 对 $\infty-\infty$ 型未定式一般通过通分或倒代换 $x=\frac{1}{t}$ 将其化为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型.

② 对 $0\cdot\infty$ 型未定式可将其中之一下放到分母的位置，使其变为 $\frac{0}{0}$ 或 $\frac{\infty}{\infty}$ 型，但要注意对数函数和反三角函数不下放.

③ 对 $1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$ 型未定式可通过对数化处理.

【例 3.19】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^3+x^2+2)^{\frac{1}{3}}-x\right]$.

【解】 (1) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sec^2 x-1}{2x}$（洛必达法则）

$$=\lim_{x\to0}\frac{\tan^2 x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x}=0(\tan x\sim x).$$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x^3+x^2+2)^{\frac{1}{3}}-x\right]\overset{x=\frac{1}{t}}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\frac{(2t^3+t+1)^{\frac{1}{3}}-1}{t}$

$$=\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{3}(2t^3+t+1)^{-\frac{2}{3}}(1+6t^2)}{1}=\frac{1}{3}.$$

【例 3.20】 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan 4x^2\right)\cdot x^2$.

【解】 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}-\arctan 4x^2}{x^{-2}}\left(\frac{0}{0}\text{ 型，利用洛必达法则}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{8x}{1+(4x^2)^2}}{-2x^{-3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4}{1+16x^4}=\frac{1}{4}\text{（抓大头准则）}.$$

【例 3.21】 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\left[\ln(1+x^2)\right]^{e^{x^2}-1}$；　　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{1}{x}}$.

【解】 (1) 此题属于 0^0 型未定式，利用对数恒等式转换.

$$I=e^{\lim\limits_{x\to0}(e^{x^2}-1)\ln(\ln(1+x^2))}=e^{\lim\limits_{x\to0}x^2\ln(x^2)}\ (e^{x^2}-1\sim x^2, \ln(1+x^2)\sim x^2)$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x^2)}{x^{-2}}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x^2}(2x)}{-2x^{-3}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}x^2}=e^0=1.$$

(2) 此题属于 ∞^0 型未定式，利用对数恒等式转换.

$$I=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+\sqrt{1+x^2})}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}=e^0=1.$$

3.3 导数的应用

一、过定点的曲线的切线和法线方程

1. 定点 $M(x_0,y_0)$ 在曲线上

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$

(1) 当 $f'(x_0)$ 存在时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的切线 MT 的方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0);$$

若 $f'(x_0)=\infty$，则切线方程为 $x=x_0$.

(2) 当 $f'(x_0)\neq 0$ 时，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的法线 MN 方程为

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0);$$

(3) 当 $f'(x_0)=0$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处的法线方程为：$x=x_0$.

【例 3.22】求 $y=\frac{1}{2}x^3$ 在 $x=2$ 处的切线方程和法线方程.

【解】由题设可得 $f(2)=4,f'(2)=6$，则该曲线在 $x=2$ 处的切线方程为

$$y-4=6(x-2),$$

即

$$y=6x-8.$$

法线方程为

$$y-4=-\frac{1}{6}(x-2),$$

即

$$y=-\frac{1}{6}x+\frac{13}{3}.$$

2. 定点 $M(x_0,y_0)$ 不在曲线上

(1) 设切点为 $P(x_1,f(x_1))$，则切点满足曲线方程和切线方程.

(2) 若切线平行于 y 轴，则切线方程为 $x=x_1$；若切线不平行于 y 轴，则该点处的切线斜率为 $f'(x_1)$，切线方程为

$$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1).$$

(3) 根据定点 $M(x_0,y_0)$ 满足切线方程可得到 x_1 的值，将其代入(2)即得切线方程.

(4) 求法线方程类似.

【例 3.23】过点 $P(1,0)$ 作抛物线 $y=\sqrt{x-2}$ 的切线，求该切线方程.

【解】显然 $P(1,0)$ 不在抛物线上，设所作切线与抛物线相切于点 $Q(x_0,y_0)$.

切线 PQ 的斜率为 $k=y'\big|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}\Big|_{x=x_0}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}$.

于是切线 PQ 的方程为 $y-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(x-x_0)$.

因为 P 点在 PQ 上，所以 $-\sqrt{x_0-2}=\frac{1}{2\sqrt{x_0-2}}(1-x_0)\Rightarrow x_0=3$.

