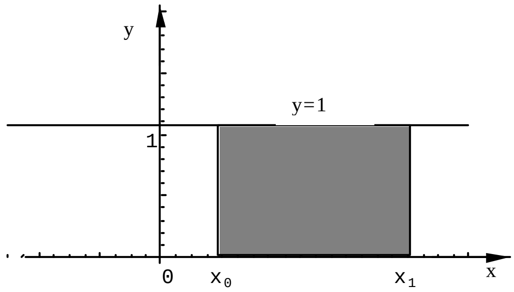
第 一 章　函　数

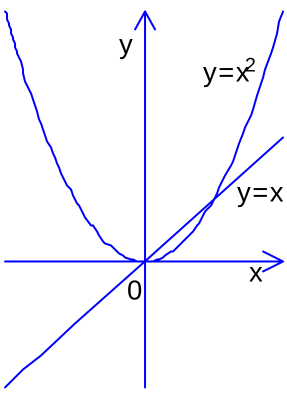
§1.1 初等函数

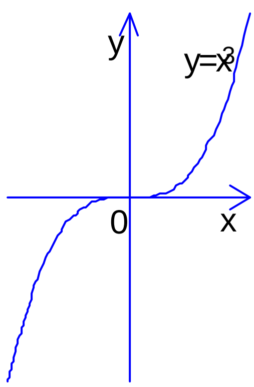
数学分析的研究对象是函数。 初等数学中我们已经初步地接触到初等函数。首先我们回顾一下初等函数，用严厉和好奇的目光，看一看定义上它们有什么不完善的地方，性质上它们还有哪些深刻的东西尚不为认识，为了进一步认识这些性质，需要什么样的新工具。这里讲的初等函数基本上是最基本的初等函数，即常数函数，单项式函数，多项式函数，有理函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数，我们还将介绍双曲函数及其反函数。

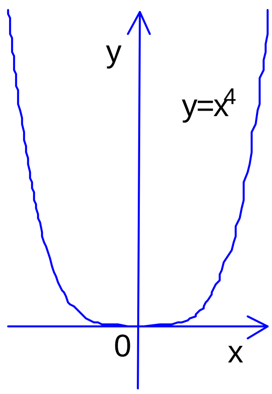
常数函数 $y=c$ 对所有 x，$-\infty<x<+\infty$．这里 $-\infty$，$+\infty$ 分别表示负无穷大和正无穷大。也就是说常数函数的定义域为整个实数轴。下面是 $y=1$ 的函数图形，它是一条与 x 轴平行的直线。 如果 y 表示质点运动的速度，这函数表示匀速直线运动。那么从时刻 x_0 到时刻 x_1 的路程 $S=c(x_1-x_0)$ 就是图中阴影部分的面积(见下图)。



单项式函数 $y=x^k$, $k=1,2,3,\Lambda$ ，对所有 x，$-\infty<x<+\infty$。下面是 $y=x$，x^2，x^3，x^4 的图形。







从图中我们可以看到 $y = x^{2k}$，$k = 1,2,3,\Lambda$ ，是关于 y 轴镜面对称的，这样的函数称为偶函数。

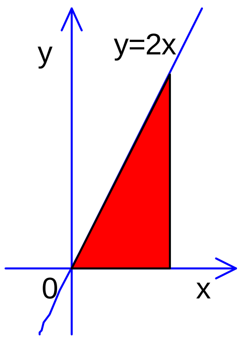
定义 实数轴上一个子集 $X \subset \mathbf{R}$ 称为关于原点对称的，如果对任意的 $x \in X$ ，都有 $-x \in X$ 。

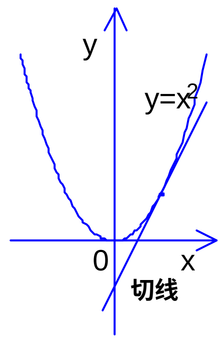
定义 函数 $y = f(x)$ 定义在关于原点对称的子集 X 上，如果对于任意 $x \in X$ ，有 $f(x) = f(-x)$，则称之为偶函数。

$y = x^{2k+1}$，$k = 1,2,3,\Lambda$ ，是关于原点(0,0)中心对称的，这样的函数称为奇函数。

定义 函数 $y = f(x)$ 定义在关于原点对称子集 X 上，如果对于任意 $x \in X$ ，有 $f(-x) = -f(x)$，则称之为奇函数。

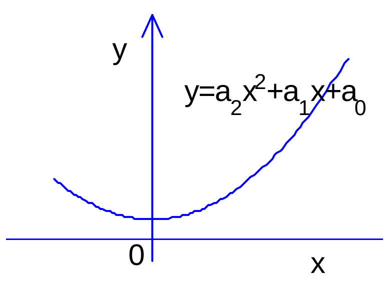
这里我们看到，对于单项式函数，奇偶性恰与它的次数的奇偶性相吻合。





如果 $y = 2x$ 表示质点运动速度，那么它是匀速直线运动，从时刻 $x = 0$ 到时刻 x 它走过的路程是图中阴影三角形面积，等于 x^2，恰为二次单项式函数。 函数 $y = x^2$ 表示了匀速直线运动的路程，取 x 时刻函数图形对应点的斜率，表示该时刻质点的瞬时速度，它恰好为 $2x$。 这两个函数之间关系是很深刻和重要的。一个是积分，一个是微分（或导数），构成微积分的基本研究对象。

多项式函数 $y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ （$a_n \neq 0$），它是有限个单项式函数的线性组合。



