第一章

实 数 理 论

§1 从空集到有理数

实数是在有理数基础上定义的，有理数又是在整数的基础上定义的，而整数又是在自然数的基础上定义的，那么自然数如何定义呢？

有两个集合 A 和 B，我们称它们为等价的，如果存在一个从 A 到 B 的映射 f，它是 $1-1$ 的，又是满的。这时我们说 A 和 B 具有相同的势。我们首先承认空集 f 是存在的，考虑一个集合 $\{f\}$，它不是空集，凡与 $\{f\}$ 等价的集合都有相同的势，我们把 $\{f\}$ 简写为 1。再考虑集合 $\{f,\{f\}\}$，它与 $1=\{f\}$ 是不等价的，我们把它简写为 2。一般地如果有了 n 之后，可以定义它的跟随 $\{f,n\}$，简写为 $n+1$。这样我们就得到了自然数 $\mathbf{N}=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$。在 $\mathbf{N}$ 上可以定义加法：$n+m=n+1+1+\cdots+1$，还可以证明加法满足结合律和交换律：$n+(m+p)=(n+m)+p$，$n+m=m+n$。这样我们就从空集出发，定义出自然数 $\mathbf{N}$。这是一个最抽象的定义，比如说 2，它不指二个人，也不指二个物，而是指一个集合 $\{f,\{f\}\}$，这个集合有两个不同的元素 $\{f\}$ 和 f。凡是与它等价的集合，都与它有相同的势，于是二个人，二个物……，都具有相同的势，按我们的理论，用 $\{f,\{f\}\}$ 作为它们的代表。

在集合 $\{(m,n):m,n\in\mathbf{N}\}$ 中，考虑一个关系 $\sim$ ：$(m,n)\sim(m',n')$ 当且仅当 $m+n'=m'+n$，容易证明 $\sim$ 是一个等价关系。 整数 $\mathbf{Z}$ 现在定义为：

$$\mathbf{Z}=\{(m,n):m,n\in\mathbf{N}\}/\sim\ 。$$

在 $\mathbf{Z}$ 上可以定义加法：$(m,n)+(m',n')=(m+m',n+n')$，还可以定义减法：$(m,n)-(m',n')=(m+n',m'+n)$。可以验证它们在 $\mathbf{Z}$ 中封闭，而且互为逆运算。在 $\mathbf{Z}$ 中我们用 0 表示 $\{(n,n):n\in\mathbf{N}\}$，,即 $0=1-1=2-2=\cdots$，用 k 表示 $\{(n+k,n):n,k\in\mathbf{N}\}$，即 $k=(k+1)-1=(k+2)-2=\cdots$，用 -1 表示 $\{(n,n+1):n\in\mathbf{N}\}$，即 $-1=1-2=2-3=\cdots$。

在集合$\{(p,q): p,q\in \mathbf{Z},\ q\neq 0\}$中,考虑一个关系 $\sim$ ：$(p,q)\ \sim\ (p',q')$ 当且仅当 $pq'=p'q$，它也是一个等价关系，有理数 $\mathbf{Q}$ 现在定义为：

$$\mathbf{Q}=\{(p,q): p,q\in \mathbf{Z}, q\neq 0\}/\sim \ 。$$

在 $\mathbf{Q}$ 中我们可以定义加法，减法，乘法，除法，还可证明加减法互为逆运算，乘除法互为逆运算等性质，在 $\mathbf{Q}$ 中我们用$\frac{p}{q}$，且$(p,q)=1$表示其中一个有理数，比如用$\frac{1}{2}$表示$(n,2n)$。

这样我们完成了从空集f出发到有理数集 $\mathbf{Q}$ 的定义。

在 2500 年前，毕达哥拉斯学派认为一切线段都由原子组成，而原子有一个固定长度，比如假定单位线段由q个原子组成，被测量的线段由 p 个原子组成，则线段之长为：$\frac{p}{q}$，即有理数可以度量一切长度。但毕达哥拉斯学派弟子希伯斯发现正五角形的边长为1时，对角线长不能由有理数表示，希伯斯因此受到迫害。但后来发现有很多长度不能用有理数表示，比如简单地取正方形边长为1，由勾股定理，它的对角线长度的平方应为2，我们记之为$\sqrt{2}$，如果它是有理数，就应该有：

$$\sqrt{2}=\frac{m}{n}，\quad (m,n)=1，\quad n\neq 0。$$

两边平方，得$2n^2=m^2$，因为m，n都是整数，表明m^2中含2因子，即m中含2因子，设$m=2p$，则$n^2=2p^2$，同样推理表明n中也含2因子，与$(m,n)=1$矛盾，所以$\sqrt{2}$不是有理数。这表明只有有理数是不够的，必须引入新的数，即无理数，它们合在一起称为实数。

§2 实数的定义（戴德金分割）

定义实数有不同的方法，戴德金分割是一个比较标准的方法。直观地看，有理数 $\mathbf{Q}$ 在实轴上没有填满，还有很多“孔隙”，戴德金分割就是在数轴上割一刀，把现有的有理数 $\mathbf{Q}$ 分成两部分，如果这一刀恰好砍在某个有理数上，这一分割对应的就是这个有理数，如果没碰到任何有理数，这个分割就定义出一个无理数。