故切线方程为 $$y=\frac{1}{2}(x-1).$$

二、函数单调性的判别

1. 函数单调性的判别法

定理 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导，如果对任意 $x\in(a,b)$，都有 $f'(x)>0$（或 $f'(x)<0$），则函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内是单调增加（或单调减少）的.

① 若在 (a,b) 内有有限个 x，使 $f'(x)=0$，不影响 $f(x)$ 的单调性. 即 $f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 单调增加；$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 单调减少，并且 $f'(x)$ 的孤立零点不影响单调性.

② 利用函数的单调增减性确定函数的单调性区间，证明不等式，讨论方程根的个数等.

2. 求函数的单调区间

具体步骤为：

(1) 先对函数求导，令导函数等于零，求出驻点和不可导点；

(2) 以(1)中求出的点作为隔断点将定义域分割成若干区间；

(3) 求各个区间内的导函数，根据导函数符号判断函数的单调性. 若导函数大于零，则函数在该区间单调增加；若导函数小于零，则函数在该区间单调下降；若导函数恒等于零，则函数在该区间为一常数.

【例 3.24】 设 $y=e^x-x-1$，求它的单调区间.

【解】 $f'(x)=e^x-1$，令 $f'(x)=0$，得 $x=0$，则列表 3-1 进行分析.

表 3-1

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单减		单增

由上表可知，$f(x)$ 的单调减少区间为 $(-\infty,0)$，$f(x)$ 的单调增加区间为 $(0,+\infty)$.

3. 证明函数不等式

具体步骤为：

(1) 先作辅助函数：移项，使不等式一端为“0”，另一端即为所作辅助函数 $f(x)$；

(2) 求 $f'(x)$，并验证 $f(x)$ 在指定区间的增减性；

(3) 求出区间端点的函数值（或极限值），作比较即得所证.

【例 3.25】 证明：当 $x>0$ 时，$\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

【证】 设 $f(x)=\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}$，因为 $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{x^2}<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上“单减”.

又 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，故当 $x>0$ 时，$f(x)>\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，

即 $\arctan x+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{2}>0$，亦即 $\arctan x+\frac{1}{x}>\frac{\pi}{2}$.

三、函数的极值和最值

1. 函数取极值的充分条件和必要条件

定理 1 （取极值的必要条件）

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0)=0$.

定理 2 （取极值的第一充分条件）

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导，且 $f'(x_0)=0$（或 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，但 $f'(x_0)$ 不存在）

① 若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 由"+"变为"−"，则 $f(x_0)$ 为极大值；

② 若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 由"−"变为"+"，则 $f(x_0)$ 为极小值；

③ 若当 x 经过 x_0 时，$f'(x)$ 不变号，则 $f(x_0)$ 不是极值.

定理 3 （取极值的第二充分条件）

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处有 $f''(x_0)\neq 0$，且 $f'(x_0)=0$，则

① 当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x_0)$ 为极大值；

② 当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x_0)$ 为极小值.

2. 求函数的极值

一般步骤为：

（1）确定函数的定义区间；

（2）求导数 $f'(x)$，令 $f'(x)=0$，得到驻点，并求出使 $f'(x)$ 不存在的点（这些可能取极值的点都应在函数的定义区间内）；

（3）用定理 2 或定理 3 判别上述各点是否为极值点，若是，求出极值；

（4）若 $f(x)$ 为抽象函数，一般用定义判定是否为极值.

【例 3.26】 求函数 $f(x)=(x+1)^3(x+5)$ 的极值点和极值.

【解】 $f'(x)=4(x+1)^2(x+4)$，令 $f'(x)=0\Rightarrow x=-1,x=-4$.

函数的可能极值点为：$x=-1,x=-4$，它们将函数的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分为三个区间，列表 3-2 分析如下.

表 3-2

x	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1)$	-1	$(-1,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+	0	+
$f(x)$	单减	极小值 −27	单增	非极值	单增

由表 3-2 知，−4 是函数的极小值点，且极小值为 −27.

【例 3.27】 若函数 $f(x)=a\ln x+bx^2+x$ 在 $x=1$ 及 $x=2$ 取得极值，求 a,b.

【解】 因为 $f(x)$ 可导，根据取极值的必要条件可知：$f'(1)=f'(2)=0$.

又 $f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$，故 $\begin{cases} f'(1)=a+2b+1=0 \\ f'(2)=\dfrac{a}{2}+4b+1=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=-\dfrac{2}{3} \\ b=-\dfrac{1}{6} \end{cases}$.

