第四章 多元函数微分学

§2.1 偏导数

设D是$\mathbf{R}^2$中的区域，$z=f(x,y)$是D上的函数. 设$P_0=(x_0,y_0)\in D$，我们希望定义$f(x,y)$在P_0点的导数，即因变量相对于自变量的变化率. 但如果将$P=(x,y)$作为变量，由于其是二维向量，没有除法，因此很难定义$f(x,y)-f(x_0,y_0)$相对于$P-P_0=(x-x_0,y-y_0)$的变化率. 我们只能将$P=(x,y)$的分量x和y分别作为自变量来定义导数.

将y固定在y_0，则$f(x,y_0)$是x的函数. 如果$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$存在，则称$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处沿$x$方向可导，称极限为$f(x,y)$在$(x_0,y_0)$处关于$x$的偏导数，记之为$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$或$f_x(x_0,y_0)$.

同样我们定义$f(x,y)$在(x_0,y_0)处沿y方向的偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$为$\lim\limits_{y\to y_0}\dfrac{f(x_0,y)-f(x_0,y_0)}{y-y_0}$.

例：设$f(x,y)=x\sin y^2+y^3$，则$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\sin y^2$，而

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\cdot\cos y^2\cdot 2y+3y^2=2xy\cos y^2+3y^2.$$

上例说明偏导数的计算仅是一元函数求导的简单推广. 因此一元函数求导的公式和性质对偏导数都成立.

由偏导数的定义不难看出，$f(x,y)$在(x_0,y_0)处存在偏导数$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$仅与$f(x,y)$沿$x$轴方向和$y$轴方向变化有关，与$f(x,y)$在其余部分的取值无关. 因而与一元函数不同，偏导在一个点的存在不能得出函数在这点连续.

例：设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

则 $\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0,\quad \dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0.$ 因 此 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$. 但 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 并不存在，$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

引理 1: 设 $f(x,y)$ 在区域 D 上处处有偏导，且 $\dfrac{\partial f}{\partial x}\equiv 0, \dfrac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$，则 $f(x,y)$ 在 D 上为常数.

这一引理说明与一元函数一样，处处有偏导的函数在差一常数的意义下由其偏导数唯一确定. 这一引理的证明留给读者作为思考题. 通过这一引理不难理解，多元函数的性质是可以通过其偏导数来反映的. 所以虽然函数在一个点的偏导数仅说明了函数在 x 轴或 y 轴方向的变化情况，但在一个区域上，函数的性质是可以通过偏导数的研究得到的.

§2.2 全微分

定义: 设 $f(x,y)$ 定义在 (x_0,y_0) 邻域上，称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微，如果存在线性函数 $A(x-x_0)+B(y-y_0)$，使在 (x_0,y_0) 邻域上

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0)+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right).$$

由于上式仅在 $\Delta x=x-x_0$ 和 $\Delta y=y-y_0$ 充分小时才有意义，我们令 $dx=\Delta x, dy=\Delta y$，称 $df=Adx+Bdy$ 为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的微分. 上式表明

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=\Delta f=df+o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)\approx df.$$

令 $\Delta x\to 0, \Delta y\to 0$，则有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$. 因此如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则其必在这点连续. 但在上一节中我们已说明 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处有偏导不能保证其在这点连续. 因此对于多元函数，其存在偏导时不一定可微. 但如果其可微，则由

$$\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}=A+o\left(\sqrt{(\Delta x)^2}\right),$$

得 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=A$. 同理 $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=B$. 因此如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微, 则其必存在偏导, 并且 $df(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$. 这同时表明微分是唯一的.

定理 1: 如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域上处处有偏导, 且 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 处连续, 则 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微.

证明: 利用微分中值定理得

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)&=f(x,y)-f(x_0,y)+f(x_0,y)-f(x_0,y_0)\\&=\frac{\partial f(x',y)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x,y')}{\partial y}(y-y_0),\end{aligned}$$

其中 $x'\in[x,x_0],\ y'\in[y,y_0]$. 因此

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)=&\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\\&+\left[\frac{\partial f(x',y_0)}{\partial x}-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\right](x-x_0)+\left[\frac{\partial f(x_0,y')}{\partial y}-\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right](y-y_0).\end{aligned}$$

由 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 连续, 而

$$|x-x_0|\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},\quad |y-y_0|\le\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

得

$$\begin{aligned}f(x,y)-f(x_0,y_0)=&\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\\&+o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right).\end{aligned}$$

$f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微.

推论: 如果 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 D 上处处存在且连续, 则 $f(x,y)$ 在 D 上处处可微, 因而也处处连续.

定理 1 中偏导连续并非可微的必要条件.

例: 令

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0; \\ 0, & y=0. \end{cases}$$

则由

$$\frac{\Delta x\Delta y\sin\dfrac{1}{\Delta y}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le\frac{|\Delta x\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le\frac{1}{2}\frac{\Delta x^2+\Delta y^2}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0$$

得

$$f(x,y)-f(0,0)=o\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right).$$

因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点可微，$df(0,0)=0$．但

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x\sin\frac{1}{y}+x\cdot\cos\frac{1}{y}\cdot\left(-\frac{1}{y}\right),$$

其在 $x\to 0,\ y\to 0$ 时并无极限.