定义 1 将有理数全体组成的集合分成A，B两类，使满足以下性质：

1） A与B都至少包含一个有理数（不空）；

2） 任一有理数，或属于A，或属于B（不漏）；

3） A中任一数a均小于B中任一数b，即$a\in A$，$b\in B \Rightarrow a<b$（不乱）；

4） A中没有最大的数，即$a\in A$，$\exists\, a'\in A$，使$a<a'$。则称A，B为有理数的一个分划，A称为分划的下类，B称为分划的上类，记作$(A\,|\,B)$。

定义中4）不同于1）—3），它是非实质性的，只是为了推理的方便。定义中4）用到有理数的稠密性（即两个有理数之间必有一有理数），如A有最大数，将此数放入B，则它是B的最小数，这时A就无最大数；若A还有最大数，根据有理数的稠密性，A的最大数与B的最小数之间必有一有理数，这个有理数被漏掉了，这与分划的定义矛盾。

注意定义没有用到有理数的极限，只用到有理数性质和集合概念。由分划的定义知，若a为下类的任一数，则小于a的任何有理数也属于下类；b为上类中的任一数，则大于b的任何有理数也属于上类。

下面用$\mathbf{Q}$记有理数的集合。

例1 $A=\{\, x\,|\,x<1,\ x\in \mathbf{Q}\}$；

$B=\{\, x\,|\,x\geq 1,\ x\in \mathbf{Q}\}$。

容易看出A、B构成有理数的一个分划，这时上类B有最小数1。

例2 $A=\{\, x\,|\,x\leq 0$ 或 $x>0$ 且 $x^2<2,\ x\in \mathbf{Q}\}$；

$B=\{\, x\,|\,x>0$ 且 $x^2>2,\ x\in \mathbf{Q}\}$。

显然A、B不空、不乱，因为没有有理数平方等于2，所以不漏，下面证A无最大数。

设$a\geq 0$，$a^2<2$，要证存在有理数$r>0$，使

$$(a+r)^2<2\text{。}$$

即要证 $a^2+2ar+r^2<2$，或 $2ar+r^2<2-a^2$。

当$r\leq 1$时，只要$2ar+r<2-a^2$，也就只要$r<\dfrac{2-a^2}{2a+1}$。所以取有理数r满足$0<r<\min\{\,1,\ \dfrac{2-a^2}{2a+1}\}$时，即有$(a+r)^2<2$，故$A$中存在有理数$a+r>a$。当$a<0$时，属于$A$的有理数$0$即大于$a$，这就证明了$A$无最大数。因此$A\,|\,B$是有理数的一个分划。

这个分划中，上类B无最小数。事实上，设$b\in B$，即$b>0$且$b^2>2$，要证存在有理数$r>0$，使$b-r>0$，且$(b-r)^2>2$，即

$$b^2-2br+r^2>2\text{，}\quad \text{或}\quad 2br-r^2<b^2-2\text{。}$$

要使上式成立，只要$2br < b^2-2$， $r < \dfrac{b^2-2}{2b}$。由于$\dfrac{b^2-2}{2b} > 0$，根据有理数的稠密性，知存在有理数r使得$0 < r < \dfrac{b^2-2}{2b}$，又由$\dfrac{b^2-2}{2b} < b$，推知$r < b$，对这样的$r$，满足$b-r > 0$，$(b-r)^2 > 2$，这就证明了，在$B$中找到了比$b$更小的有理数$b-r$，所以$B$无最小数。

可见，有理数的分划可以分为两类，第一类型是上类B有最小数，我们称这类分划为有理分划；第二类型是上类B无最小数，我们称这类分划为无理分划。显然，任一有理分划与其上类的最小有理数对应，反之任一有理数b，总可确定一有理分划：

$$A = \{\, x \mid x < b,\ x \in \mathbf{Q}\} ;$$

$$B = \{\, x \mid x \geq b,\ x \in \mathbf{Q}\}。$$

这样，有理数可以与有理分划建立一一对应，我们就用无理分划来填充直线上的“孔隙”。于是有如下定义。

定义 2 有理数的任一无理分划称为无理数。

为了一致起见，称有理数的任一有理分划为有理数。有理数和无理数统称为实数。

§3 实数的性质

为了研究实数的性质，我们回顾有理数的一些熟知性质，如有理数是全序域，所谓全序域，简单地说就是可以比较大小，而且在有理数中可以作加、减、乘、除四则运算。有理数集是稠密的，即对任意有理数a、b $(a<b)$，总存在有理数c，使得$a<c<b$。由稠密性虽得不出有理数连续地分布在数轴上，但却是密密麻麻地分布在数轴上。另外，有理数满足阿基米德原理，即对任意有理数$b > a > 0$，必存在自然数n，使得$na > b$。

3.1 实数的运算

我们用$x, y, z, \cdots$表示实数，即表示有理数的分划，用$a, b, c, \cdots$表示有理数。用记号$\mathbf{R}$表示实数的集合，记号$\mathbf{Q}$表示有理数的集合。为了书写方便，用A_x表示实数x的下类，B_x表示实数x的上类，B_x^0表示B_x去掉最小数的集合。