【例 3.28】已知 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，则在 $x=a$ 处

(A) $f(x)$ 导数存在，且 $f'(a)\neq 0$　　(B) $f(x)$ 取得极大值

(C) $f(x)$ 取得极小值　　(D) $f(x)$ 导数不存在

【解】因为没有告知 $f(x)$ 可导，所以要判别其极值只好用定义.

由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$，根据极限保号性定理，存在一个 a 的 δ 邻域，使得

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}<0.$$

于是 $f(x)<f(a)$，故 $f(a)$ 为 $f(x)$ 的极大值，可知应选(B).

3. 求函数的最值

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则它在该区间上必取得最大值和最小值.

下面分别就三种情形给出求闭区间 $[a,b]$ 上连续函数 $f(x)$ 最值的方法.

(1) 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内的驻点或不可导点分别记为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，则先求出 $f(x)$ 在这些点的值以及在区间端点 a 和 b 的值，然后加以比较，最大者为最大值，最小者为最小值，即

最大值 $=\max\{f(a),f(b),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$；

最小值 $=\min\{f(a),f(b),f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\}$.

(2) 若 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内只有一个极值，则此极大(小)值就是 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大(小)值.

(3) 若 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的单调函数，则最值在区间的端点处取得.

【例 3.29】求下列函数的最大值和最小值.

(1) $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$，$x\in[0,2]$；

(2) $f(x)=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$，$x\in[-1,5]$.

【解】(1) $f'(x)=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\dfrac{2}{3}x(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}(x^2-1)^{\frac{2}{3}}}$.

令 $f'(x)=0\Rightarrow(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}=0\Rightarrow(x^2-1)^2=x^4\Rightarrow x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（$x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 舍去）.

又当 $x=1$ 时，$f'(x)$ 不存在.

而 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt[3]{4}$，$f(1)=1$，$f(0)=1$，$f(2)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$，比较这几个函数值，可知 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上的最大值为 $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt[3]{4}$，最小值为 $f(2)=\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}$.

(2) 求 $f(x)=\sqrt[3]{2x^2(x-6)}$ 在 $[-1,5]$ 上的最值，只需求 $g(x)=2x^2(x-6)$ 在 $[-1,5]$ 上的最值.

$g'(x)=4x(x-6)+2x^2=6x(x-4)$，令 $g'(x)=0\Rightarrow x=0,x=4$.

且 $g(0)=0$，$g(4)=-64$，$g(-1)=-14$，$g(5)=-50$.

比较这几个函数值，可知 $g(x)$ 在 $[-1,5]$ 上的最大值为 $g(0)=0$，最小值为 $g(4)=-64$.

故 $f(x)$ 在 $[-1,5]$ 上的最大值为 0，最小值为 $\sqrt[3]{-64}=-4$.

四、曲线的凹凸性和拐点

1. 函数的拐点和凹凸性

定义 1 设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 I 中任意两点 x_1,x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\left(\text{或 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right),$$

则称 $f(x)$ 在 I 上是凸的(或凹的).

定义 2 在区间 I 内，若曲线 $y=f(x)$ 上每一点的切线都在曲线的上(下)方，则称曲线在该区间内是凸(或凹)的.

定义 3 函数 $y=f(x)$ 的图形的凹凸分界点称为图形的拐点.

定理 1 **(凹凸性的判别定理)** 若在 I 上，函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数，若 $f''(x)<0$(或 $f''(x)>0$)，则 $f(x)$ 在 I 上是凸的(或凹的).

定理 2 **(拐点的判别定理 1)** 若在点 x_0 处有 $f''(x_0)=0$(或 $f''(x_0)$ 不存在)，当 x 经过 x_0 时，$f''(x)$ 变号，则 $(x_0,f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形的拐点.

定理 3 **(拐点的判别定理 2)** 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内有三阶导数，且 $f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则 $(x_0,f(x_0))$ 为函数 $y=f(x)$ 的图形的拐点.

2. 判别曲线凹凸区间与拐点的一般步骤

(1) 确定函数的定义区间；

(2) 求出函数的二阶导数 $f''(x)$，令 $f''(x)=0$，解出点 x，并求出使 $f''(x)$ 不存在的点；

(3) 以上述各点为分点，将函数的定义区间分为若干个子区间，讨论 $f''(x)$ 在各子区间内的符号，确定曲线的凹凸区间并求出拐点. 拐点的简单判别方法：若经过某一点时二阶导数变号，则该点为函数的拐点.

【例 3.30】 确定曲线 $y=\dfrac{x}{1+x^2}$ 的凹凸区间和拐点.