§2.3 微分的几何意义

对一元函数 $y=f(x)$，其微分 $dy=f'(x_0)dx$ 代表的线性函数

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

是 $y=f(x)$ 的曲线在 $(x_0,y_0=f(x_0))$ 处的切线．微分就是这一切线的无穷小部分．我们在充分小的意义下，用直线 $dy=f'(x_0)dx$ 代替 $y=f(x)$ 的弯的曲线.

对二元函数 $z=f(x,y)$，设其在 (x_0,y_0) 处可微，则其微分

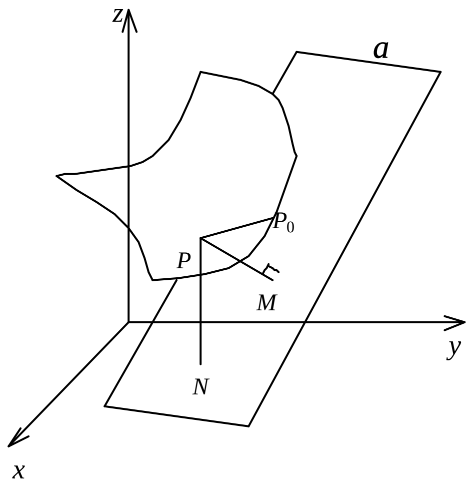
$$dz=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}dy$$

表示的线性函数

$$z-z_0=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

是过 $z=f(x,y)$ 的曲面上点 $(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$ 的平面．$\Delta f\approx df$ 表明我们希望在无穷小的意义下，用微分表示的平面代替曲面．即我们希望这一平面是所有过 (x_0,y_0,z_0) 的平面中与 $z=f(x,y)$ 的曲面贴得最紧的平面，或者说曲面在这点的切面．为此我们需要先

给切面一个几何的定义.



定义：设 $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ **是曲面** Σ **上的一点，过** P_0 **点的平面** a **称为** Σ **在** P_0 **点的切面，如果曲面上的点** P **趋于** P_0 **时，** P **到平面** a **的距离是比** P **到** P_0 **的距离高阶的无穷小.**

如图，设 M **是** P **点到** a **的垂线的交点，** a **为切面等价于** $\lim\limits_{P\to P_0}\dfrac{\|PM\|}{\|PP_0\|}=0$.

定理 1：设曲面 Σ **由** $z=f(x,y)$ **给出，则** Σ **在点** $(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$ **有切面的充分必要条件是** $f(x,y)$ **在** (x_0,y_0) **可微.** $z-z_0=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$ **就是** Σ **在** (x_0,y_0,z_0) **处的切面.**

证明：如上图. 设 a **由** $z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)$ **给出，** N **为** P **沿** z **轴到** a **的投影点. 由** $\dfrac{\|PN\|}{\|PM\|}=$**常数，因此** a **为切面等价于** $\lim\limits_{P\to P_0}\dfrac{\|PN\|}{\|PP_0\|}=0$**. 但**

$$\|PN\|=\left|f(x,y)-(f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0))\right|,$$
$$\|PP_0\|=\sqrt{(f(x,y)-f(x_0,y_0))^2+(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\ .$$

如果 $z=f(x,y)$ **在** (x_0,y_0) **处可微，即**

$$\frac{\left|f(x,y)-\left(f(x_0,y_0)+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\right)\right|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\to 0.$$

由 $\|PP_0\|\geq\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ **得** $\dfrac{\|PN\|}{\|PP_0\|}\to 0$**. 曲面有切面，而**

$$z-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(y-y_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(x-x_0)$$

就是曲面在 $(x_0,y_0,z_0=f(x_0,y_0))$ **处的切面.**

设 $z-z_0=A(x-x_0)+B(y-y_0)$ 是 Σ 在 (x_0,y_0,z_0) 的切面. 要证明定理的结论, 仅需证

$$\frac{\|PN\|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\to 0.$$

但已知 $\dfrac{\|PN\|}{\|PP_0\|}\to 0$, 因此只需证 $\dfrac{\|PP_0\|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$ 有界即可.

由 $\dfrac{\|PN\|}{\|PP_0\|}\to 0$, 不妨取 P 充分接近于 P_0, 使 $\dfrac{\|PN\|}{\|PP_0\|}<\dfrac{1}{2}$, 得

$$|f(x,y)-f(x_0,y_0)|\le|A||x-x_0|+|B||y-y_0|+\frac{1}{2}\|PP_0\|.$$

两边除 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$, 由 $\|PP_0\|$ 表达式得

$$\begin{aligned}\frac{|f(x,y)-f(x_0,y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}&\le|A|+|B|+\frac{1}{2}\sqrt{1+\left(\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right)^2}\\&\le|A|+|B|+\frac{1}{2}\left(1+\frac{|f(x,y)-f(x_0,y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right).\end{aligned}$$

因此

$$\frac{|f(x,y)-f(x_0,y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\le 2(|A|+|B|)+1.$$

而

$$\begin{aligned}\frac{\|PP_0\|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}&=\sqrt{1+\left(\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\right)^2}\\&\le 1+\frac{|f(x,y)-f(x_0,y_0)|}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\\&\le 2(|A|+|B|+1).\end{aligned}$$

定理得证.

