第六章 Fourier 级数

§6.1 周期函数 Fourier 级数

1.1 引言

在科学与工程中时常遇到周期现象，自然地，通常用周期函数刻画它们. 蒸汽机和各种转动设备都是周期现象的实例，由发电机产生的交流电也是周期现象的实例. 这样，如蒸汽机中十字头的路程、速度、加速度、蒸汽压力和交流电中的电压、电流等都用周期函数来刻画.

如果存在一个正数 $T > 0$，使得

$$j(t+T) = j(t),$$

我们就称 $j(t)$ 为周期函数，T 称为一个周期. 如果存在最小的周期 T_0，我们称 $j(t)$ 是以 T_0 为周期的周期函数.

最简单的周期函数是正弦型函数：

$$A\sin(wt + a), \tag{1}$$

它正好刻画了力学上的调和振动（或简谐振动）. 其中 w 是频率，它与周期的关系是

$$w = \frac{2p}{T}, \tag{2}$$

A 是振幅，a 是初始相位.

用这类简单的周期函数可以组成比较复杂的周期函数. 因为频率相等的正弦型函数之和仍是一个同频率的正弦型函数，所以用以组成复杂函数的各正弦型函数必须有不同的频率.

例如三个正弦型函数之和

$$\sin t + \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 3t,$$

图形就已经相当复杂了. 在 Mathematica 软件中可画它的图形.

```
Plot[Sin[t]+1/2Sin[2t]+1/4Sin[3t], {t,-2Pi,2Pi}].
```

可以想象如果用无穷级数，就可以表示各种各样的复杂函数了：

$$j(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \sin(nwt + a_n), \tag{3}$$

几何上看，（3）表明周期函数 $j(t)$ 的图形可以由一系列正弦型函数图形叠加而成. 力学上看，由函数 $j(t)$ 表示的复杂振动可以分解成调和振动的和. 将周期函数分解成调和振动函数的过程称为调和分析. 作简单变量替换 $x = wt$，得函数 $f(x) = j\left(\frac{x}{w}\right)$，则（3）式成为

$$f(x)=A_0+\sum_{n=1}^{+\infty}A_n\sin(nx+a_n)\,. \qquad (4)$$

由和差化积公式，我们可把（4）改写为

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,, \qquad (5)$$

其中 A_0-a_0, $A_n\sin a_n=a_n$, $A_n\cos a_n=b_n$. （5）式称为周期函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数展开．这里产生一系列基本的数学问题：

（1） 给定一个周期 $2p$ 的函数，在什么条件下它有 Fourier 级数展开式？

（2） 如果一个函数存在 Fourier 级数展开式，如何获得这种展开，即如何确定展开系数 a_n, b_n，它们也称为 Fourier 系数.

（3） Fourier 级数展开式何时在某种意义下收敛？收敛到什么值？

（4） 何种条件下 Fourier 级数展开式收敛到 $f(x)$？

本章将部分地解决这些问题，它们的完全解决须要一门专业课程.

1.2 Fourier 级数展开

函数 $f(x)$ 在 $[-p,p]$ 上 Riemann 可积，我们可以推出 $|f(x)|$ 在 $[-p,p]$ 上也 Riemann 可积．当积分 $\int_{-p}^{p}f(x)dx$ 有瑕点时，我们假设它绝对可积．这两种情况合在一起，我们称之为绝对可积.

定义：以 $2p$ 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-p,p]$ 上绝对可积，则存在它的 Fourier 级数展开

$$f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)\,,$$

其中

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(x)dx,\\
a_m&=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\cos mxdx,\quad m=1,2,3,\cdots,\\
b_m&=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x)\sin mxdx,\quad m=1,2,3,\cdots.
\end{aligned} \qquad (6)$$

需要说明公式（6）中三个积分有意义：

$f(x)$ 在 $[-p,p]$ 上绝对可积，即

$$\int_{-p}^{p}|f(x)|dx<+\infty,$$

则

$$\left|\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx\right| \le \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}|f(x)|dx < +\infty,$$

$$\left|\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos mxdx\right| \le \frac{1}{p}\int_{-p}^{p}|f(x)||\cos mx|dx \le \frac{1}{p}\int_{-p}^{p}|f(x)|dx < +\infty,$$

$$\left|\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin mxdx\right| \le \frac{1}{p}\int_{-p}^{p}|f(x)||\sin mx|dx \le \frac{1}{p}\int_{-p}^{p}|f(x)|dx < +\infty.$$