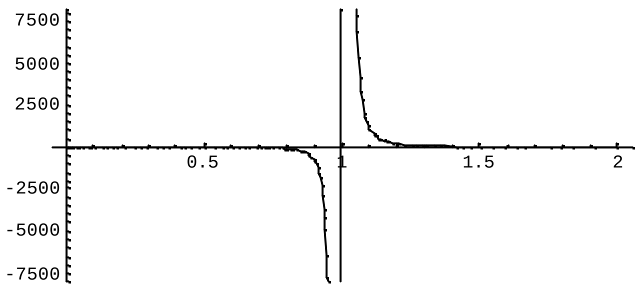
$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad (a_2 \neq 0)$$

给出所有抛物线。在多项式函数中最高次数 n 称为多项式函数的次数。奇数次多项式至少有一个根 x_0，$f(x_0) = 0$。 为什么？ 你能给出证明吗？

多项式函数有个重要代数性质： 两个多项式函数之积仍为一多项式函数， 再加上它的加法运算，它构成一个环，是交换代数研究的对象。

有理函数 $y=\frac{Q(x)}{P(x)}$， $P(x)$ ， $Q(x)$ 都是多项式函数， 通常我们假定 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 没有非零次的公因式。由于零不能做分母，有理函数的定义域要在实数集中除去分母的零点。

有理函数的图形一般是比较复杂的，下面是 $y=\frac{x^2}{(x-1)^3}$ 的图形， 想一想是怎样画出来的。



有了计算机以后，现在很多数学软件， 比如 Mathematica，Maple 等，用它们画图是很容易的。 打开 Mathematica 窗口，用如下命令就可画出上面图形

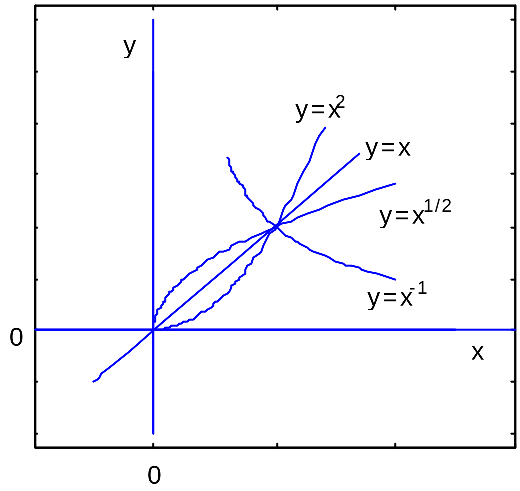
```
Plot[y=x^2/(x-1)^3,{x, 0,2},PlotRange->{-7500,7500}]
```

然后同时按 Shift 和 Enter 键，就大功告成了。`

但是请君不要忘记，软件是人编的， 数学理论和方法才是软件的灵魂！

幂函数 $y=x^a$, $0<x<+\infty$, $a\neq 0$。如果 a = 1,2,3,...， 它就是单项式函数的一半，这里我们研究一般的 $a\neq 0$，它甚至可以是无理数。细想一下这个函数并不简单，比如 $\sqrt{2}^p$ 如何定义都很难说清楚， 要等到第三册才能给出严格定义，其实 $\sqrt{2}$ 本身的定义也需建立实数理论以后才能说清楚。 现在可以用进小数逼近来描述它：$\sqrt{2}$ 可被 1,1.4, 1.41, 1.414,...任意逼近，p 可被 3, 3.1, 3.14, 3.141,...任意逼近，而 1^3 ， $1.4^{3.1}$ ， $1.41^{3.14}$ ， $1.414^{3.141}$ 是可以定义的，它们可以任意地逼近一个实数，我们把这个实数理解为 $\sqrt{2}^p$ 。

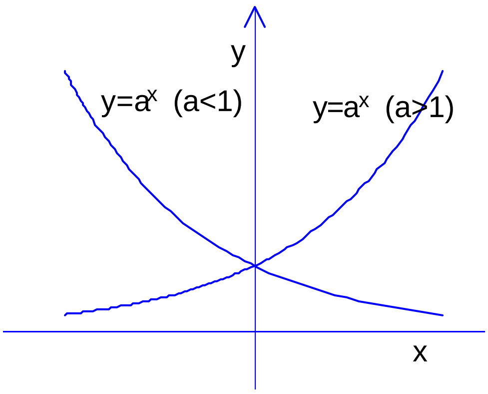
下面图中给出 $y=x$, x^2 , $x^{\frac{1}{2}}$, x^{-1} 四个幂函数的图形。（见下页）



它们的上升，下降，凸凹性质是很值得研究的。

当$a>0$时，$y=x^a$ 在$[0,+\infty)$ 严格上升， $a>1$时凸函数（从下往上看， 严格定义以后再讲），$0<a<1$时凹函数。当 $a<0$ 时，$y=x^a$ 在$[0,+\infty)$ 严格下降。

指数函数 $y=a^x$ （$a>0$，$a\neq1$）.