设曲面 Σ 是 $F(x,y,z)=0$ 给出, $F(x,y,z)$ 可微. 在下一章隐函数定理中我们将证明如果 $F(x_0,y_0,z_0)=0$, 而 $\dfrac{\partial F(x_0,y_0,z_0)}{\partial z}\ne 0$, 则存在 (x_0,y_0) 的邻域 U 和 U 上可微的函数 $z=f(x,y)$, 使在 (x_0,y_0,z_0) 的一个邻域上, 曲面 Σ 由 $z=f(x,y)$ 给出. 特别的, 其有

切面.

对 $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$ 微分得

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} df.$$

因此在 (x_0, y_0, z_0) 的切面 $dz = df$ 可表示为

$$0 = \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y} dy + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z} dz$$

或

$$0 = \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0, z_0)}{\partial z}(z - z_0).$$

§2.4 高阶偏导与累次极限

设 $f(x, y)$ 在区域 D 上处处存在偏导，则 $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$，$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ 也是 D 上的函数．如果其仍可导，则称 $f(x, y)$ 在 D 上存在二阶偏导，记之为

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

也记为 f_{xx}，f_{xy}，f_{yx}，f_{yy}.

例：设 $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) + x^3$，则

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2 + y^2) \cdot 2x + 3x^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin(x^2 + y^2) \cdot 2x \cdot 2y,$$

而

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos(x^2 + y^2) \cdot 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\sin(x^2 + y^2) \cdot 2y \cdot 2x.$$

上例中 $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$．因此一个自然的问题是这一等式是否对任意 $f(x, y)$ 都成立，即

求导过程是否可交换?一般来说，求导过程不是任意可交换的.

例：设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

则

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\begin{cases}y\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\begin{cases}x\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

因而 $\dfrac{\partial f(0,y)}{\partial x}=-y$，得 $\dfrac{\partial^2 f(0,y)}{\partial y\partial x}=-1$. 而 $\dfrac{\partial f(x,0)}{\partial y}=x$，得 $\dfrac{\partial^2 f(x,0)}{\partial x\partial y}=1$. 特别的,

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}=1\neq\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y\partial x}=-1.$$

在微积分中求导顺序可交换是一个基本要求，否则会给许多计算和应用带来麻烦. 从另一个角度，在初等数学中我们有加法和数乘这样基本的运算，微积分中我们引进了极限、求导、求积分等运算，这些运算都有线性性，即其与加法和数乘都是可交换的（或者说是相容的）. 一个自然的问题是这些运算之间是否可交换. 这一点我们将在以后函数级数和参变量积分中进行更详细的讨论. 上例说明我们需要加上合适的条件才能保证这样的交换是一般可行的. 为此我们需要回到偏导数的定义.

由定义得

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}&=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\Delta x}\left[\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}-\lim_{\Delta y\to0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\right]\\&=\lim_{\Delta x\to0}\lim_{\Delta y\to0}\frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y}\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y)\right].\end{aligned}$$

同理得

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}=\lim_{\Delta y\to0}\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{\Delta x}\frac{1}{\Delta y}\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y)\right].$$

因此偏导可交换的问题等价于两个极限过程 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\lim\limits_{\Delta y\to0}$ 与 $\lim\limits_{\Delta y\to0}\lim\limits_{\Delta x\to0}$ 可交换. 极限 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\lim\limits_{\Delta y\to0}$ 称

为累次极限，其一般交换性将在以后讨论．这里我们利用重极限给出其可交换的一个充分条件．

定理 1: 设 x_0 是集合 $A\subset\mathbf{R}$ 的极限点，y_0 是集合 B 的极限点，$f(x,y)$ 是 $A\times B$ 上的函数．如果 $\forall y\in B$，单极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)=g(y)$ 存在，且重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 存在，则累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 存在并与重极限相等．

证明：设 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=c$，则 $\forall e>0,\exists d>0$，只要 $0\le |x-x_0|<d,\ 0\le |y-y_0|<d$，$(x,y)\in A\times B$，就有 $|f(x,y)-c|<e$．令 $x\to x_0$，得 $|g(y)-c|\le e$，即

$$\lim_{y\to y_0} g(y)=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=c.$$

推论：在定理 1 中如果假设单极限 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 也存在，则累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 都存在且相等．

由这一推论，要得到 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$，我们只需重极限

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{1}{\Delta x\cdot\Delta y}\left[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)-f(x,y+\Delta y)+f(x,y)\right]$$

存在即可．

定理 2: 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 邻域上有一阶偏导 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 和二阶偏导 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$，并且 $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 连续，则 $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y\partial x}$ 存在并与 $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}$ 相等．

证明：一阶偏导存在保证了单极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y}\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)\right]$$

以及

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\Delta x\Delta y}\left[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)\right]$$