这时我们不知道 Fourier **级数是否收敛，更不知道它是否收敛到** $f(x)$ **. 如果我们假设它收敛，即（5）式成立，且可逐项积分（一致收敛可保证这一点），则我们有**

$$\int_{-p}^{p} f(x)dx = 2pa_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\int_{-p}^{p}\cos nxdx + b_n\int_{-p}^{p}\sin nxdx\right].$$

容易看出

$$\int_{-p}^{p}\cos nxdx = \frac{\sin nx}{n}\Bigg|_{-p}^{p} = 0,$$

$$\int_{-p}^{p}\sin nxdx = -\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-p}^{p} = 0,$$

因而 $a_0 = \dfrac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)dx$.

类似地，

$$\int_{-p}^{p} f(x)\cos mxdx = a_0\int_{-p}^{p}\cos mxdx + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n\int_{-p}^{p}\cos nx\cos mxdx + b_n\int_{-p}^{p}\sin nx\cos mxdx\right].$$

右端第一项等于零，且不论 n, m **如何，有**

$$\int_{-p}^{p}\sin nx\cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}[\sin(n+m)x + \sin(n-m)x]dx = 0,$$

而当 $n \ne m$ **时**

$$\int_{-p}^{p}\cos nx\cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}[\cos(n+m)x + \cos(n-m)x]dx = 0,$$

最后当 $n = m$ **时有**

$$\int_{-p}^{p}\cos^2 mxdx = \frac{1}{2}\int_{-p}^{p}\frac{1+\cos 2mx}{2}dx = p\ .$$

这样我们得到

$$a_m = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\cos mxdx, \quad m = 1,2,3,\cdots,$$

同样我们可得到

$$b_m = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(x)\sin mxdx, \quad m = 1,2,3,\cdots.$$

1.3 正交函数系

定义 2**：区间** $[a,b]$ **上函数系** $\{j_n(x)\}$**，如果满足**

(1) $\int_a^b \left| j_n(x) \right|^2 dx < +\infty$,

(2) $\int_a^b j_n(x) j_m(x) dx = 0,\ \ n \neq m$,

(3) $\int_a^b j_n^2(x) dx = l_n > 0$,

则称$\{j_n(x)\}$**为正交函数系，进而如果** $l_n = 1$，**称之为规范正交函数系**.

如果$\{j_n(x)\}$**是一正交函数系，则**$\left\{ \frac{1}{\sqrt{l_n}} j_n(x) \right\}$**就是一规范正交函数系了**.

例 1：$\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$**就是**$[-p, p]$**上一正交函数系，由此可得一规范正交函数系**$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2p}}, \frac{\cos x}{\sqrt{p}}, \frac{\sin x}{\sqrt{p}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{p}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{p}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{p}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{p}}, \cdots \right\}$.

例 2：$\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots\}$**或者** $\{\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots\}$**是**$[0, p]$**上的正交函数系，由此可得规范正交函数系**

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2p}}, \frac{\cos x}{\sqrt{p}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{p}}, \cdots, \frac{\cos nx}{\sqrt{p}}, \cdots \right\} \text{或} \left\{ \frac{\sin x}{\sqrt{p}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{p}}, \cdots, \frac{\sin nx}{\sqrt{p}}, \cdots \right\}.$$

例 3：$\left\{ 1, \frac{\cos px}{l}, \frac{\cos 2px}{l}, \cdots, \frac{\cos npx}{l}, \cdots \right\}$**或者**$\left\{ \frac{\sin px}{l}, \frac{\sin 2px}{l}, \cdots, \frac{\sin npx}{l}, \cdots \right\}$**是区间**$[0, l]$**上的正交系**.

例 4：Legendre **多项式**

$$X_0(x) = 1,\ X_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right],\ \ n = 1, 2, 3, \cdots$$

是区间$[-1, 1]$**上的正交系，这时**

$$l_n = \int_{-1}^{1} X_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1}.$$

例 5：Haar **系**. **定义** Haar **函数**

$$y(x) = \begin{cases} -1, & 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} \le x \le 1. \end{cases}$$

考虑二进伸缩和整点平移

$$y_{i,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} y\left(\frac{x-k}{2^j} \right),$$

则$\{y_{i,k}(x)\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$是$(-\infty,+\infty)$上规范正交函数系.