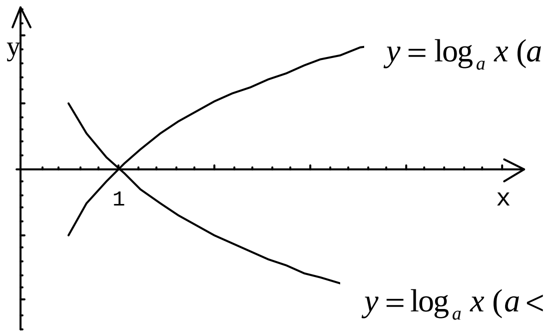
$a>1$ 时在$(-\infty,+\infty)$严格上升。

$a<1$ 时在$(-\infty,+\infty)$严格下降。

引进一个无理数 $e=2.71828\ldots$，以后我们还要详细的研究。 $y=e^x$是一个理论和实用上都非常重要的函数。

对数函数 $y=\log_a x$，它与指数函数 $y=a^x$ 互为反函数，即如果(x,y)满足 $y=\log_a x$，则一定 $x=a^y$，所以 $y=\log_a x$的图形恰为 $y=a^x$的图形沿对角线$y=x$翻转180^o。

$\log_{10}x=\lg x$称为常用对数，它在工程中比较常用。$\log_e x=\ln x$ 称为自然对数，e称为自然对数的底，它在理论研究中常用。 为什么称它“自然”对数，要待日后方知。



$y = \log_a x \ (a > 1)$

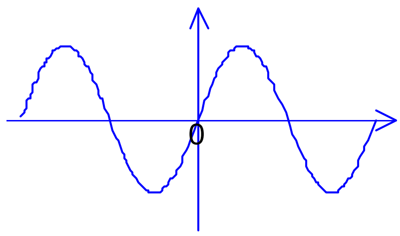
$y = \log_a x \ (a < 1)$

三角函数 $y = \sin x$ $(-\infty < x < +\infty)$

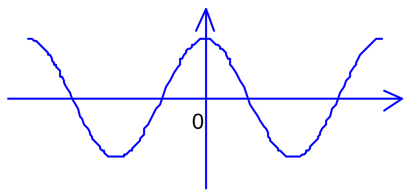
$y = \cos x$ $(-\infty < x < +\infty)$

$y = tgx$ $(x \neq k + \frac{1}{2}p)$

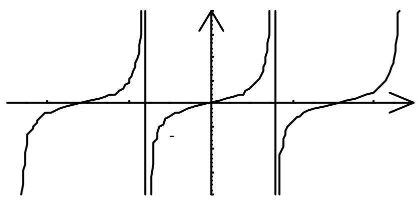
$y = ctgx$ $(x \neq kp)$



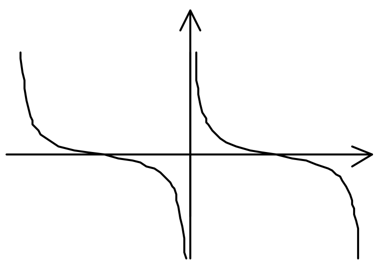
$y = \sin x$ **周期** $2p$**，奇函数**



$y = \cos x$ **周期** $2p$**，偶函数**



$y = tgx$ **周期** p



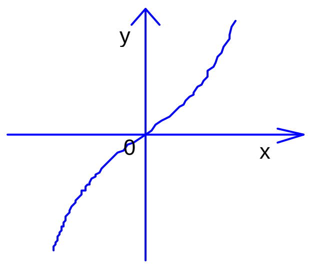
$y = ctgx$ **周期** p

定义 **函数** $y = f(x)$ **定义在** $(-\infty, +\infty)$ **上，如果存在** $l > 0$**，使得对** $\forall x \in (-\infty, +\infty)$**，**

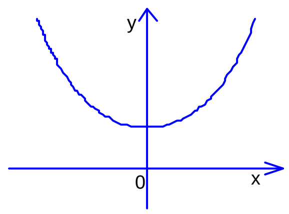
有 $f(x+l)=f(x)$，称 $f(x)$ 为周期函数，l 是 $f(x)$ 的一个周期，l 是，kl 都是。 最小周期简称为周期。

但也有的函数没有最小周期，想一想，你能找一个这样的例子吗？

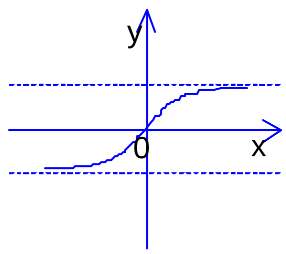
双曲函数



$$y=sh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$



$$y=ch(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$ **悬链线**



$$y=th(x)=\frac{sh(x)}{ch(x)}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}$$

性质 $ch^{2}(x)-sh^{2}(x)=1$ **对照** $\cos^{2}x+\sin^{2}x=1$

$ch^{2}(x)+sh^{2}(x)=ch(2x)$ $\cos^{2}x-\sin^{2}x=\cos(2x)$

$sh(2x)=2sh(x)ch(x)$ $\sin(2x)=2\sin x\cdot\cos x$

令 $X=ch(x)$，$Y=sh(x)$，则它们满足双曲方程 $X^{2}-Y^{2}=1$，这是双曲函数名称的由来的原因之一。 在单位圆盘上的非欧几何——双曲几何（俄国人称为罗巴切夫几何，西方称为 Poincaré几何）。双曲函数是基本的函数论工具。

反双曲函数 反双曲正弦：$y=sh^{-1}x$

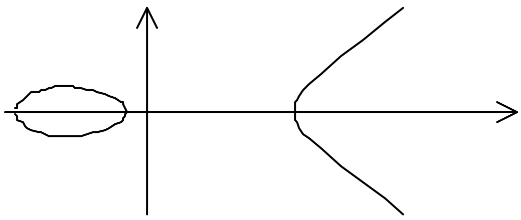
反双曲余弦： $y=ch^{-1}x$，只在右半平面上存在

反双曲正切： $y=th^{-1}x$

基本初等函数看来并不简单，很多性质有待于我们进一步研究。一般的函数，其内涵更为丰富。 我们仅举一例

$$y^2 = 4x^3 - q_2 x - q_3,$$

当其判别式 $\Delta = q_2{}^3 - 27q_3{}^2 \neq 0$ **时，它可以看成两个函数** $y = \sqrt{4x^3 - q_2 x - q_3}$ **和** $y = -\sqrt{4x^3 - q_2 x - q_3}$ **拼起来的，而每一个函数， 比如** $y = \sqrt{4x^3 - q_2 x - q_3}$ **又可看成一个多项式函数** $z = 4x^3 - q_2 x - q_3$ **和一个幂函数** $y = z^{\frac{1}{2}}$ **复合起来的。 它的图形如下**