定义 1 设有实数x、y，

1） 若集合$A_x = A_y$，则称$x = y$；

2） 若集合$A_x \neq A_y$，$A_x \subset A_y$，则称x小于y，或y大于x，记作$x < y$或$y > x$。

当x、y为有理分划时，这定义与把x、y看成有理数的相等和大小关系是一致的。

与有理数0对应的有理分划仍记为0，若$x>0$，称x为正实数；若$x<0$，称x为负实数。

设实数$x<y$，由定义存在有理数q_1，使$q_1 \in A_y$，$q_1 \notin A_x$。再由A_y无最大数，所以存在有理数q_2，q_3，使

$$q_1<q_2<q_3, \quad q_i \in A_y, \quad q_i \notin A_x \quad (i=2,3)。$$

有理数q_2产生的有理分划记作z，容易看出$x<z<y$，即实数集是稠密的。

为了定义加法，我们需要下面引理。

引理 1　设x、y为实数，令$A=\{a_1+a_2 \mid a_1 \in A_x, a_2 \in A_y\}$，$B=\mathbf{Q}-A$。则$(A \mid B)$是有理数的分划。

证明： A、B满足分划不漏的条件是显然的，集合A无最大元素也是明显的。只要证满足分划的不空和不乱条件即可。

先证A、B不空。 A不空是显然的，证B不空。 因集合B_x，B_y不空，$\exists b_1 \in B_x$，$b_2 \in B_y$，只要证$b_1+b_2 \in B$。

假设不然，即$b_1+b_2 \in A$，由A的定义，$\exists a_1 \in A_x$，$a_2 \in A_y$，使$b_1+b_2=a_1+a_2$，而由分划x、y不乱条件得$a_1<b_1$，$a_2<b_2$，即得$a_1+a_2<b_1+b_2$。故矛盾，所以$b_1+b_2 \in B$。

再证不乱。设$a \in A$，$b \in B$，要证$a<b$。

假设不然，$a \geq b$，由A的定义，$\exists a_1 \in A_x$，$a_2 \in A_y$，使得$a=a_1+a_2 \geq b$，因此$a_2 \geq b-a_1$，由分划y的不乱，得$b-a_1 \in A_y$，于是$b=a_1+(b-a_1) \in A$，故矛盾。所以$a<b$。

因此$(A \mid B)$是有理数的分划。

定义 2　在引理 1 条件下，称实数$(A \mid B)$为实数x与y的和，记作$x+y$。

当x、y为有理分划时，和也为有理分划，且和的定义与把x、y看成有理数时和的定义是一致的。

由上看出，这种证明没有什么困难，所以，下面我们只叙述定义，而略去证明。

要定义减法只要定义负数即成。

负数的定义　给定实数x，令$A=\{a \mid -a \in B_x^0\}$，$B=\mathbf{Q}-A$，则$(A \mid B)$是有理数的分划，我们称$(A \mid B)$为实数$x$的负数，记作$-x$。

由负数定义，容易证明下面性质：

1） 若 $x<0$，则有 $-x>0$；

2） 若 $x=y$，则 $-x=-y$；

3） $-(-x)=x$；

4） $-(x+y)=(-x)+(-y)$。

为了定义乘法，我们先要定义绝对值。设 $x\neq 0$，称 x 与 $-x$ 中的正实数为 x 的绝对值，记作 $|x|$，规定 $|0|=0$，于是

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{当} x>0; \\ 0, & \text{当} x=0; \\ -x, & \text{当} x<0. \end{cases}$$

乘法的定义　设有实数 $x>0$，$y>0$，令

$$A=\{a_1\cdot a_2 \mid 0<a_1\in A_x, 0<a_2\in A_y\}\cup\{a \mid a\leq 0, a\in \mathbf{Q}\}；$$

$$B=\mathbf{Q}-A。$$

则 $(A|B)$ 是有理数的分划，我们称实数 $(A|B)$ 是实数 x 与 y 的积，记作 $x\cdot y$。

对于一般的情形，我们定义：

$$x\cdot y=\begin{cases} |x|\cdot|y|, & (x、y\text{同号})； \\ -(|x|\cdot|y|), & (x、y\text{异号})； \\ 0, & (x=0 \text{ 或 } y=0). \end{cases}$$

显然，有 $|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$。

要定义除法，只要定义倒数。

倒数的定义　设 $x>0$，令

$$A=\{a \mid \frac{1}{a}\in B_x^0\}\cup\{a \mid a\leq 0, a\in \mathbf{Q}\}，$$

$$B=\mathbf{Q}-A。$$

则 $(A|B)$ 是有理数的分划，我们称实数 $(A|B)$ 是实数的倒数，记作 x^{-1} 或 $\frac{1}{x}$。

当 $x<0$ 时，定义 $x^{-1}=-|x|^{-1}$，或 $\frac{1}{x}=-\frac{1}{|x|}$。

总之我们用有理数的加法和负数，来定义分划的加法和负数；对正实数情形，用有理数的乘法和倒数，来定义分划的乘法和倒数，对一般的实数乘法和倒数，又化到正实数情形。

3.2　实数集是域

要证集合 $\mathbf{R}$ 是域，即要对上面定义的加法和乘法运算，满足下列性质：

1) 交换律：$\forall x, y \in \mathbf{R}$， $x+y=y+x$ ， $x\cdot y=y\cdot x$ ；

2) 结合律： $\forall x, y, z \in \mathbf{R}$，$(x+y)+z=x+(y+z)$ ，$(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$ ；