存在．而利用微分中值定理得

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta x\Delta y}\left[\left(f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x, y_0)\right)-\left(f(x_0, y_0+\Delta y)-f(x_0, y_0)\right)\right]\\
&=\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial f(x_0+\Delta x, y_0+q_1\Delta y)}{\partial y}-\frac{\partial f(x_0, y_0+q_1\Delta y)}{\partial y}\right]\\
&=\frac{\partial^2 f(x_0+q_2\Delta x, y_0+q_1\Delta y)}{\partial x\partial y},
\end{aligned}$$

其中 $0<q_1<1, 0<q_2<1$．由 $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}$ 在 (x_0, y_0) 连续，得重极限存在并与 $\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y}$ 相等．定理得证．

定义：设 D 是 $\mathbf{R}^2$ 中的区域，称 $f(x,y)\in C^r(D)$，如果对 D 的每一点，$f(x,y)$ 的所有 r 阶偏导都存在且连续．

不难看出，如果 $f\in C^r(D)$，则 f 的所有小于等于 r 阶的偏导都连续，因而求导与顺序无关．

一般的，设 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 有 r 阶连续偏导，由于其导数与顺序无关，因此将其导数按变元顺序表示为

$$\frac{\partial^r f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}},\quad \text{其中} i_1+\cdots+i_n=r.$$

例：设 $f(x,y)=(x^3+4x^2-5)\sin e^{y^2}$，求 $\frac{\partial^{10} f(x,y)}{\partial x^4\partial y^6}$.

解：由 $\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}=0$，而 $\frac{\partial^{10} f(x,y)}{\partial x^4\partial y^6}=\frac{\partial^6}{\partial y^6}\left(\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\right)$，得 $\frac{\partial^{10} f(x,y)}{\partial x^4\partial y^6}=0$.

§2.5 复合函数求导，方向导数与梯度

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中开集，$F: D\to\mathbf{R}^m$ 是 D 上向量函数，表示为

$$F:(x_1,\cdots,x_n)\to(f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,f_m(x_1,\cdots,x_n)),$$

称 F 存在偏导，如果 F 的每一个分量函数 $f_i(x_1,\cdots,x_n)$ 都存在偏导．称 F 为 C^r 的映射，

如果 F 的每一个分量函数 $f_i(x_1,\cdots,x_n)$ 都是 C^r 的函数.

设 $F:D_1\to D_2, G:D_2\to D_3$ 都是 C^r 的映射. 自然的一个问题是 $G\circ F:D_1\to D_3$ 是否仍是 C^r 的.

例: 定义

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x\neq 0 \text{且} y\neq 0;\\ 0, & x=0 \text{或} y=0.\end{cases}$$

$f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处是存在偏导的. 令 $g:(x,y)\to(x+y,x-y)$, 则 g 是 $\mathbf{R}^2$ 上 C^∞ 的函数. 但 $f\circ g$ 在原点并不存在偏导.

定理 1: 如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微, 而 $G:(u,v)\to(x(u,v),y(u,v))$ 在 (u_0,v_0) 处存在偏导, 且 $x_0=x(u_0,v_0),\ y_0=y(u_0,v_0)$. 则 $f\circ G$ 在 (u_0,v_0) 处存在偏导, 并有链法则

$$\frac{\partial(f\circ G)}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial(f\circ G)}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}.$$

证明:

$$\begin{aligned}&f(x(u,v_0),y(u,v_0))-f(x(u_0,v_0),\ y(u_0,v_0))\\ &=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x(u,v_0)-x(u_0,v_0))+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y(u,v_0)-y(u_0,v_0))\\ &\quad+o\left(\sqrt{(x(u,v_0)-x(u_0,v_0))^2+(y(u,v_0)-y(u_0,v_0))^2}\right)\end{aligned}$$

两边除 $u-u_0$, 并令 $u\to u_0$, 得

$$\frac{\partial f(x(u_0,v_0),\ y(u_0,v_0))}{\partial x}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\frac{\partial x(u_0,v_0)}{\partial u}+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{\partial y(u_0,v_0)}{\partial u}.$$

利用函数如果处处有连续偏导, 则其处处可微, 因而有

定理 2: 如果 $F:D_1\to D_2, G:D_2\to D_3$ 都是 C^r 的映射, 则 $F\circ G:D_1\to D_3$ 也是 C^r 的.