【解】 $y'=\dfrac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2}=\dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,

$$y''=\frac{-2x(1+x^2)^2-4x(1+x^2)(1-x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{2x(x^2-3)}{(1+x^2)^3}.$$

令 $y''=0\Rightarrow x=-\sqrt{3}, x=\sqrt{3}, x=0$，这三个点将函数的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 分成四个部分，列表 3-3 如下.

表 3-3

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	凸	$-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 拐点	凹	0 拐点	凸	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ 拐点	凹

由表 3-3 可见，曲线的凸区间为 $(-\infty,-\sqrt{3})$ 和 $(0,\sqrt{3})$；

曲线的凹区间为 $(-\sqrt{3},0)$ 和 $(\sqrt{3},+\infty)$；

拐点为 $\left(-\sqrt{3},-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$, $(0,0)$, $\left(\sqrt{3},\dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

【例 3.31】已知点(2,4)是曲线 $y=x^3+ax^2+bx+c$ 的拐点，且在点 $x=3$ 取得极值，求 a,b,c.

【解】由于(2,4)是曲线的拐点，故(2,4)在曲线上，即 $y|_{x=2}=4$，且 $y''|_{x=2}=0$.

又 $x=3$ 是函数的极值点，所以 $y'|_{x=3}=0$.

而 $y'=3x^2+2ax+b,y''=6x+2a$，

$$\text{故有}\begin{cases}8+4a+2b+c=4\\27+6a+b=0\\12+2a=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-6\\b=9\\c=2\end{cases}.$$

五、曲线的渐近线

1. 定义

若曲线 $y=f(x)$ 上一动点 P 沿曲线无限远离坐标原点时，点 P 与某一直线 l 的距离趋于零，则称直线 l 为该曲线的渐近线.

2. 渐近线的类型

(1) 水平渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，则直线 $y=b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的水平渐近线.

(2) 垂直渐近线.

若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，则直线 $x=x_0$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的垂直渐近线.

(3) 斜渐近线.

若 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x},b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，则 $y=ax+b$ 称为曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

注 若曲线有水平渐近线，则无斜渐近线，注意区分 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 的情形.

【例 3.32】曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)$ 的渐近线的条数为

(A)0　　(B)1　　(C)2.　　(D)3

【解】(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=0$，

所以 $y=0$ 是曲线的水平渐近线；

(2) $x=0$ 为函数的无定义点，且 $\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\infty$，

所以 $x=0$ 是曲线的垂直渐近线；

(3) 因为 $x\to-\infty$ 时有水平渐近线，则无斜渐近线. 所以只求 $x\to+\infty$ 的情形.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=0+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{e^x}{1+e^x}}{1}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[y-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-x\right]=0,$$

所以 $y=x$ 是曲线的斜渐近线.

故选(D).

六、函数作图及函数图形与其导函数图形的关系

1. 函数作图

根据函数的定义域、单调性、极值、曲线的凹凸性、拐点、渐近线等特性，可以比较准确地描绘出函数的图形. 一般步骤为：

(1) 求出定义域，考查函数的简单特性(如周期性、对称性等)；

(2) 求出间断点和坐标轴的交点；

(3) 求出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$，及使 $f'(x)=0$ 和 $f''(x)=0$ 的点，还有使 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 不存在的点；

(4) 以上述各点为分点，将函数定义域分成若干个区间，列表讨论 $f'(x)$ 与 $f''(x)$ 在各区间内的符号，从而确定函数的单调区间、极值，及曲线的凹凸区间、拐点；

(5) 求出渐近线；

(6) 计算特殊点的函数值，如极值点、拐点，并补充一些有助于确定图形位置的点；

(7) 画图.

【例 3.33】 描绘函数 $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$ 的图形.

【解】 ① 定义域为 $x\neq 1$，即 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，该函数不具有周期性和对称性；

② 与坐标轴的交点为 $(-1,0)$，$x=1$ 为其间断点；

③ $y'=\dfrac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}$，令 $y'=0\Rightarrow x=-1,x=5$，且在 $x=1$ 处 y' 不存在；

$y''=\dfrac{24(x+1)}{(x-1)^4}$，令 $y''=0\Rightarrow x=-1$，且在 $x=1$ 处 y'' 不存在.

④ 列表 3-4 如下.