定义 3：对于区间$[a,b]$上正交函数系$\{j_n(x)\}$和函数$f(x):\int_a^b|f(x)|^2dx<+\infty$，级数

$$\sum_{n=0}^{+\infty}c_n j_n(x) \qquad \text{其中} c_n=\frac{1}{l_n}\int_a^b f(x)j_n(x)dx$$

称为函数$f(x)$关于正交函数系$\{j_n(x)\}$的（广义）Fourier 级数，c_n为（广义）Fourier 系数，记为

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}c_n j_n(x).$$

如果$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n j_n(x)$一致收敛，就可逐项积分，我们有

$$\frac{1}{l_m}\int_a^b f(x)j_m(x)dx=a_m,\ \frac{1}{l_m}\int_a^b j_m^2(x)dx=a_m.$$

当$\{j_n(x)\}$是规范正交函数系时，

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}c_n j_n(x),$$

其中$c_n=\int_a^b f(x)j_n(x)dx$.

如果$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n j_n(x)$一致收敛，我们还可得到

$$\begin{aligned}\int_a^b|f(x)|^2dx&=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n^2\int_a^b j_n^2(x)dx+\sum_{m\neq n}c_n c_m\int_a^b j_n(x)j_m(x)dx\\&=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n^2.\end{aligned}$$

这可以看成勾股定理向无穷维的推广．勾股定理

$$c^2=a^2+b^2$$

几何上可以看成二维向量$c=(a,b)$，向量长度的平方等于分量平方和．在n维空间$x=(a_1,\cdots,a_n)$，也有

$$x^2=\sum_{i=1}^{n}a_i^2.$$

用 $L^2[a,b]$ 表示区间 $[a,b]$ 上所有平方可积函数的空间，其中用

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)dx$$

定义内积，它成为一个内积空间．如果 $\{j_n\}$ 是一个完备的规范正交函数系，则对任何 $f(x) \in L^2[a,b]$，有

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} c_n j_n(x), \quad c_n =< f, j_n >,$$

且有

$$\| f \|^2 = \int_a^b \left| f(x) \right|^2 dx = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n^2 \ .$$

这就是无穷维的勾股定理，即无穷维向量 $f(x)$ 长度的平方等于分量平方和．这时级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n j_n(x)$ 在 $L^2[a,b]$ 范数下收敛到函数 $f(x)$．有几个概念目前还没讲清楚：何谓完备的规范正交函数系；何谓 $L^2[a,b]$ 范数收敛；还有 $L^2[a,b]$ 在 Riemann 积分意义也不完备，其完备化需要 Lebesgue 积分概念，这些学完实变函数论和泛函分析课程后可以解决．不过这个观点对理解 Fourier 级数还是非常有用的．

§8.2 Fourier 级数的例子

上节定义指出只要 $f(x)$ 是 $2p$ 周期（广义）绝对可积的函数，$\int_0^{2p} \left| f(x) \right| dx < +\infty$，就有 Fourier 级数展开式

$$f(x) \sim a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

现在我们计算一些例子．

例 1：在区间 $[-p, p]$ 内展开函数

$$f(x) = e^{ax} \quad (a \neq 0\text{常数}).$$

解：$a_0 = \dfrac{1}{p}\int_{-p}^{p} e^{ax}dx = \dfrac{e^{ap} - e^{-ap}}{ap} = 2\dfrac{\text{sh}ap}{ap}$，

$$a_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} e^{ax}\cos nx dx = \frac{1}{p}\frac{a\cos nx + n\sin nx}{a^2+n^2}e^{ax}\Bigg|_{-p}^{p} = \frac{(-1)^n}{p}\frac{2a}{a^2+n^2}\text{sh}ap\ ,$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} e^{ax}\sin nx dx = \frac{1}{p}\frac{a\sin nx - n\cos nx}{a^2+n^2}e^{ax}\Bigg|_{-p}^{p} = \frac{(-1)^{n-1}}{p}\frac{2n}{a^2+n^2}\mathrm{sh}ap ,$$

$$\therefore \quad e^{ax} \sim \frac{2}{p}\mathrm{sh}ap\left\{\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}\left[a\cos nx - n\sin nx\right]\right\}.$$