另外由定理 1 的证明不难看出, 如果 f 可微, $x(u,v), y(u,v)$ 都可微, 则 $F\circ G(u,v)$ 也

可微，并且由求导公式得

$$
\begin{aligned}
d(f\circ G)&=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}\right)du+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}du+\frac{\partial y}{\partial v}dv\right)\\
&=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy,
\end{aligned}
$$

即表达式 $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ 不论 x 和 y 是中间变量还是自变量时都成立．这称为一阶微分的形式不变性．当然如果 x,y 是自变量时 $dx=\Delta x, dy=\Delta y$．但如果 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$ 是中间变量，则 $dx\approx\Delta x, dy\approx\Delta y$．

一阶微分的形式不变性在现代数学中有重要应用，一阶微分也因此成为研究微分流形的基本工具．

设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微．设 $t\to(x(t),y(t))$ 是满足 $(x_0,y_0)=(x(0),y(0))$ 且 $x(t)$，$y(t)$ 在 $t=0$ 时可导的曲线．由定理 1 得 $f(x(t),y(t))$ 在 $t=0$ 可导，且

$$\frac{df(x(0),\ y(0))}{dt}=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}x'(0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}y'(0).$$

$\frac{df(x(0),\ y(0))}{dt}$ 称为 $f(x,y)$ 沿曲线 $(x(t),y(t))$ 在 (x_0,y_0) 处的导数．上式表明其仅与曲线 $(x(t),y(t))$ 在 (x_0,y_0) 处的切向量有关，而与 $(x(t),y(t))$ 的选取无关，称为 $f(x,y)$ 对切向量 $(x'(0),y'(0))$ 的方向导数．其除了与 $(x'(0),y'(0))$ 所代表的方向有关外，还与 $(x'(0),y'(0))$ 的长度有关．一般的，我们取 $(x'(0),y'(0))$ 为单位向量．

定义：设 $f(x,y)$ 是 (x_0,y_0) 邻域上的函数，$(\cos a,\cos b)$ 是给定的单位向量．如果函数 $a(t)=f(x_0+t\cos a, y_0+t\cos b)$ 在 $t=0$ 可导，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处沿 $(\cos a,\cos b)$ 方向可导，$a'(0)$ 称为 $f(x,y)$ 对方向 $(\cos a,\cos b)$ 的方向导数．

由上例我们得如果 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处可微，则其沿任意方向 $(\cos a,\cos b)$ 的方向

导数都存在且为

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos a+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\cos b.$$

令 $\mathrm{grad}(f)(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$，称为 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处的梯度.

令 $t=(\cos a,\cos b)$，则 $f(x,y)$ 沿 t 方向的方向导数为

$$\left(\mathrm{grad}(f)(x_0,y_0),t\right)=\left\|\mathrm{grad}(f)(x_0,y_0)\right\|\cdot\cos g,$$

其中 g 为 $\mathrm{grad}(f)(x_0,y_0)$ 与 t 的夹角. 当 $g=0$ 时，$\cos g$ 取最大值. 因此梯度向量 $\mathrm{grad}(f)(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x},\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)$ 所代表的方向是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处变化率最大的方向，$\left\|\mathrm{grad}(f)(x_0,y_0)\right\|$ 是 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处最大的变化率.

设 n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处可微，则

$$\mathrm{grad}(f)(x_1^0,\cdots,x_n^0)=\left(\frac{\partial f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{\partial x_n}\right)$$

称为 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 在 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 处的梯度向量，其方向表示函数在这点变化最大的方向，其长度表示函数在这点最大的变化率. 特别的，如果 $\mathrm{grad}(f)(x_1^0,\cdots,x_n^0)=0$，则 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 称为 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的静止点. 我们将在函数的极值问题中进一步讨论静止点的性质.

§2.6 高阶微分和 Taylor 公式

设 D 是 $\mathbf{R}^n$ 中区域，$f(x_1,\cdots,x_n)\in C^r(D)$. 将 $dx_i=\Delta x_i$ 看作常数，则

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i\in C^{r-1}(D).$$

因此 $r-1\geq 1$ 时，其仍可微分，其微分称为 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的二阶微分，记为 d^2f. 设 $m\leq r$，定义 $d^mf=d(d^{m-1}f)$，称为 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的 m 阶微分.

引理 1: $d^m f = \sum\limits_{i_1+\cdots+i_n=m} C^m_{i_1\cdots i_n} \dfrac{\partial^m f}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}} dx_1^{i_1}\cdots dx_n^{i_n}$，**其中** $C^m_{i_1\cdots i_n} = \dfrac{m!}{i_1!\cdots i_n!}$.

证明：以 $n=2$ **为例. 设公式在** $m-1$ **时成立，即**

$$d^{m-1} f = \sum_{i+j=m-1} C^m_{ij} \frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^i \partial y^j} dx^i y^j ,$$

则

$$\begin{aligned}
d^m f = d(d^{m-1} f) &= \sum_{i+j=m-1} C^m_{ij}\, d\left(\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x^i \partial y^j}\right) dx^i dy^j \\
&= \sum_{i+j=m-1} C^m_{ij}\left(\frac{\partial^m f}{\partial x^{i+1}\partial y^j} dx^{i+1}dy^j + \frac{\partial^m f}{\partial x^i \partial y^{j+1}} dx^i dy^{j+1}\right) \\
&= \sum_{i+j=m} \left(C^{m-1}_{i-1\, j} + C^{m-1}_{i\, j-1}\right)\frac{\partial^m f}{\partial x^i \partial y^j} dx^i dy^j \\
&= \sum_{i+j=m} C^m_{ij} \frac{\partial^m f}{\partial x^i \partial y^j} dx^i dy^j .
\end{aligned}$$