3) $\forall x \in \mathbf{R}$， $x+0=x$ ， $x\cdot 1=x$ ；

4) $\forall x \in \mathbf{R}$， $x+(-x)=0$ ， $x\cdot x^{-1}=1 \quad (x\neq 0)$ ；

5) 分配律： $x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$。

其中，记号1表示由有理数1所确定的有理分划。

前三条性质证明比较简单；第四条性质的证明，用到有理数的阿基米德原理；第五条性质证明较烦琐。我们不打算讨论这些性质的证明，只以第四条加法为例，给出证明的示范。

证明$x+(-x)=0$的困难，在于每一个负有理数，能否看成集合A_x中的元素，与集合A_{-x}中的元素相加而得，或能否看成集合A_x中的元素，减去集合B_x^0中的元素而得，为此我们需要下面引理。

引理 2 给定实数x，$\forall$有理数$e>0$，则$\exists a\in A_x$，$b\in B_x^0$，使$b-a=e$。

证明 由分划的不空性，$\exists a_0\in A_x$，$b_0\in B_x$，根据阿基米德原理，$\exists$自然数n，使得$ne>b_0-a_0$，考察数：

$$a_0,\ a_0+e,\ a_0+2e,\ \cdots,\ a_0+ne\ (>b_0)。$$

在这有限个数中，总存在一个位于x下类中最大的数，记作

$$a=a_0+ke\in A_x \qquad (k<n)。$$

若$b=a_0+(k+1)e$不是上类的最小数，a、b即为所求。若b是上类的最小数，取

$$a=a_0+(k+\frac{1}{2})e, \qquad b=a_0+(k+\frac{3}{2})e$$

即成。

证$x+(-x)=0$，即要证$A_{x+(-x)}=A_0$。

设$a\in A_{x+(-x)}$，即$a=a_1+a_2$，$a_1\in A_x$，$a_2\in A_{-x}$。由负数定义知$-a_2\in B_x^0\subset B_x$，所以$-a_2>a_1$，得$a_1+a_2=a<0$，即$a\in A_0$，因此$A_{x+(-x)}\subset A_0$。

反之，若$a\in A_0$，有$-a>0$，根据引理 2，存在$a_1\in A_x$，$b_1\in B_x^0$，且$b_1-a_1=-a$，

由负数定义，$-b_1 \in A_{-x}$，再由加法定义，知

$$a = a_1 - b_1 = a_1 + (-b_1) \in A_{x+(-x)},$$

因此 $A_0 \subset A_{x+(-x)}$。

合起来得 $A_0 = A_{x+(-x)}$，即 $0 = x + (-x)$。

3.3 实数集是全序域

实数集是全序域，是指实数集 $\mathbf{R}$，对前面所定义的“小于”关系，满足下面四条性质：

1） $\forall x$，$y \in \mathbf{R}$，下列三式有且仅有一个成立：$x = y$，$x < y$，$y < x$；

2） 若 $x < y$，$y < z$，则 $x < z$（传递性）；

3） 若 $x < y$，$z \in \mathbf{R}$，则 $x + z < y + z$；

4） 若 $x < y$，$z > 0$，则 $x \cdot z < y \cdot z$。

证明 1） 若下类 $A_x = A_y$，由定义知 $x = y$，其它两式不成立；若 $A_x \neq A_y$，则或 $A_x \subset A_y$，或不是这样。若是前者，则 $x < y$，其它两式不成立；若是后者，必有 $a' \in A_x$，而 $a' \notin A_y$，由此得 $a' \in B_y$。这时必有 $A_y \subset A_x$。因 $\forall a \in A_y$ 有 $a < a'$，推出 $a \in A_x$，所以 $A_y \subset A_x$，即 $y < x$。

2） 由条件得 $A_x \subset A_y$，$A_x \neq A_y$；$A_y \subset A_z$，$A_y \neq A_z$，因此 $A_x \subset A_z$，$A_x \neq A_z$，即 $x < z$。

3） 由 $x < y$，推出 $\exists c$，使 $c \in A_y$，而 $c \notin A_x$，因而 $c \in B_x$。由 A_y 无最大数，推出 $\exists c'$，使 $c < c' \in A_y$。令 $c' - c = e > 0$。由引理 2，$\exists a \in A_x$，$b \in B_x$，且 $b - a = e = c' - c$。于是 $c' + a \in A_{y+z}$，$b + c = a + c' \in B_{x+z}$，所以 $x + z < y + z$。

4） 因 $y + (-x) > 0$，根据分划的乘法定义，知 $z \cdot [y + (-x)] > 0$，由分配律 $z \cdot y + z \cdot (-x) > 0$，利用 $x + (-x) = 0$，可得 $z \cdot (-x) = -(z \cdot x)$，所以 $z \cdot y + [-(z \cdot x)] > 0$，即得 $x \cdot z < y \cdot z$。