表 3-4

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,5)$	5	$(5,+\infty)$
y'	+		+		−		+
y''	−		+		+		+
y		$(-1,0)$ 拐点		$x=1$ 垂直渐近线		$f(5)=\dfrac{27}{2}$ 极小值	

⑤ 因为 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}=\infty$，所以 $x=1$ 为垂直渐近线；

$$a=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=1,$$

$$\begin{aligned}b&=\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]\\&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right]=5.\end{aligned}$$

所以 $y=x+5$ 为函数的斜渐近线.

⑥ 作图，如图 3-4 所示.

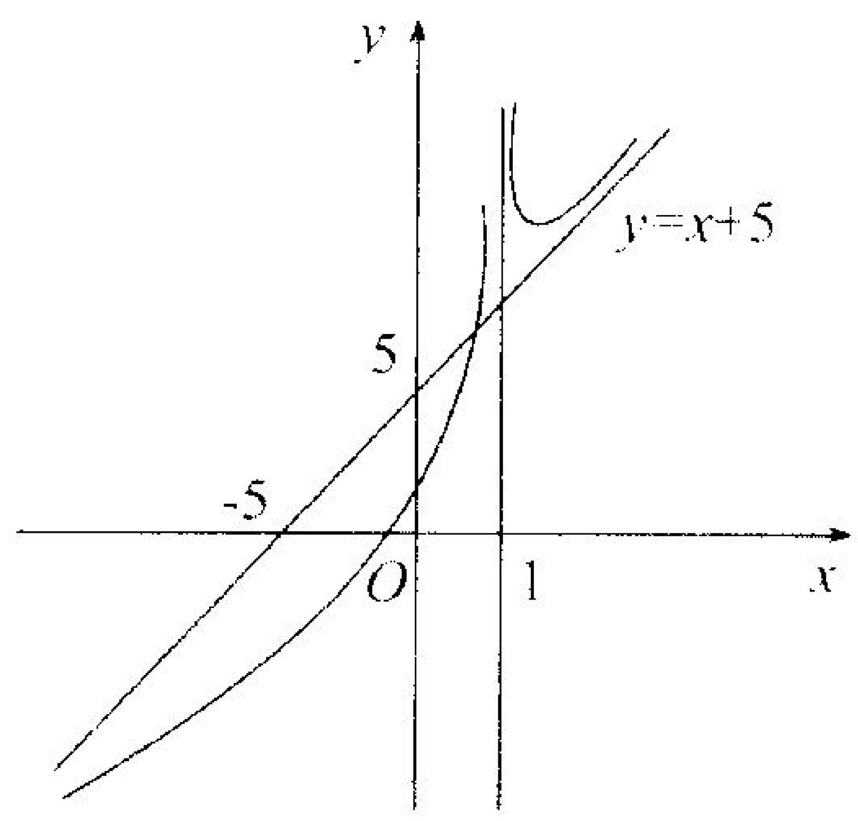

图 3-4

2. 函数图形与其导函数图形的关系

对于根据函数图形判断导函数图形或根据导函数图形判断函数图形的命题，一般找出特殊点(极值点，拐点，不可导点等)作为分界点，然后列表进行判断.

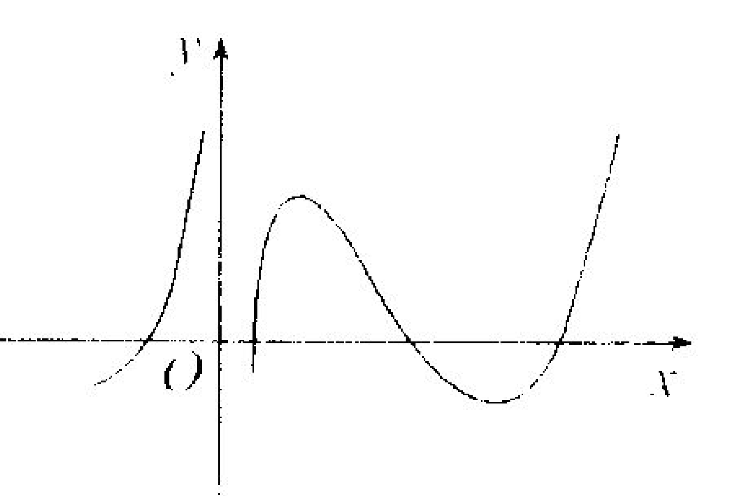

图 3-5

【例 3.34】 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$f(x)$ 的图形如图 3-5 所示. 则其导函数的图形如图 3-6 所示.