这里一条代数曲线，其中学问可谓大矣。 由此展开的数学构成代数数论的基本框架，Fermat 大定理的证明就源于此， 可参考陆洪文的书“模形式和数论”。

§1.2 函数的一般概念

设 X **是实数集的一个子集合，** $X \subseteq \mathbf{R}$**，** X **中元素也称为变量， 它可以表示力学，物理，工程乃至社会人文科学中的对象。 一个变量的变化常常会引起另一个变量的变化，这个关系通常用函数来表示。 这一节中的函数是上一节初等函数的一般化。**

定义 **给定** $X \subseteq \mathbf{R}$**，如果存在某种对应法则** f**，使得对于** X **中任一元素** $x \in X$**，都唯一确定的数** $y \in \mathbf{R}$ **与之对应，则称** f **是从** X **到** $\mathbf{R}$ **的一个函数，记作** $f: X \to \mathbf{R}$**。函数** f **在** x **点的值记作** $y = f(x)$**，** X **称为函数** f **的定义域，** x **称为自变量，** y **称为因变量。从概念上讲，** f **（即对应法则）是函数，** $f(x)$ **是函数值，两者是不同的。 但它们是相互决定的，今后在大部分场合，不加区分。 但有些场合，如微分和微分形式概念中，必需加以区分。**

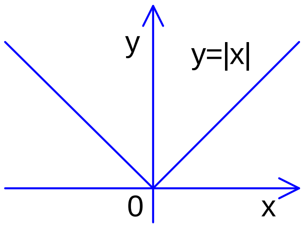
函数定义有两个要素 (X, f)**，即定义域和对应法则。 函数定义一经给定，其值域** $f(X) = \{f(x): x \in X\} \subseteq \mathbf{R}$ **也就决定了，求函数的值域成为研究函数的第一个任务。**

函数定义域应该是定义中给定的，无需去求。 但习惯上，往往先有一个对应法则（通常由一个公式给出），如无特殊要求，将使这个对应法则（公式）有意义的自变量范围理解成定义域，这时就产生一个求函数定义域的问题， 当然我们不能拒绝它。 求函数定义域时两条基本原则，即零不能做分母和负数不能开平方是要切记的。

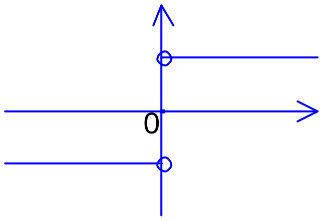
上一节的初等函数都是用公式给出的， 这是函数表示最常用的方法， 但不是唯一的方法，实际工作中还有穷举法，描述法，列表法和图形法。

定义 平面 R^2 上的点集 $E=\{(x, f(x)): x\in X\}$ 称为函数 $f(x)$ 的图形。

例 1 绝对值函数 $y=|x|$。

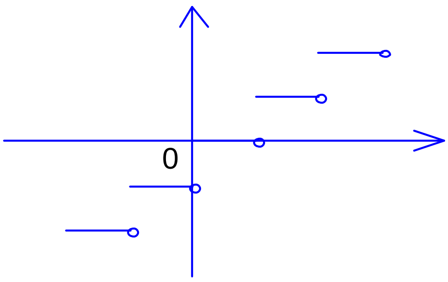


例 2 符号函数 $y=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$，



我们常有 $\operatorname{sgn} x\cdot x=|x|$。

例 3 Gauss 取整函数 $y=[x]$，$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，其图形是黄山路上的百步云梯。



比如：[3.5]=3， [3]=3， [-3.5]=-4。

常有 $[x]\le x<[x]+1$，及 $0\le x-[x]<1$。它是计算机中将浮点数变为整点数的基本方法，不妨在计算机上试一试。 用它还可写出四舍五入的取整函数，不妨试一试。与此有关一个的函数 $f(x)=x-[x]$ 的图形是一条大锯，画出图看一看。

例 4 公民交纳个人所得税数额由他每月收入决定

$$y=\begin{cases} 0 & 0\le x\le 800 \\ (x-800)\times\dfrac{5}{100} & 800<x\le 1300 \\ 500\times\dfrac{5}{100}+(x-1300)\times\dfrac{10}{100} & 1300<x\le 2800 \\ 25+150+(x-2800)\times\dfrac{15}{100} & 2800<x\le 5800 \end{cases}$$

例 5 Dirichlet 函数

$$y = D(x) = \begin{cases} 1 & x\text{为有理数} \\ 0 & x\text{为无理数} \end{cases}$$

这是一个病态函数，很有用处，却无法画出它的图形。 它是周期函数，但却没有最小周期，事实上任一有理数都是它的周期。

几个常用的经济学函数

需求函数： 需求量Q一般与商品的价格P、社会需求与心理、季节有关，当然最重要的是价格因素，所以最简单的$Q = f(P)$，而且一般是P的下降函数。 其反函数$P = P(Q)$，称为价格函数，一般它也是下降函数，需求越少，价格越贵，曲高和寡。