3.4 实数集的连通性

将有理数用直线上的点表示时,发现直线上还留有许许多多“孔隙”。我们用无理数来填充这些“孔隙”，现在问题是这些“孔隙”是否被填满了，如果被填满了，对实数作分划时，就不可能产生新的“数”，否则类似于有理数分划产生无理数一样，对实数分划还可得出新的“数”。事实上，戴德金正是考虑怎么用严格的数学语言，给出有理数是不连通的、实数是连通的定义，经反复研究，发现用“分划”的办法是最恰当地描述连通性的数学语言，对有理数作“不空、不漏、不乱”的分划时，若下类无最大数，则上类也可以无最小数，所以按定义有理数是不连通的；而对实数作“不空、不漏、不乱”的分划时，若下类无最大数，则上类必有最小数，所以按定义实数是连通的。下面我们严格的说明这一点。

定义 3 把实数集 $\mathbf{R}$ 分成两个子集 X 、Y，使满足：

1） X 、Y 至少包含一个实数（不空）；
2） 每一实数或属于 X，或属于 Y （不漏）；
3） 任一属于 X 的实数，小于任一属于 Y 的实数（不乱）；
4） X 中无最大数（用到实数稠密性）。

则称 X 、Y 为实数的一个分划，记作 $(X\mid Y)$，X 称分划的下类，Y 称分划的上类。

戴德金定理（连通性） 设 $(X\mid Y)$ 为一实数分化，则 Y 必有最小数。

证明 首先我们定义一实数。令

$$A=\{\, a \mid a\in A_x,\, x\in X\,\}\ ;\quad B=\mathbf{Q}-A。$$

则 $(A\mid B)$ 是一有理数的分划，为此要证它满足分划的四个条件。

i ） A 的不空是显然的。证 B 不空。由 Y 不空，$\exists y\in Y$，又 $\exists b\in B_y$，有理数 b 一定属于 B。若不然，有 $b\in A$，由 A 的定义，$\exists x\in X$，$b\in A_x$，由关于实数的“小于关系”的定义，知 $y<x$，这与 $(X\mid Y)$ 分划不乱矛盾，所以 $b\in B$。

ii ） A、B 满足不漏条件是显然的；

iii） 证满足不乱条件。设 $a\in A$，$b\in B$，要证 $a<b$。

假设不然，$b\le a$，由 A 定义，$\exists x\in X$，$a\in A_x$，更有 $b\in A_x$，因此 $b\in A$，这与 $b\in B$ 矛盾，所以 $a<b$。

iv） A 无最大数也是明显的。

既然 $(A\mid B)$ 是一有理数的分划，所以它为一实数，记作 $z=(A\mid B)$。

其次证 $z\notin X$。假若不然，由 X 无最大数，$\exists x\in X$，$z<x$，根据小于定义，$\exists$ 有理数 c，使 $c\in A_x$，$c\in B_z=B$。由 A 的定义，$c\in A$，可是 $c\in B$，故矛盾，所以 $z\notin X$。

最后证 $z\in Y$ 且是 Y 的最小数。因 $(X\mid Y)$ 不漏，所以 $z\in Y$。假设 z 不是 Y 的最小数，$\exists y\in Y$，$y<z$，$\exists$ 有理数 c，使 $c\in A_z=A$，$c\in B_y$。

由$c\in A$，$\exists x\in X$，$c\in A_x$，再由$c\in B_y$及小于定义，知$y<x$，这与$(X\mid Y)$不乱矛盾，所以z是Y的最小数。 证毕。

至此，我们证明了实数集是全序域，且是连通集。我们称连通的全序域为实数空间，仍用记号$\mathbf{R}$表示。这里我们用$\mathbf{R}$不能分解成两个不空、不漏、不交的开区间来定义$\mathbf{R}$的连通性，这定义只对$\mathbf{R}$适用。对一般空间，需要有开集的概念， 我们用空间不能分解成两个不空、不漏、不交的开集来定义连通性。在这个定义下，实数集$\mathbf{R}$也是连通的。

3.5 实数的表示

给定实数$x=(A\mid B)$，若由实数我们能确定一个记号，又由记号返回去去确定实数，那么这个记号就可以作为实数的一种表示。

由阿基米德原理，$\exists$整数M、N分别属于A、B，$M\in A$，$N\in B$。由M逐次加1，必能求得两个相邻整数c_0，c_0+1，$c_0\in A$，$c_0+1\in B$。c_0可以是正数、负数或零。用$c_0\cdot 1$，$c_0\cdot 2$，$\cdots$，$c_0\cdot 9$，分c_0，c_0+1间隔为十等分，必有一个是属于下类的最大数，设

$$c_0\cdot c_1\in A，\qquad c_0\cdot c_1+\frac{1}{10}\in B。$$

其中c_1为$0,1,\cdots,9$中某一数字。

继续分下去,在确定了数码$c_1,c_2,\cdots,c_{n\text{-}1}$之后，可确定$c_n$，使

$$c_0.c_1c_2\cdots c_n\in A，\qquad c_0.c_1c_2\cdots c_n+\frac{1}{10^n}\in B，$$

其中c_i为$0,1,\cdots,9$中某一数字$(i=1,2,\cdots,n)$，由此可得一记号

$$c_0.c_1c_2\cdots c_n\cdots，$$

称为无限小数，它是实数的一种表示。

当$c_0.c_1\cdots c_k+\dfrac{1}{10^k}$是上类的最小数时，容易看出$c_n=9\ (n>k)$；又$c_n$中一定有无限个数字不为零，否则下类中就有最大数。