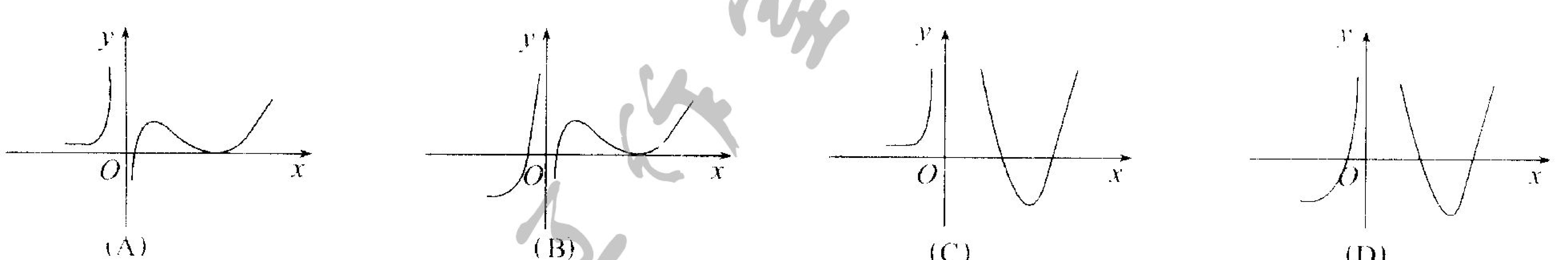

图 3-6

【解】 设两个极值点分别为 ξ_1, ξ_2，则 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，则将点 $x=0, x=\xi_1, x=\xi_2$ 作为分界点，列表 3-5.

表 3-5

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\xi_1)$	ξ_1	(ξ_1,ξ_2)	ξ_2	$(\xi_2,+\infty)$
$f'(x)$	+		+		−		+
$f(x)$	单增		单增		单减		单增

由上表可知，应选(C).

结论："表格"破译"图形"、"图形"用"表格"破译，是最有效最可靠的方法.

七、曲率

1. 弧微分

(1) 直角坐标系下.

设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内具有连续导数，在点 (x,y) 处的弧微分的计算公式为

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{1+y'^2}\,dx;$$

(2) 在极坐标系下.

弧微分的计算公式为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\rho^2 + \rho'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

2. 曲率及其计算公式

曲率 k 是曲线切线的倾斜角 α 关于弧长 s 的变化率的绝对值，计算公式为

(1) $k = \left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right| = \left|\dfrac{\mathrm{d}\arctan y'(x)}{\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x}\right| = \left|\dfrac{y''(x)}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}\right|$.

(2) 对于参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，$k = \dfrac{|\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$.

3. 曲率圆，曲率半径和曲率中心

设曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $k(k \neq 0)$，曲率圆是以曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的法线上且位于曲线凹向的内部与在该点切线距离为 $R = \dfrac{1}{k}$ 的点为圆心，半径为 R 的圆. 曲率圆的半径 R 称为曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径.

由上可知，曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率 $k(k \neq 0)$ 与曲线在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径 R 有如下关系：

$$R = \frac{1}{k},\ k = \frac{1}{R}.$$

注 曲率圆与曲线在点 $M(x,y)$ 处有相同的切线和曲率，且在点 $M(x,y)$ 邻近有相同的凹向.

曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率圆方程为

$$(\xi - \alpha)^2 + (\eta - \beta)^2 = R^2.$$

其中 (α,β) 称为曲线在点 $M(x,y)$ 处的曲率中心，R 为曲线 $y = f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率半径.

设 $y = f(x)$ 的二阶导数 y'' 在 x 点不为零，则曲线在其对应点 $M(x,y)$ 处的曲率中心 $D(\alpha,\beta)$ 的计算公式为

$$\begin{cases} \alpha = x - \dfrac{y'(1+y'^2)}{y''} \\ \beta = y + \dfrac{1+y'^2}{y''} \end{cases}.$$

【例 3.35】 求曲线 $y = x\sin x$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 处的曲率.

【解】 因为 $y' = \sin x + x\cos x$，$y'' = 2\cos x - x\sin x$，

所以
$$k\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{|2\cos x - x\sin x|}{[1 + (\sin x + x\cos x)^2]^{\frac{3}{2}}}\bigg|_{x=\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\pi}{8}.$$

【例 3.36】 求抛物线 $y = \sqrt{x}$ 在点 $M(1,1)$ 处的曲率圆方程.