设 $(x(t), y(t))$ **是** D **中曲线. 令** $h(t) = f(x(t), y(t))$，**由一阶微分不变性得**

$$dh = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy ,$$

但 dx, dy **是** t **的函数，一般不是常数. 因此，**

$$d^2 h = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial f}{\partial x} d^2 x + \frac{\partial f}{\partial y} d^2 y ,$$

$d^2 x(t), d^2 y(t)$ **一般不为零. 所以二阶微分以及高阶微分没有一阶微分的形式不变性.**

但如果在上式中， $x(t) = at+b,\ y(t) = ct+d$ **分别都是** t **的线性函数，则** $d^2 x \equiv 0$，$d^2 y \equiv 0$，**因而** $d^m h = d^m f(x,y) \quad (x = x(t), y = y(t))$ **仍保留形式不变性. 下面我们将用这一点将一元函数的 Taylor 展开推广到多元函数.**

定义：设 D **是** $\mathbf{R}^2$ **中区域，** $f(x,y)\in C^r(D)$，$g(x,y)\in C^r(D)$. **称** $f(x,y), g(x,y)$ **在** $(x_0, y_0)\in D$ **处** m **阶相切，如果对任意** $k \le m,\ i+j=k$，**恒有**

$$\frac{\partial^k f(x_0,y_0)}{\partial x^i \partial y^j} = \frac{\partial^k g(x_0,y_0)}{\partial x^i \partial y^j} .$$

例： $z=f(x,y)$ **与其切面** $z-z_0=\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$ **在切点** (x_0,y_0,z_0) **处一阶相切**.

引理 2: 设 $f\in C^r(D)$，**则** $\forall(x_0,y_0)\in D$， $f(x,y)$ **与多项式**

$$T_r(x,y)=\sum_{m=0}^{r}\sum_{i+j=m}\frac{1}{i!\,j!}\frac{\partial^m f(x_0,y_0)}{\partial x^i\partial y^j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

在 (x_0,y_0) **处** r **阶相切**.

证明：由直接计算得在 (x_0,y_0) **处**

$$\frac{\partial^m}{\partial x^{i_1}\partial y^{j_1}}(x-x_0)^i(y-y_0)^j=\begin{cases} i!\,j!, & \text{如果}(i_1,j_1)=(i,j);\\ 0, & \text{如果}(i_1,j_1)\neq(i,j).\end{cases}$$

引理显然.

多项式

$$T_r(x,y)=\sum_{m=0}^{r}\sum_{i+j=m}\frac{1}{i!\,j!}\frac{\partial^m f(x_0,y_0)}{\partial x^i\partial y^j}(x-x_0)^i(y-y_0)^j$$

称为 $f(x,y)$ **在** (x_0,y_0) **处的** r **阶** Taylor **展开**.

如果形式的令 $dx=x-x_0,\ dy=y-y_0$，**则**

$$\begin{aligned}T_r(x,y)&=\sum_{m=0}^{r}\frac{1}{m!}\left(\sum_{i+j=m}\frac{m!}{i!\,j!}\frac{\partial^m f(x_0,y_0)}{\partial x^i\partial y^j}dx^i dy^j\right)\\&=\sum_{m=0}^{r}\frac{1}{m!}d^m f(x_0,y_0).\end{aligned}$$

与一元函数 $y=h(x)$ **的** Taylor **展开**

$$T_r(x)=\sum_{m=0}^{r}\frac{1}{m!}h^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m=\sum_{m=0}^{r}\frac{1}{m!}d^m h(x_0)\,.$$

形式相同. **我们希望借助此给出多元函数** Taylor **展开的余项估计**.

定义：区域 $D\subset\mathbf{R}^2$ **称为以** (x_0,y_0) **为心的星形域**(star domain)，**如果** $\forall(x,y)\in D$，**连接** $(x,y),(x_0,y_0)$ **的直线段都在** D **内**.

定理 1（Lagrange）：设 D **是以** (x_0, y_0) **为心的星形域**，$f(x,y) \in C^{r+1}(D)$，**则对任意** $(x,y) \in D$，**存在** q, $0 < q < 1$，**使得**

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} f\left(x_0 + q(x - x_0), y_0 + q(y - y_0)\right).$$

证明： D **是星形域，因而直线段** $(x_0, y_0) + t(x - x_0, y - y_0)$, $t \in [0,1]$ **包含在** D **内．令**

$$h(t) = f\left(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0)\right),$$

则 $h(t) \in C^{r+1}([0,1])$．**由** Lagrange **余项的** Taylor **展开知，存在** q, $0 < q < 1$，**使得**

$$h(1) = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} d^k h(0) + \frac{1}{(r+1)!} d^{r+1} h(q).$$

而由 $(x_0, y_0) + t(x - x_0, y - y_0)$ **是** t **的线性函数，因而高阶微分仍保持形式不变性，即**

$$d^k h(0) = d^k f(x_0, y_0), \quad d^{r+1} h(q) = d^{r+1} f\left(x_0 + q(x - x_0), y_0 + q(y - y_0)\right).$$

代入得 $f(x,y)$ **的带** Lagrange **余项的** Taylor **展开**.