反之，任给一有无限个c_n不为零的无限小数$c_0.c_1c_2\cdots c_n\cdots$，总可找到一个实数$x$，刚好被它所表示。为此考察有理数

$$a_n=c_0.c_1c_2\cdots c_n，\qquad b_n=c_0.c_1\cdots c_n+\frac{1}{10^n}，$$

显然 $a_n<b_n$，$(n=1,2,\cdots)$。

现在定义有理数的一个分划：把一切大于 a_n 的有理数归为上类 B，把一切余下的有理数归为下类 A，则 $(A|B)$ 是一个有理分划。显然 $a_n \in A$，$\forall$ 自然数 m，当 $n \ge m$ 时，有 $a_n < b_n \le b_m$， 当$n < m$时，有 $a_n \le a_m < b_m$。

由 m 的任意性，所以$b_n \in B$ $(n = 1,2,\cdots)$。这说明 A、B 不空。满足不漏条件是显然的。再证满足不乱条件：设$a \in A$，$b \in B$，由 A、B 定义，$\exists n$，使$a \le a_n$。否则a 大于一切a_n，a 应属于 B，矛盾。再由b 大于一切a_n，即得$a \le a_n < b$。

由无穷多个c_n 不为零，所以 A 无最大数。这样我们得到实数$x = (A|B)$。因$a_n \in A$，$b_n \in B$，所以$c_0.c_1c_2\cdots c_n\cdots$是$x$ 的无穷小数表示。

还可证明，当实数 $x \ne y$ 时，这种表示式也不相同。假设x、y 有相同的无限小数表示：$c_0.c_1c_2\cdots c_n\cdots$ 且设 $x < y$，则$\exists$ 有理数c，使$c \in A_y$，$c \in B_x$。

由集合 A_y 无最大数，$\exists c'$，$c < c' \in A_y$，$c' \in B_x$，记号a_n，b_n意义同上，因$a_n \in A_x$，由$c \in B_x$ 得$a_n < c$，又因$b_n \in B_y$ 及$c' \in A_y$ 得$b_n > c'$，这样 $0 < c' - c < b_n - a_n = \dfrac{1}{10^n}$。由阿基米德原理，$\exists$ 自然数n，使 $n(c'-c) > 1$，更有$10^n(c'-c) > 1$，矛盾。这矛盾是由于假设x、y 有相同的无限小数表示引起的，所以$x \ne y$ 时，有不同的表示式。

上面我们建立了实数与无限小数之间的一一对应关系，现在我们称无限小数为实数，这样，我们又回到了对以前实数的认识。

§4 确界存在定理与区间套定理

4.1 确界存在定理

我们曾引入有界数集的确界概念，今证明它的存在性（记号a、b、c 表示实数）

定理 1 非空有上界的数集E 必存在上确界。

证明 设$E = \{x\}$ 非空，有上界b： $\forall x \in E$，$x \le b$。

（1） 若E 中有最大数x_0，则x_0 即为上确界；

（2） 若E 中无最大数，用下述方法产生实数的一个分划；取E 的一切上界归入上类 B，其余的实数归入下类A，则$(A|B)$ 是实数的一个分划。

1° A、B 不空。首先$b \in B$。其次$\forall x \in E$，由于x 不是E 的最大数，所以它不是E

的上界，即$x\in A$。这说明E中任一元素都属于下类A；

2°　A、B不漏性由A、B定义即可看出；

3°　A、B不乱。设$a\in A$，$b\in B$。因a不是E的上界，$\exists x\in E$，使得$a<x$，而E内每一元素属于A，所以$a<x<b$。

4°　由3°的证明可见A无最大数。

所以$(A\mid B)$是实数的一个分划。由戴德金定理，知上类B必有最小数，记作c。

$\forall x\in E$，由1°知$x\in A$，即得$x<c$。这表明c是E的一个上界。若b是E的一个上界，则$b\in B$，由此得$c\le b$，所以c是上界中最小的，由上确界定义，c为集合E的上确界，记作　$c=\sup E$。

推论　非空的有下界的集合必有下确界。

事实上，设集合$E=\{x\}$有下界b，则非空集合$E'=\{x\mid -x\in E\}$有上界$-b$，利用集合E'上确界的存在性，即可得出集合E的下确界存在。

由第二章知道，若集合E无上界，记作$\sup E=+\infty$；若集合E无下界，记作$\inf\ E=+\infty$，这样一来，第二章证明了的单调上升（下降）有上界（下界）的序列$\{x_n\}$，必有极限$\sup\limits_{x\in N}x_n(\inf\limits_{x\in N}x_n)$的定理现在有了严格的理论基础了。且对单调上升（下降）序列$\{x_n\}$，总有

$$\lim_{n\to+\infty}x_n=\sup_{x\in N}x_n\qquad(\inf_{x\in N}x_n)。$$

定理1解决了非空有上界集合的上确界存在性问题，我们可以利用上确界的存在性，得出我们所研究的某一类量（如弧长）的存在性。

若全序集中任一非空有上界的集合必有上确界，我们称该全序集是完备的。定理1刻划了实数集是完备的。

例1　证明实数空间满足阿基米德原理。

证明　$\forall b>a>0$，要证存在自然数n使$na>b$。假设结论不成立，即

$$na\le b,\qquad (n=1,2,\cdots),$$

则数集$E=\{na\}$有上界b，因此有上确界c，使$na\le c\quad(n=1,2,\cdots)$，也就有$(n+1)a\le c$ $(n=1,2,\cdots)$，或　$na\le c-a\quad(n=1,2,\cdots)$。这表明$c-a$是集合$E$的上界，与$c$是上确界矛盾。所以总存在自然数$n$，使$na>b$。