成本函数： 成本主要的是产量的函数，最简单的模型是$C = C(x) = ax + b$，其中b为固定成本，a为可变成本，x是产品产量，$C(x)$表示生产x件（或其它度量单位，如吨，立方米等）产品的总成本。 $\overline{C(x)} = \dfrac{C(x)}{x}$称为单位成本或平均成本。

销售收入函数： $R = p \cdot x = p(x) \cdot x$，其中$x$为销售量，$p = p(x)$为价格。

利润函数： $L(x) = R(x) - C(x)$。

函数的有界性 对函数$f: X \to \mathbf{R}$，若存在$M > 0$，对任意$x \in X$，有$|f(x)| \le M$，则称 $f(x)$在X上有界。

如 $y = \sin x$， $y = \cos x$， $y = D(x)$都是有界函数；$y = x^2$在$X = [-2,2]$是有界的，但在 $(-\infty,+\infty)$是无界的。

逻辑符号： $\exists$ 存在，$\forall$ 任意，它们是一对，互为否命题。

$f: X \to \mathbf{R}$有界：$\exists M > 0$，使得 $\forall x \in X$，有$|f(x)| \le M$。

$f: X \to \mathbf{R}$无界：$\forall n = 1,2,3\Lambda$，$\exists x_n \in X$，使得 $|f(x_n)| > n$。

如： $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在[0，1] 无界。

函数的单调性 X是一区间（$[a, b]$ 闭区间，(a, b)开区间，$(a, b]$，$[a, b)$半开半闭区间，$(-\infty, a]$，$[a, +\infty)$，$(-\infty, +\infty)$无穷区间）， $f: X \to \mathbf{R}$。如果$\forall x_1, x_2 \in X$，

$x_1 < x_2$，有 $f(x_1) \le f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 单调上升或单调递增。

上述定义中将 $\le$ 改为 $\ge$，则称 $f(x)$ 在 X 单调下降或单调递减。

如将 $\le$ 或 $\ge$ 改为 $<$ 或$>$， 则称 $f(x)$ 在 X 严格单调上升或下降。

如： $y = x^3$，$y=[x]$ 在（-∞，+∞）单调上升，且前者严格单调上升。

例题 证明 $f: X \to \mathbf{R}$ 有界的充要条件为：$\exists\ M$，m，使得对 $\forall x \in X$，$m \le f(x) \le M$。

证明 如果 $f: X \to \mathbf{R}$ 有界，按定义 $\exists\ M$ >0，$\forall x \in X$ 有 $\left|f(x)\right| \le M$，即 $-M \le f(x) \le M$，取 $m = -M$，$M = M$ 即可。

反之如果 $\exists\ M$，m 使得 $\forall x \in X$，$m \le f(x) \le M$，令 $M_0 = \max(|M|+1, |m|)$，则 $|f(x)| \le M_0$， 即 $\exists\ M_0 > 0$，使得对 $\forall x \in X$，有 $|f(x)| \le M_0$，即 $f: X \to \mathbf{R}$ 有界。

函数的延拓和限制

$A \subset X$，$f: X \to \mathbf{R}$，$j: A \to \mathbf{R}$， $j(x) = f(x)$，$\forall x \in A$，则 j 为函数 f 在 A 的限制，记做 $f\big|_A$，f 称为 j 到 X 上的延拓。

对延拓可加各种合理的要求，以满足人们的需求。 在信号处理或图象处理中， 如果滤波器较长，用它来对信号或图象进行变换时， 就需对信号或图象进行延拓， 通常可采用周期延拓，奇延拓或偶延拓等。

§1.3 复合函数和反函数

对函数可以实行加减法运算和乘法运算 $f(x)+g(x)$，$f(x)-g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，也可以实行除法运算 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$，这时要特别小心，要除去 $g(x)=0$ 的点。这节中我们研究另外两种重要的运算——复合和反函数。

1.复合函数

定义 设函数 $y=f(x)$ 定义域包含函数 $u=g(x)$ 的值域，则在 $g(x)$ 的定义域上可以用以下法则确定一个函数 $y=f(g(x))$，称之为 f 与 g 的复合函数，记作 $f\circ g$。我们总有 $f\circ g(x)=f(g(x))$。

这里“$\circ$”运算是非交换的，一般的没有 $f\circ g=g\circ f$。但它是结合的：$f\circ(g\circ h)=(f\circ g)\circ h$，故可定义 $f_1\circ f_2\circ\cdots\circ f_n$。

例 $y=f(x)$，$z=y^2$，它们的复合 $z=(f(x))^2$。

2．反函数

定义 设 $f:X\to\mathbf{R}$ 是一函数，如果 $\forall\ x_1$，$x_2\in X$，由 $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$（或由 $f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$），则称 f 在 X 上是 1-1 的。

若 $f:X\to Y$，$Y=f(X)$，称 f 为满的。

若 $f:X\to Y$ 是满的 1-1 的，则称 f 为 1-1 对应。

$f:X\to\mathbf{R}$ 是 1-1 的意味着 $y=f(x)$ 对固定 y 至多有一个解 x，$f:X\to Y$ 是 1-1 的意味着对 $y\in Y$，$y=f(x)$ 有且仅有一个解 x。

定义 设 $f:X\to Y$ 是 1-1 对应。$\forall y\in Y$，由 $y=f(x)$ 唯一确定一个 $x\in X$，由这种对应法则所确定的函数称为 $y=f(x)$ 的反函数，记为 $x=f^{-1}(y)$。