例 2**：在区间** $[0,2p)$ **内展开函数**

$$f(x)=\frac{p-x}{2}.$$

解： $a_0 = \frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{p-x}{2}dx = \frac{1}{2p}\left(px-\frac{1}{2}x^2\right)\Bigg|_0^{2p} = 0$,

$$a_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{p-x}{2}\cos nx dx = \frac{1}{2p}(p-x)\frac{\sin nx}{n}\Bigg|_0^{2p} - \frac{1}{2np}\int_0^{2p}\sin nx dx = 0 ,$$

$$b_n = \frac{1}{p}\int_0^{2p}\frac{p-x}{2}\sin nx dx = -\frac{1}{2p}(p-x)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_0^{2p} - \frac{1}{2np}\int_0^{2p}\cos nx dx = \frac{1}{n},$$

$$\therefore \quad \frac{p-x}{2} \sim \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

以下是一些常用 $2p$ **周期函数的** Fourier **级数展开式：**

（3） $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<p,\\ -1, & p\le x<2p.\end{cases}$

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

(4) $f(x)$ **如图：**

$$f(x)\sim\frac{8}{p^2}\left(\sin x-\frac{1}{3^2}\sin 3x+\frac{1}{5^2}\sin 5x-\cdots\right).$$

（5） $f(x)$ **如图：**

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{4}{p^2}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right).$$

（6） $f(x)=|\sin x|, \quad x\in[0,2p).$

$$f(x)\sim\frac{4}{p}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2x-\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4x-\frac{1}{5\cdot 7}\cos 6x-\cdots\right).$$

(7) $f(x)=x^2,\quad x\in[0,2\pi)$.

$$f(x)\sim\frac{4\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^2}-4\pi\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin nx}{n}.$$

(8) $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi\le x<0,\\ 1, & 0\le x<\pi.\end{cases}$

$$f(x)\sim\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\cdots\right).$$

由奇偶函数的性质可得它们的 Fourier 系数有如下特点：

1° 若周期2π 可积函数 $f(x)$ 是奇函数，则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=0,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

即 $f(x)\sim\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx$，奇函数 Fourier 级数只含正弦项.

2° 若周期2π 可积函数 $f(x)$ 是偶函数，则

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=0,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

即 $f(x)\sim a_0+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$，偶函数 Fourier 级数只含余弦项（包括常数项）.

例子 2, 3, 4, 8 为奇函数，其 Fourier 级数只含正弦项；例子 5, 6 为偶函数，其 Fourier 级数只含余弦项.

用 Mathematica 软件可以直观地看出 Fourier 级数部分和收敛的性质．如

```
Plot[Sin[x]+1/3 Sin[3x], {x,-Pi,Pi}]
Plot[Sin[x]+1/3 Sin[3x]+1/5 Sin[5x], {x,-Pi,Pi}]
Plot[Sin[x]+1/3 Sin[3x]+1/5 Sin[5x]+1/7 Sin[7x], {x,-Pi,Pi}]
…
```

§8.3 Fourier 级数的收敛性

3.1 Fourier 级数的部分和

设 $f(x)$ 在$[-\pi,\pi]$上绝对可积，那么它有 Fourier 级数

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

为了考察 Fourier 级数的收敛性，我们先考察它的部分和

$$
\begin{aligned}
S_n(f,x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\\
&= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(u)du+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(u)(\cos ku\cos kx+\sin ku\sin kx)du\\
&= \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} f(u)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)\right]du.
\end{aligned}
$$

利用公式

$$
\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},
$$

我们记

$$
D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}},
$$

它被称为 Dirichlet **核**，**则**

$$
S_n(f,x)=\int_{-p}^{p} f(u)D_n(x-u)du\ .
$$

Dirichlet **核** $D_n(t)$ **有如下性质：**

(1) $\int_{-p}^{p} D_n(t)dt=1$,

(2) $D_n(t)$ **是偶函数**,

(3) $D_n(t)$ **是** $2p$ **周期函数**.