例2　1）证明序列$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$的极限存在；

2）求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}[1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}]$。

解 1） 因$x>-1$时有

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x \qquad (x\neq 0),$$

所以
$$\frac{1}{1+k}<\ln(1+\frac{1}{k})<\frac{1}{k} \qquad (k=1,2,\cdots),$$

即有
$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n>\sum_{k=1}^{n}\ln(1+\frac{1}{k})-\ln n=\ln(n+1)-\ln n>0。$$

这表明序列$\{x_n\}$有下界。又

$$x_n-x_{n+1}=\ln(n+1)-\ln n-\frac{1}{n+1}=\ln(1+\frac{1}{n})-\frac{1}{n+1}>0,$$

故序列$\{x_n\}$下降。因此序列极限存在，记极限值为c。于是

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln n=c+e_n,$$

或
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=c+\ln n+e_n \qquad (\lim_{n\to+\infty}e_n=0)。$$

2） 因

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k}-2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=c+\ln(2n)+e_{2n}-[c+\ln n+e_n]$$
$$=\ln 2+e_{2n}-e_n$$

所以
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2, \quad 又 \quad \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2,$$

即得
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=\ln 2。$$

4.2 区间套定理

定理 2 设$[a_n,b_n]$是一串闭区间，满足：

（1） 对任何自然数n，都有$a_n\le a_{n+1}<b_{n+1}\le b_n$，即 $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$。

（2） 当$n\to+\infty$时，区间$[a_n,b_n]$长度趋于0，即 $\lim\limits_{n\to+\infty}(b_n-a_n)=0$。

则有 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=c=\lim\limits_{n\to+\infty}b_n$，且$c$是一切区间的唯一公共点：$\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty}[a_n,b_n]=\{c\}$。

证明　由假设(1)知，序列$\{a_n\}$单调上升，有上界b_1；序列$\{b_n\}$单调下降，有下界a_1。因而有

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c_1,\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = c_2.\quad a_n \le c_1 \le c_2 \le b_n。$$

再由假设（2）知

$$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) = c_2 - c_1 = 0,$$

记$c_1 = c_2 = c$。 从而有

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = c = \lim_{n\to+\infty} b_n。$$

若还有c^*满足$a_n \le c^* \le b_n$，令$n \to +\infty$，得$c^* = c$。故c是一切$[a_n, b_n]$的唯一公共点。证毕。

这个定理称为区间套定理。关于定理的条件我们作两点说明：

（1）　要求$[a_n, b_n]$是有界闭区间的这个条件是重要的。若区间是开的，则定理不一定成立。如

$$(a_n, b_n) = (0,\ \frac{1}{n})。$$

显然有　$(0, \dfrac{1}{n+1}) \subset (0, \dfrac{1}{n})$，　但　$\bigcap_{n=1}^{+\infty}(0, \dfrac{1}{n}) = f$。

如果开区间套是严格包含：$a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n$，这时定理的结论还是成立的。

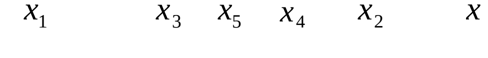
（2）　若$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ $(n = 1, 2, \cdots)$，但$\lim_{n\to+\infty}(b_n - a_n) \ne 0$，此时仍有$\lim_{n\to+\infty} a_n = c_1$，$\lim_{n\to+\infty} b_n = c_2$，但$c_1 < c_2$，于是对任意的$c$，$c_1 \le c \le c_2$，都有$c \in \bigcap_{n=1}^{+\infty}[a_n, b_n]$。

全序集中任一区间长趋于零的区间套有非空交集，则称该全序集是完备的，定理 2 刻划实数集是完备的（这里完备定义与上段完备定义是等价的）。定理 2 也给出通过逐步缩小搜索范围，找出所求点的一种方法。

例3　序列$\{x_n\}$由下列各式

$$x_1 = a,\quad x_2 = b,\quad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}\quad (n = 3, 4, \cdots)$$

所确定（见下图）。证明极限$\lim_{n\to+\infty} x_n$存在，并求此极限。



证明　当$a = b$时，$x_n = a$，故$\lim_{n\to+\infty} x_n = a$。

当$a \neq b$时，若取$a_n = \min(x_{n+1}, x_n)$，$b_n = \max(x_{n+1}, x_n)$，$(n=1,2,\cdots)$。则由条件，显然可得一串区间套：

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \qquad (n=1,2,\cdots)。$$

由已知条件

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + x_{n-1}}{2} - x_n = -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})，$$

于是

$$b_n - a_n = |x_{n+1} - x_n| = \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}|$$

$$= \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1| = \frac{1}{2^{n-1}}|b-a| \to 0 \qquad (n \to +\infty),$$

由区间套定理，存在c满足：$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$。注意到$x_n \in [a_n, b_n]$，所以$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$。