反函数的定义域和值域恰为原函数的值域和定义域

$$f:X\to Y$$

$$f^{-1}:Y\to X$$

显然有

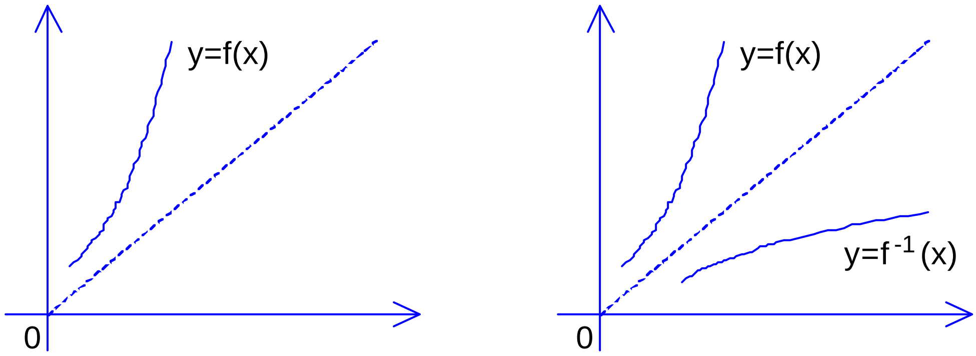
$$f^{-1}\circ f=I:X\to X \quad \text{（恒等变换）}$$

$$f\circ f^{-1}=I:Y\to Y \quad \text{（恒等变换）}$$

$$(f^{-1})^{-1}=f:X\to Y。$$

从方程角度看，函数和反函数没什么区别，作为函数，习惯上我们还是把反函数记为

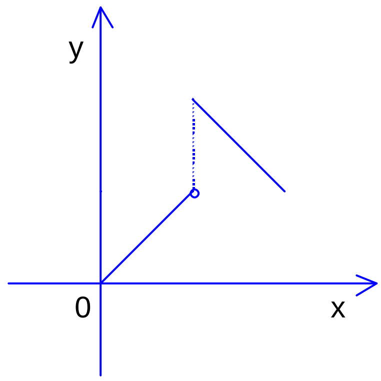
$y = f^{-1}(x)$，这样它的图形与 $y = f(x)$ 的图形是关于对角线 $y = x$ 对称的。



严格单调函数是 1-1 对应的，所以严格单调函数有反函数。 但 1-1 对应的函数（有反函数）不一定是严格单调的，看下面例子

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x < 1 \\ 3 - x, & 1 \le x \le 2 \end{cases}$$

它的反函数即为它自己。



实际求反函数问题可分为二步进行：

1．确定 $f: X \to Y$ 的定义域 X 和值域 Y，考虑 1-1 对应条件。固定 $y \in Y$，解方程 $f(x) = y$ 得出 $x = f^{-1}(y)$。

2．按习惯，自变量 x、因变量 y 互换，得 $y = f^{-1}(x)$。

例 求 $y = sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ ：$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 的反函数。

解 固定 y，为解 $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$，令 $e^x = z$，方程变为

$$2zy = z^2 - 1$$

$$z^2 - 2zy - 1 = 0$$

$$z = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \quad （舍去\ y - \sqrt{y^2 + 1}）$$

得$x=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$，即$y=\ln(x+\sqrt{x^2+1})=sh^{-1}(x)$，称为反双曲正弦。

定理 给定函数$y=f(x)$，其定义域和值域分别记为X和Y，若在Y上存在函数$g(y)$，使得 $g(f(x))=x$，则有$g(y)=f^{-1}(y)$。

分析

要证两层结论：一是$y=f(x)$的反函数存在，我们只要证它是 1-1 对应就行了，

二是要证$g(y)=f^{-1}(y)$。

证 要证$y=f(x)$的反函数存在，只要证$f(x)$是X到Y的 1-1 对应。$\forall\ x_1$，$x_2\in X$，若$f(x_1)=f(x_2)$， 则由定理条件，我们有

$$g(f(x_1))=x_1$$

$$g(f(x_2))=x_2$$

$\Rightarrow x_1=x_2$，即 $f:X\to Y$ 是 1-1 对应。

再证 $g(y)=f^{-1}(y)$。$\forall\ y\in Y$，$\exists\ x\in X$，使得$y=f(x)$。由反函数定义$x=f^{-1}(y)$，再由定理条件$g(y)=g(f(x))=x\Rightarrow g(y)=f^{-1}(y)$。

例 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，若$f(f(x))$存在唯一（$\exists|$）不动点，则$f(x)$也$\exists|$不动点。

证 存在性，设$x^*=f[f(x^*)]$，$f(x^*)=f\circ f[f(x^*)]$，即$f(x^*)$是$f\circ f$的不动点，由唯一性$f(x^*)=x^*$，即存在$f(x)$的不动点x^*。

唯一性： 设$\bar{x}=f(\bar{x})$，$\bar{x}=f(\bar{x})=f(f(\bar{x}))$，说明 $\bar{x}$是$f\circ f$ 的不动点，由唯一性，$\bar{x}=x^*$。

从映射的观点看函数。

集合 满足某种性质的事物的全体称为集合，其中的每一事物称为元素。通常用大写字母A,B,C,Λ 表示集合，用小写字母x,y,z,Λ 表示元素，比如x为A中的一个元素，表示为$x\in A$。

例 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\Lambda\}$ 自然数集合

$\mathbf{Z}=\{\Lambda,-2,-1,0,1,2,\Lambda\}$ 整数集合

$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}: p,q\in \mathbf{Z}, q\neq 0\right\}$　　**有理数集合**