利用这三条性质我们可以改写部分和公式

$$
\begin{aligned}
S_n(f,x) &= \int_{-p}^{p} f(u)D_n(x-u)du\\
&= \int_{-p}^{p} f(x+u)D_n(u)du\\
&= \int_{0}^{p} f(x+u)D_n(u)du+\int_{-p}^{0} f(x+u)D_n(u)du\\
&= \int_{0}^{p}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]D_n(t)dt.
\end{aligned}
$$

3.2 Riemann-Lebesgue **引理**

引理（Riemann-Lebesgue） **如果函数** $g(t)$ **在** $[a,b]$ **上绝对可积**，**则**

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b g(t)\sin\ ptdt=0,$$

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b g(t)\cos ptdt=0.$$

证明：只证第一式. 首先我们有不等式

$$\left|\int_a^b \sin\ ptdt\right|=\left|\frac{\cos pa-\cos pb}{p}\right|\le\frac{2}{p}.$$

先设 $g(t)$ **在** Riemann **意义下可积. 分割**

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_n=b$$

将区间$[a,b]$**分成**n**个小区间, 并据此分解积分**

$$\int_a^b g(t)\sin\ ptdt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}g(t)\sin\ ptdt.$$

用m_i**表示**$g(t)$**在**$[t_i,t_{i+1}]$**上的下确界, 则**

$$\int_a^b g(t)\sin\ ptdt=\sum_{i=0}^{n-1}\int_{t_i}^{t_{i+1}}[g(t)-m_i]\sin\ ptdt+\sum_{i=0}^{n-1}m_i\int_{t_i}^{t_{i+1}}\sin\ ptdt,$$

进而

$$\left|\int_a^b g(t)\sin\ ptdt\right|\le\sum_{i=0}^{n-1}w_i\Delta t_i+\frac{2}{p}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|.$$

对$\forall e>0$**，首先选一个分割, 使得**

$$\sum_{i=0}^{n-1}w_i\Delta t_i<\frac{e}{2}\ ；$$

是由 Riemann **可积性保证的. 由这个分割,** m_i **已经确定, 选取**$p>\frac{4}{e}\sum_{i=0}^{n-1}|m_i|$**, 则**

$$\left|\int_a^b g(t)\sin\ ptdt\right|<e.$$

如果$g(t)$**广义绝对可积, 假定在**$[a,b]$**上只有**b**是个瑕点. 设**$0<h<b-a$**, 将积分分成两部分**

$$\int_a^b=\int_a^{b-h}+\int_{b-h}^b.$$

第二个积分有估计

$$\left|\int_{b-h}^b g(t)\sin\ ptdt\right|\le\int_{b-h}^b|g(t)|dt\ ；$$

选h充分小，使它小于$\frac{e}{2}$．对于第一个积分

$$\int_a^{b-h} g(t)\sin\ ptdt,$$

它是 Riemann 可积的，因此

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^{b-h} g(t)\sin\ ptdt = 0.$$

可选 p 充分大，使

$$\left|\int_a^{b-h} g(t)\sin\ ptdt\right| < \frac{e}{2}.$$

这样就完成了引理证明.

推论：若 $f(x)$ 在$[a,b]$上绝对可积，则它的 Fourier 系数$a_m, b_m \to 0\,(m\to+\infty)$.

3.3　局部化定理（Riemann）

定理：以 $2p$ 为周期的绝对可积的函数 $f(x)$，在一点 x_0 处的收敛及发散的性质只与函数

$f(x)$在点x_0附近的性质有关.

证明：$\forall d>0$，不妨设$d<p$，我们考虑部分和

$$S_n(f,x_0) = \frac{1}{p}\int_0^p [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt$$

$$= \int_0^d + \int_d^p = I_1 + I_2.$$

在 I_2 中，函数 $\dfrac{f(x_0+t)+f(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[d,p]$ 绝对可积，由 Riemann-Lebesgue 引理，

$I_2 \to 0$ 当$n\to+\infty$时．这样

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f,x_0) = \lim_{n\to+\infty} I_1,$$

I_1仅与 $f(x)$在x_0的邻域(x_0-d, x_0+d)性质有关，证毕.