定理 2（Peano）：设 D **是任意开集**，$f(x,y) \in C^r(D)$，$P_0 = (x_0, y_0)$ **是** D **中任意点**.

则在 P_0 **充分小邻域上**，

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + o\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^r.$$

证明： D **是开集，因而存在** $e > 0$，**使得** $B(P_0, e) \subset D$．**对任意** $(x,y) \in B(P_0, e)$，**由** Lagrange **余项的** Taylor **展开，得**

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \sum_{k=0}^{r-1} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + \frac{1}{r!} d^r f\left(x_0 + q(x - x_0), y_0 + q(y - y_0)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{r} \frac{1}{k!} d^k f(x_0, y_0) + R. \end{aligned}$$

其中

$$R=\frac{1}{r!}d^r f\big(x_0+q(x-x_0),y_0+q(y-y_0)\big)-\frac{1}{r!}d^r f(x_0,y_0)$$

$$=\sum_{i+j=r}\frac{1}{i!\,j!}\left[\frac{\partial^r f\big(x_0+q(x-x_0),y_0+q(y-y_0)\big)}{\partial x^i\partial y^j}-\frac{\partial^r f(x_0,y_0)}{\partial x^i\partial y^j}\right](x-x_0)^i(y-y_0)^j.$$

但$(x,y)\to(x_0,y_0)$时，

$$\frac{\partial^r f\big(x_0+q(x-x_0),y_0+q(y-y_0)\big)}{\partial x^i\partial y^j}-\frac{\partial^r f(x_0,y_0)}{\partial x^i\partial y^j}\to 0$$

是无穷小．而

$$(x-x_0)^i(y-y_0)^j=\frac{(x-x_0)^i(y-y_0)^j}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^r}\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^r,$$

但$\left|\dfrac{(x-x_0)^i(y-y_0)^j}{\left(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right)^r}\right|\le 1$．定理得证．

在函数的 Taylor 展开中，二阶项$d^2 f$ 可用矩阵表示．以 n 元函数为例．

$$d^2 f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i\partial y_j}dx_i dy_j$$

$$=(dx^1,\cdots,dx^n)\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n}\\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\cdots\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dx^1\\ \vdots\\ dx^n\end{pmatrix}$$

对称矩阵$\left(\dfrac{\partial^2 f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i\partial y_j}\right)_{n\times n}$称为 f 在 $(x_1,\cdots,x_n)$ 处的海色(Hessi)矩阵，记为 $H_f(x_1,\cdots,x_n)$．

例：区域$D\subset \mathbf{R}^2$称为凸域，如果连接 D 中任意两点的直线段都在 D 内．凸域 D 上的函数 $f(x,y)$ 称为凸函数，如果对 D 中任意两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$及$t\in[0,1]$，恒有

$$f(tx_1+(1-t)x_2,ty_1+(1-t)y_2)\le tf(x_1,y_1)+(1-t)f(x_2,y_2).$$

设 $f\in C^2(D)$，证明 $f(x,y)$ 是 D 上凸函数的充分必要条件是对任意$(x_0,y_0)\in D$，$H_f(x_0,y_0)$半正定．

证明：由定义不难看出，$f(x,y)$ 在 D 上凸的充分必要条件是对 D 中任意直线段 $(x_0,y_0)+t(x_1-x_0,y_1-y_0)$，函数 $F(t)=f\big(x_0+t(x_1-x_0),y_0+t(y_1-y_0)\big)$ 是 t 的凸函数. 但 $F(t)$ 二阶可导，$F(t)$ 凸等价于 $F''(t)\ge 0$. 而

$$F''(0)=(x_1-x_0,y_1-y_0)H_f(x_0,y_0)\begin{pmatrix}x_1-x_0\\ y_1-y_0\end{pmatrix},$$

(x_1-x_0,y_1-y_0) 可取任意方向，因此 $F''(0)\ge 0$ 等价于 $H_f(x_0,y_0)$ 半正定.

习题

1．求下列函数的偏导数:

（1）$u=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$；　　（2）$u=\mathrm{tg}\dfrac{x^2}{y}$；

（3）$u=\sin(x\cos y)$；　　（4）$u=e^{\frac{x}{y}}$；

（5）$u=\mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$；　　（6）$u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$；

（7）$u=x^{\frac{x}{z}}$；　　（8）$u=x^{yz}$；

（9）$u=\dfrac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$；　　（10）$u=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

2．求下列函数在指定点的所有偏导数:

（1）$u=\sqrt[z]{\dfrac{x}{y}}$，于(1,1,1)处;

（2）$z=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{y}}$，于(0,1)处;

（3）$u=\mathrm{arctg}\dfrac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}$，于(0,0,0)处.

3．设 $f(x)$ 在 $U(x_0)\setminus\{x_0\}$ 有偏导数 $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$，且偏导数在 x_0 关于 x_i 连续，其中 $U(x_0)$ 是 x_0 的邻域.

（1）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}=A_i$，求证 $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}=A_i$.

（2）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}=\infty$，问 $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ 是否存在?

（3）若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ 不存在，问 $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$ 是否存在?