$\mathbf{R}$ **= 实数的集合，第三册再定义。**

$\mathbf{C}=\{x+iy: x,y\in\mathbf{R}, i=\sqrt{-1}\}$　　**复数的集合。**

集合表示法　**列举法，如 {2，汽车，熊猫}。**

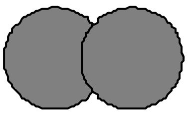
描述法：$\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-5x+4=0\}$ **或** $\{x\in\mathbf{R}: x^2-5x+4=0\}$。

子集　$A\subseteq B$**，即** $\forall x\in A\Rightarrow x\in B$。**称** A **包含于** B**，或** A **为** B **的子集。**

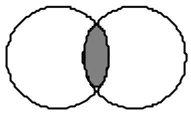
$A=B: A\subseteq B$ **且** $B\subseteq A$。

真子集　$A\subset B$**，即** $A\subseteq B$ **且** $\exists b\in B$**，** $b\notin A$。

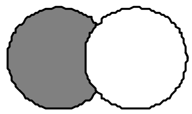
集合的运算　**并，交，差（韦恩图）。**



$A\cup B=\{x: x\in A$ **或** $x\in B\}$



$A\cap B=\{x: x\in A$ **且** $x\in B\}$



$A-B=\{x\in A, x\notin B\}$

补集（余集）　$A\subset\Omega$**，** $A^c=\Omega-A$。

定义　**给定两个集合** X **和** Y**，若存在一对应法则** f**，使得对** $\forall x\in X$**，都有唯一** $y\in Y$ **与之对应，记为** $y=f(x)$**，则称** $f: X\to Y$ **为一个映射。** X **称为定义域，** Y **称为取值域，** $f(X)\subseteq Y$ **称为值域。**

若 $\forall x_1,x_2\in X$**，** $x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)$**，则称** f **为** $1-1$ **的；若** $f(X)=Y$**，称** f **为满的；若** f **既** $1-1$ **又满，称** f **为** $1-1$ **对应。**

X, Y **为有限集合，它们中的元素的个数相同** $\Leftrightarrow$ **存在** $f: X\to Y$ **为** $1-1$ **对应。**

习题：

1.1　函数 $shx=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$**，** $chx=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ **分别称为双曲正弦和双曲余弦函数，证明：**

(1)　$ch^2x-sh^2x=1$**，**　　　　**(2)**

$ch(x\pm y)=chxchy\pm shxshy$**，**

(3) $sh(x\pm y)=shxchy\pm chxshy$， (4) $ch^2x+sh^2x=ch2x$.

1.2 设 $f(x)=2x^2+2x-4$，求 $f(1)$， $f(f(1))$， $f(x^2)$，$[f(x)]^2$， $f(-x^2)$，

$f(a+b)$， $f(a)+f(b)$.

1.3 设 $f(x)=\dfrac{x+2}{x+1}$，

(1) 求 $f(1)$， $f(f(1))$， $f(f(f(1)))$ ；

(2) 求 $f(\sqrt{2})$ ；

(3) 求证 $|f^2(x)-2|<|x^2-2|$， $\forall x>0\quad (x\neq\sqrt{2})$.

1.4 求下列函数 $f(x)$ 的定义域，并用 Mathematica 作函数图形：

(1) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$ ； (2) $f(x)=\sqrt{-x^2}$ ；

(3) $f(x)=\dfrac{\sqrt[6]{x^2-1}}{x}$ ； (4) $f(x)=\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}$ ；

(5) $f(x)=\log x^2$ ； (6) $f(x)=2\log x$ ；

(7) $f(x)=\log x^5$ ； (8) $f(x)=[\log(100-x)]^{-1}$ ；

(9) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{6-x}}$ ； (10) $f(x)=\log x+\log(x-1)$ ；

(11) $f(x)=\log x(x-1)$ ； (12) $f(x)=\sqrt{\cos x}$ ；

(13) $f(x)=\log\cos x$ ； (14) $f(x)=\arccos(3-x)$.

1.5 求下列函数 $y=f(x)$的值域，并用 Mathematica 作函数图形：

(1) $y=|x-1|$， $x\in[0,5]$ ； (2) $y=x+\dfrac{1}{x}$， $x\in(0,+\infty)$ ；

(3) $y=\sqrt{x^2+1}$ ； (4) $y=\sqrt{\dfrac{ax^2+1}{x}}$ ；

(5) $y=ax+\dfrac{b}{x}$， $ab>0$ ； (6) $y=10^{-x^2}$ ；

(7) $y=\log(x^2+e)$ ； (8) $y=1-2|\cos x|$ ；

(9)　$y=\sin x+\sin(x+\frac{p}{3})$；　　　　(10)　$y=\sin^4 x+\cos^4 x$；

1.6　作下列函数图形：

(1)　$y=|x-1|$；　　　　(2)　$y=x-[x]$；

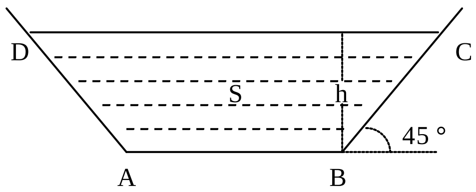
(3)　$y=\ln(1+x)$；　　　　(4)　$y=\ln ax \quad (a=2,\ -2)$；

(5)　$y=3\sin 2(x+\frac{p}{8})$；　　　　(6)　$y=3\sin(2x+\frac{p}{8})$．

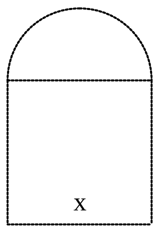
1.7　(1) 某水渠的横断面是一等腰梯形（见图 1），底宽 2 米，坡度为 $1:1$（即倾角 $45°$），$ABCD$ 叫过水断面，求过水断面的面积 S 与水深 h 的函数关系.