下面来求c。由$x_{n+1} - x_n = -\frac{1}{2}(x_n - x_{n-1})$，令$n = 2,3,\cdots,k-1$得一串等式：

$$x_3 - x_2 = -\frac{1}{2}(x_2 - x_1)；$$

$$x_4 - x_3 = -\frac{1}{2}(x_3 - x_2)；$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_k - x_{k-1} = -\frac{1}{2}(x_{k-1} - x_{k-2})。$$

将它们相加，得 $x_k - x_2 = -\frac{1}{2}(x_{k-1} - x_1)$，令$k \to +\infty$，得$c - x_2 = -\frac{1}{2}(c - x_1)$

所以

$$c = \frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{3}(a+2b)。$$

4.3 子序列与波尔察诺定理

给定序列 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，考虑由它的一部分元素，而不变更次序所构成的序列：$x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots$，称为$\{x_n\}$的一个子序列。

关于子序列$\{x_{n_k}\}$的序号n_k需要说明三点：

（1） n_k是一个严格上升的自然数列；$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$

（2） 子序列$\{x_{n_k}\}$的序号不是n_k，而是k，n_k是k的函数，它表明子序列与原序列

的关系。x_{n_k} 表示子序列中的第k项，是原序列的第n_k项。

(3) $n_k \geq k$。所以$\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$。

例如序列$\{x_{k+l}\}$（l为某一正整数）是序列$\{x_n\}$的子序列。它是由原序列去掉前l项所得，这里$n_k = k + l$。

又如序列$\{x_{2k}\}$，$\{x_{2k-1}\}$是序列$\{x_n\}$的子序列，它们分别是由原序列取偶数项和奇数项所组成的序列，前者$n_k = 2k$，后者$n_k = 2k-1$。

对子序列再抽子序列，应记作$\{x_{n_{k_i}}\}$，它仍然是原序列的子序列。序列本身也可以说是它自己的子序列。

子序列概念本身是容易理解的。难点倒是它的表现形式，或者说是它的记号。

定理 3 设$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$，则$\{x_n\}$的任一子序列$\{x_{n_k}\}$都以$c$为极限。

证明 $\forall e > 0$，由$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = c$，$\exists N$，当$n > N$时，有$|x_n - c| < e$。因$\lim\limits_{k\to+\infty} n_k = +\infty$，所以对于$N$，$\exists k_0$，当$k > k_0$时，有$n_k > N$。从而当$k > k_0$时，有$|x_{n_k} - c| < e$，即$\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = c$。

注 1 定理当$c = +\infty$或$-\infty$时，结论仍成立。

注 2 若序列$\{x_n\}$有两个子序列极限不等，则序列$\{x_n\}$无极限。

若原序列没有极限，它可以有收敛的子序列。如序列 $1,0,1,0,\cdots$，它的奇数项组成的子序列有极限1。是否任意序列都有收敛子序列呢？这就是下面定理。

定理 4 （波尔察诺） 有界序列必有收敛子序列。

证明 设$a \leq x_n \leq b$，用中点$c_1 = \dfrac{a+b}{2}$将$[a,b]$一分为二，则两个子区间$[a,c_1]$和$[c_1,b]$中至少有一个含有$\{x_n\}$中无穷多项，选出来记为$[a_1,b_1]$，在其中选一项x_{n_1}。用中点$c_2 = \dfrac{a_1+b_1}{2}$将$[a_1,b_1]$一分为二，则两个子区间$[a_1,c_2]$和$[c_2,b_1]$中至少有一个含有$\{x_n\}$中无穷多项，选出来记为$[a_2,b_2]$，在其中选一项x_{n_2}，使得$n_2 > n_1, \cdots$。最后得一区间套$[a_k,b_k]$，满足

$[a_{k+1},b_{k+1}] \subset [a_k,b_k]$，

$b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$，

$x_{n_k} \in [a_k, b_k],\ n_{k+1} > n_k$。

由区间套定理，$\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = c$**，又由于**$a_k \le x_{n_k} \le b_k$**，有**$\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = c$。

习题

1　**设** $f(x)$ **是**$[a, b]$**上的连续函数，其最大值和最小值分别为** M **和** $m(m < M)$。**求证：必存在区间**$[\alpha, \beta]$**，满足条件：**

(1) $f(\alpha) = M, f(\beta) = m$ **或** $f(\alpha) = m, f(\beta) = M$ ；

(2) $m < f(x) < M$ **，当** $x \in (\alpha, \beta)$。

2　**设** $f(x)$ **在**$[a, b]$**上连续，在**$[a, b)$ **上右导数存在。求证：**

(1) **若** $f'_+(x) \ge 0$**，则** $f(x)$ **递增；**

(2) **若** $f'_+(x) \le 0$**，则** $f(x)$ **递减；**

(3) **若** $f'_+(x) \equiv 0$**，则** $f(x)$ **为一常数。**

3　**设** $f(x) \in C[0, +\infty)$**，且有界；对于** $\forall a \in (-\infty, +\infty)$，$f(x) = a$ **在** $[0, +\infty)$ **上只有有限个根或无根。求证：** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ **存在。**

4　**求证：序列**$\{a_n\}$**有界的充要条件是：**$\{a_n\}$**的任何子序列**$\{a_{n_k}\}$**，都有收敛的子序列。**

5　**设**$\{a_n\}$**为有界序列，且任一收敛的子序列都有相同的极限值**a。**求证：**$\{a_n\}$**也以**a**为极限。**