4．求下列函数的偏导数:

（1） $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2\neq 0),\\ 0, & (x^2+y^2=0);\end{cases}$

（2） $f(x,y)=\begin{cases}x\ln\left(x^2+y^2\right), & (x^2+y^2\neq 0),\\ 0, & (x^2+y^2=0).\end{cases}$

5．设 $\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是开区域，$u(x,y), v(x,y)$ 在 Ω 内满足

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},u^2+v^2=C\,(\text{常数}).$$

求证: $u(x,y), v(x,y)$ 在 Ω 内恒为常数.

6．设 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 在 (x,y) 可微．按定义证明 $u\cdot v$ 可微且 $d(u\cdot v)=udv+vdu$.

7．设 $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ 在 (x_0,y_0) 存在，$\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在 (x_0,y_0) 连续，求证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 可微.

8．讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^{3/2}y^b}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2\neq 0),\\ 0, & (x^2+y^2=0).\end{cases}$$

的连续性，可微性及偏导数的连续性.

9．求下列函数的二阶偏导数:

（1） $u=\sqrt{x^2+y^2}$；　　（2） $u=xy+\dfrac{y}{x}$；

（3） $u=\ln(x^2+y^2)$；　　（4） $u=(xy)^z$.

10．验证下列函数中的每一个都满足

$$\nabla^2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0\,.$$

（1） $u=\ln(x^2+y^2)$；　　（2） $u=x^2-y^2$；

（3） $u=e^x\cos y$；　　（4） $u=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

11．**求高阶偏导数**:

（1） $u=(x-x_0)^p(y-y_0)^q$，**求** $\dfrac{\partial^{p+q}u}{\partial x^p\partial y^q}$；

（2） $u=\dfrac{x+y}{x-y}\,(x\neq y)$，**求** $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$；

（3） $u=\ln(ax+by)$，**求** $\dfrac{\partial^{m+n}u}{\partial x^m\partial y^n}$；

(4) $u=xyze^{x+y+z}$，**求** $\dfrac{\partial^{p+q+r}u}{\partial x^p\partial y^q\partial z^r}$.

12．**求** $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_{(x_0,y_0)}$:

（1） $u=x^2-y^2$，$(x_0,y_0)=(1,1),\langle l,e_1\rangle=\dfrac{p}{3},\langle l,e_2\rangle=\dfrac{p}{6}$；

（2） $u=\ln(x^2+y^2)$，$(x_0,y_0)=(1,1)$，l **与** x **轴正向夹角为** $60°$；

（3） $u=xe^{xy}$，$(x_0,y_0)=(1,1)$，l **与向量** $(1,1)$ **同向**.

13．**设** $f(x,y)$ **在** $P_0=(2,0)$ **指向** $P_1=(2,-2)$ **的方向导数是** 1，**指向原点的方向导数是** -3. **试回答**:

（1）**指向** $P_2=(2,1)$ **的方向导数是多少**?

（2）**指向** $P_3=(3,2)$ **的方向导数是多少**?

14．**设** $f(x,y)$ **可微**，l **是一确定的单位向量**，**对任意** x,y **有** $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial l}\equiv 0$. **问此函数有何特点**?

15．**证明梯度的运算法则**:

$$\nabla(u+v)=\nabla u+\nabla v,\qquad \nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u,$$
$$\nabla f(u)=f'(u)\nabla u.$$

16．**证明泰勒公式的唯一性**.

（1）**设** $\sum\limits_{i+j=0}^{n}A_{ij}x^iy^j+o(r^n)=0\ (r\to 0)$，**其中** $r=\sqrt{x^2+y^2}$. **求证** $A_{ij}=0$ $(i,j$**为非**

负整数，$i+j=0,1,2,\cdots,n)$.

（2）设 $P_n(x)+o(r^n)=0\ (r\to 0)$，其中 $r=|x|$，$P_n(x)=\sum_{|k|\le n}a_k x^k$，而

$$a_k=a_{k_1,k_2,\cdots,k_n},\quad |k|=\sum_{i=1}^{n}k_i,\quad x^k=x_1^{k_1}\cdot x_2^{k_2}\cdots x_n^{k_n},$$

$k_1,k_2,\cdots,k_n$ 为非负整数. 证明:

$$a_k=0,\quad |k|\le n.$$

17．求函数 $f(x,y)=x^2+xy+y^2+3x-2y+4$ 在 $(-1,1)$ 点邻域的泰勒展开.

18．求函数 $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ 在 $(1,1,1)$ 邻域的泰勒展开.

19．求函数 $f(x,y)=\dfrac{y^2}{x^2}$ 在 $(1,-1)$ 点邻域的二阶泰勒公式，并写出余项.

20．求 $f(x,y)=e^{x+y}$ 在 $(0,0)$ 邻域的 n 阶泰勒公式并写出余项.

21．设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{x(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}, & (x^2+y^2\ne 0),\\ 0, & (x^2+y^2=0).\end{cases}$$

求 $(0,0)$ 邻域的四阶泰勒展式，并求 $\dfrac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}$，$\dfrac{\partial^4 f(0,0)}{\partial x^4}$.