(2)　一窗户下面为矩形，上面为半圆形，周长为 l，试将窗户的面积表示成底边 x 的函数（见图 2）.

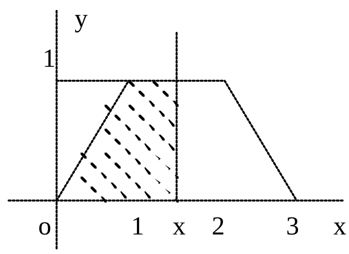
(3) 梯形如图 3 所示，当一垂直于 x 轴的直线扫过该梯形时，若直线的垂足为 x $(-\infty<x<+\infty)$，试将扫过面积表为 x 的函数.



(图 1)



(图 2)



(图 3)

1.8　对下列函数

(1)　$y=|\sin x|$；　　　　(2)　$y=x-[x]$；

(3)　$y=tg\,|x|$；　　　　(4)　$y=\sec 2x$；

(5)　$y=\cos x+\sin x$；　　　　(6)　$y=\sqrt{x(2-x)}$

分别讨论

(1)　函数的定义域和值域；

(2)　哪些函数为偶函数或奇函数；

(3)　哪些函数为周期函数；

(4)　作函数的图形.

1.9　求证 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是奇函数，且严格单调上升.

1.10　设 $f(x)$ 在 $[0,a)\quad(a>0)$ 上定义.

(1) 将 $f(x)$ 延拓到 $(-a,a)$，使其成为偶函数；

（2）将 $f(x)$ 延拓到 $(-\infty,+\infty)$，使其成为周期为 a 的周期函数.

1.11 任一在实轴上定义的函数可分解成奇函数与偶函数之和.

1.12 设 $f(x)$ 是周期为 T $(T>0)$ 的周期函数，求证 $f(-x)$ 也是周期为 T 的周期函数.

1.13 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 (a,b) 上单调上升，求证：

（1） $\max(f(x),g(x))$，　　　（2） $\min(f(x),g(x))$

也在 (a,b) 上单调上升.

1.14 用肯定语气叙述：在 $(-\infty,+\infty)$ 上，

（1） $f(x)$ 不是奇函数；

（2） $f(x)$ 不是周期函数；

（3） $f(x)$ 不是单调上升函数；

（4） $f(x)$ 不是单调函数.

1.15 用肯定语气叙述：

（1） $f(x)$ 在 (a,b) 上无界；

（2） $f(x)$ 在 (a,b) 上没有零点；

（3） $f(x)$ 在 (a,b) 上没有比中点函数值大的点；

（4） $f(x)$ 在 (a,b) 上没有左边函数值比右边函数值都小的点.

1.16 求下列函数的反函数及其定义域：

（1） $y=\dfrac{1}{2}(x-\dfrac{1}{x})\quad(0<x<+\infty)$；

（2） $y=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})\quad(-\infty<x<+\infty)$.

1.17 设

$$f(x)=\begin{cases}-x-1, & x\le 0,\\ x, & x>0;\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}x, & x\le 0,\\ -x^{2}, & x>0;\end{cases}$$

求复合函数 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$.

1.18 设 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^{2}}}$，求 $(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n次})(x)$.

1.19 设 $f(x)=|1+x|-|1-x|$，试求 $(\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{n次})(x)$．

提示：变成分段定义的函数。

1.20 求证：$f(x)=\sin x+\cos\sqrt{2}x$ 为非周期函数．

提示： 利用 1.12 题．

1.21 设 $R(x)$ 为一有理函数，求证：

（1）若 $R(-x)=R(x)$，则 $R(x)=R_1(x^2)$， R_1 为某一有理函数；

（2）若 $R(-x)=-R(x)$，则 $R(x)=xR_2(x^2)$， R_2 为某一有理函数．

1.22 试将下列函数 $f(x)$ 表成偶函数和奇函数的和：

（1） $f(x)=(x+1)^3$ ；

（2） $f(x)=\sin(x+1)$ ；

（3） $f(x)=\dfrac{x-3}{x^4}$ ；

（4） $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$， $|x|<1$ ；

（5） $f(x)=|x-1|$ ；

（6） $f(x)=e^x$ ．

1.23 试证明下列命题：

（1）设函数 $f(x)=ax^2+bx+c$，则

（i） $a>0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty,-\dfrac{b}{2a}]$ 上严格递减；在 $[-\dfrac{b}{2a},+\infty)$ 上严格递增．

（ii） $a<0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty,-\dfrac{b}{2a}]$ 上严格递增；在 $[-\dfrac{b}{2a},+\infty)$ 上严格递减．

（2）函数 $f(x)=x^3+x$ 是递增函数．

（3） 函数 $f(x)=\dfrac{1-x^2}{x}$ 在不含 $x=0$ 的任一区间上都是递减函数．

（4）函数 $f(x)=\log(x^2-2x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上递减，在 $(2,+\infty)$ 上递增．

（5） $f(x)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{x}}$ 在 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ 上严格递增．

（6） $f(x)=3^{|x|}$ 在 $(-\infty,0)$ 上严格递减，在 $(0,+\infty)$ 上严格递增．

（7） $f(x)=2x+\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是递增函数．

（8）在 $(0,p)$ 上函数 $f(x)=\dfrac{\sin(x+a)}{\sin x}$ 是递减函数．