【解】 由题设可知

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ y'' = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}.$$

则 $$y'\big|_{(1,1)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\bigg|_{(1,1)} = \frac{1}{2}, y''\big|_{(1,1)} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}\bigg|_{(1,1)} = -\frac{1}{4}.$$

设 $y=\sqrt{x}$ 在点(1,1)处的曲率圆方程为
$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2,$$

其中 $$\alpha = 1-\frac{y'(1+y'^2)}{y''}\bigg|_{(1,1)} = 1-\frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{4}}{-\frac{1}{4}} = \frac{7}{2}.$$

$$\beta = 1+\frac{1+y'^2}{y''}\bigg|_{(1,1)} = 1+\frac{1+\frac{1}{4}}{-\frac{1}{4}} = -4.$$

$$R = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}\bigg|_{(1,1)} = \frac{\frac{5\sqrt{5}}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$

故 $y=\sqrt{x}$ 在点(1,1)处的曲率圆方程为
$$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+(y+4)^2=\frac{125}{4}.$$

习 题 三

一、单项选择题

1. 设 $f(x)$ 在 x_0 处连续，在 x_0 的某去心邻域内可导，且 $x\neq x_0$ 时，$(x-x_0)f'(x)>0$，则 $f(x_0)$ 是

A. 极小值. B. 极大值.

C. x_0 为 $f(x)$ 的驻点. D. x_0 不是 $f(x)$ 的极值点. 【 】

2. 曲线 $y=xe^{\frac{1}{x^2}}$

A. 仅有水平渐近线. B. 仅有铅直渐近线.

C. 既有水平渐近线又有铅直渐近线. D. 既有铅直渐近线又有斜渐近线. 【 】

3. 当 a 取下列哪个值时，函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-a$ 恰好有两个不同的零点？

A. 2. B. 4. C. 6. D. 8. 【 】

4. 设 $f'(x)=g(x)$，$x\in(a,b)$，已知曲线 $y=g(x)$ 的图像如下(见图 3-7)，则曲线 $y=f(x)$ 的极值点为

A. c_1,c_3. B. c_2,c_4. C. c_1,c_2,c_3. D. c_2,c_4,c_5. 【 】

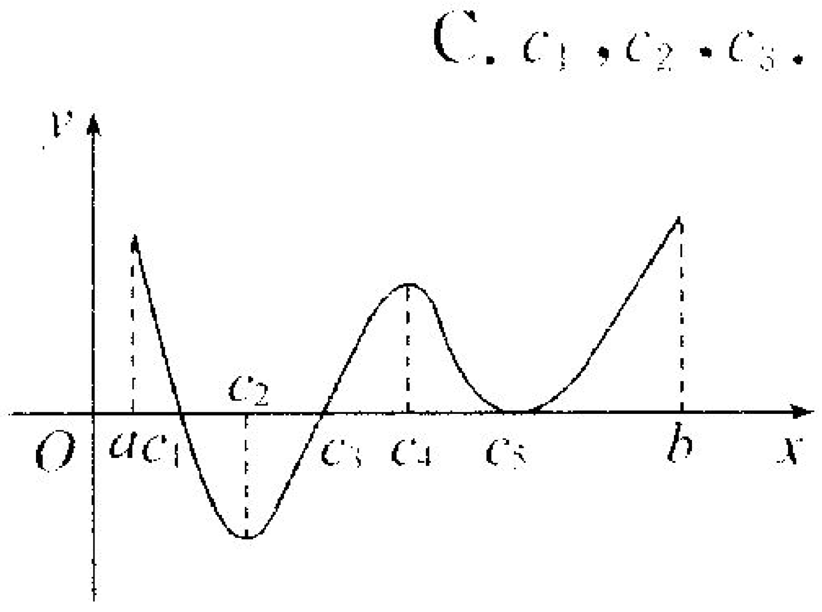

图 3-7

5. 设 $f(x)=x\sin x+\cos x$，下列命题中正确的是

A. $f(0)$ 是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极小值.　　B. $f(0)$ 是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 是极大值.

C. $f(0)$ 是极大值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极大值.　　D. $f(0)$ 是极小值，$f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 也是极小值.　【　】

6. 若 $f(x)$ 二阶可导，且 $f(x)=-f(-x)$；又当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f''(x)>0$，则在 $(-\infty,0)$ 内函数 $f(x)$

A. 下降且凸的.　　B. 下降且凹的.

C. 上升且凸的.　　D. 上升且凹的.　【　】

7. 设三次曲线 $y=x^3+3ax^2+3bx+c$ 在 $x=-1$ 处取极大值，点 $(0,3)$ 是拐点，则

A. $a=-1,b=0,c=3$.　　B. $a=0,b=-1,c=3$.

C. $a=3,b=-1,c=0$.　　D. 以上均错.　【　】

二、填空题

1. 曲线 $y=xe^{-x^2}$ 的凹区间是________.

2. 曲线 $\begin{cases}x=a\cos^3 t\\ y=a\sin^3 t\end{cases}$ 在 $t=t_0$ 处的曲率为________.

3. 当 $x=$ ________ 时，函数 $y=x2^x$ 可取得极小值.

4. 曲线 $y=x\ln\left(e+\frac{1}{x}\right)(x>0)$ 的渐近线为________.

5. 函数 $y=x+2\cos x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最大值是________.

6. 函数 $y=x+\frac{1}{x}$ 有________条渐近线.

三、计算题

1. 求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值，并求该函数图形的渐近线.

2. 已知 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，且

$$\lim_{x\to\infty}f'(x)=e,\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x=\lim_{x\to\infty}[f(x)-f(x-1)]，求\ c.$$

3. 求函数 $f(x)=(x-2)^2x^{\frac{2}{3}}$ 的单调区间和极值.

4. 确定曲线 $y=\frac{x^2}{2}+\frac{9}{10}(x-2)^{\frac{5}{3}}$ 的凹凸区间和拐点.

四、证明题

1. 证明：当 $0<x<\pi$ 时，有 $\sin\frac{x}{2}>\frac{x}{\pi}$.

2. 证明：当 $0<a<b<\pi$ 时，$b\sin b+2\cos b+\pi b>a\sin a+2\cos a+\pi a$.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$，试证：至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=f(\xi)$.

4. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，$f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明：(1) 存在一个 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 对于任意给定的正数 a,b，存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，使得 $\frac{a}{f'(\xi)}+\frac{b}{f'(\eta)}=a+b$.

5. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上可导，且 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}$.

证明：存在 $\xi>0$，使 $f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

参 考 答 案

一、1. A　2. D　3. B　4. A　5. B　6. C　7. B

二、1. $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},0\right)\cup\left(\sqrt{\frac{3}{2}},+\infty\right)$.　　2. $k=\left|\frac{2}{3a\sin 2t_0}\right|$.

3. $x=-\frac{1}{\ln 2}$.　　4. $y=x+\frac{1}{e}$.　　5. $\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}$.　　6. 2 条.

三、1. (1) 递增区间为$(-\infty,-1)$,$(0,+\infty)$;递减区间为$(-1,0)$;

(2) 极小值为 $f(0)=-e^{\frac{\pi}{2}}$;极大值为 $f(-1)=-2e^{\frac{\pi}{4}}$;

(3) 斜渐近线为:$y=e^{\pi}(x-2)$,$y=x-2$;无水平渐近线和垂直渐近线.

2. $c=\frac{1}{2}$(利用拉格朗日中值定理和第二种重要极限公式).

3. 函数的单增区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right)$和$(2,+\infty)$;单减区间为$(-\infty,0)$和$\left(\frac{1}{2},2\right)$. 函数在 $x=0$ 和 $x=2$ 处分别取得极小值 $f(0)=f(2)=0$;在 $x=\frac{1}{2}$ 处取得极大值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{9}{8}\sqrt[3]{2}$.

4. 曲线的凹区间为$(1,2)$;曲线的凸区间为$(-\infty,1)$和$(2,+\infty)$;曲线的拐点为$\left(1,-\frac{2}{5}\right)$和$(2,2)$.

四、1. 提示:设 $f(x)=\sin\frac{x}{2}-\frac{x}{\pi}$,利用导数判断函数单调性证明.

2. 提示:令 $b=x$,构造辅助函数 $f(x)=x\sin x+2\cos x+\pi x-a\sin a-2\cos a-\pi a$,再利用函数的单调性证明.

3. 提示:作辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x)$,利用罗尔定理.

4. (1) 提示:作辅助函数 $F(x)=f(x)+x-1$,利用零值定理;

(2) 提示:由题设知 $0<\frac{a}{a+b}<1$,由介值定理知,存在 $\tau\in(0,1)$,使得 $f(\tau)=\frac{a}{a+b}$. $f(x)$ 在$[0,\tau]$,$[\tau,1]$上分别用拉格朗日中值定理.

5. 提示:令 $F(x)=\frac{x}{1+x^2}-f(x)$. 利用罗尔定理.