注：事实上

$$\lim_{n\to+\infty} S_n(f,x_0) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p}\int_0^d [f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt.$$

为此我们注意到

$$\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}=\frac{t-2\sin\frac{t}{2}}{2t\sin\frac{t}{2}}=\frac{t-2\left(\frac{t}{2}+o(t^2)\right)}{2t\sin\frac{t}{2}}\to 0\ (t\to 0)\,.$$

补充函数 $\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}$ 在 $t=0$ 时定义为 0，则这函数在 $[0,p]$ 上连续有界．再由 Riemann-Lebesgue 引理得

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p}\int_0^d\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]\left[\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{t}\right]\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=0\,,$$

由此可得

$$\lim_{n\to+\infty}S_n(f,x_0)=\lim_{n\to+\infty}I_1=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p}\int_0^d\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt\,.$$

3.4　Dini 判别法

记 $j(t)=f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0$，注意到

$$\int_0^p D_n(t)dt=1,$$

我们有

$$S_n(f,x_0)-S_0=\frac{1}{p}\int_0^p j(t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\,.$$

定理（Dini 判别法）以 $2p$ 为周期的绝对可积的函数 $f(x)$，在 x_0 附近满足 Dini 条件：

$$\int_0^d\frac{|j(t)|}{t}dt<+\infty,$$

则函数 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=x_0$ 处收敛到 S_0.

证明：由 Dini 条件，可以得出

$$\frac{j(t)}{2\sin\frac{t}{2}}=\frac{j(t)}{t}\frac{t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

在区间 $[0,d]$ 上也绝对可积．另外也容易得出函数 $\frac{j(t)}{2\sin\frac{t}{2}}$ 在 $[d,p]$ 上也绝对可积．这样函数

$\dfrac{j(t)}{2\sin\dfrac{t}{2}}$ 在 $[0,p]$ 上绝对可积. Riemann-Lebesgue 引理推出

$$\lim_{n\to+\infty}\left(S_n(f,x_0)-S_0\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p}\int_0^p\frac{j(t)}{2\sin\frac{t}{2}}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,dt=0\,.$$

应用 1**：** $f(x)$ **在** x_0 **点连续**，**取** $S_0=f(x_0)$，**这时若满足** Dini **条件**，**即**

$$\int_0^d\frac{\left|f(x_0+t)\pm f(x_0)\right|}{t}dt<+\infty,$$

则 $S_n(f,x_0)\to f(x_0)$.

应用 2**：** $f(x)$ **在** x_0 **有第一类间断点**，**取**

$$S_0=\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right],$$

又设它满足 Dini **条件**，**即**

$$\int_0^d\frac{\left|f(x_0\pm t)-f(x_0\pm 0)\right|}{t}dt<+\infty\,,$$

则 $S_n(f,x_0)\to\dfrac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$.

定理（Lipschitz **判别法**）**设** $f(x)$ **为** $2p$ **周期的绝对可积函数**，**在** $x=x_0$ **点满足** a **阶** Lipschitz **条件：**

$$\left|f(x_0+t)-f(x_0)\right|\le c\left|t\right|^a,\quad \left|t\right|\le d\,,\ 0<a\le 1,$$

则 $S_n(f,x_0)\to f(x_0)\ (n\to+\infty)$.

证明：设 $a=1$，**则**

$$\frac{j(t)}{t}=\frac{f(x_0+t)-f(x_0)+f(x_0-t)-f(x_0)}{t}.$$

当 $0<t\le d$ **时**，$\left|\dfrac{j(t)}{t}\right|\le 2c$，**在** $[0,d]$ **上绝对可积**.

设 $a<1$，**则** $\left|\dfrac{j(t)}{t}\right|\le\dfrac{2c}{t^{1-a}}$，**也在** $[0,d]$ **上绝对可积**. **由** Dini **判别法**，**知**

$$S_n(f,x_0)\to f(x_0)\ (n\to+\infty).$$

注：设 $f(x)$ **为** $2p$ **周期的绝对可积函数**，**在** x_0 **可导**，**或单侧可导**，**甚至在** x_0 **间断**，**但有如下**

意义的单侧导数

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},\quad \lim_{t\to 0^+}\frac{f(x_0-t)-f(x_0-0)}{-t},$$

则 $S_n(f,x_0)\to\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]$(或$f(x_0)$).

定义（逐段可微）在$[a,b]$存在有限个点$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$，函数$f(x)$在(x_i,x_{i+1})可导，且存在 $f(x_i+0), f(x_{i+1}-0)$ 及 $f'(x_i+0), f'(x_{i+1}-0)$，则称 $f(x)$ 在$[a,b]$逐段可微.

定理：设 $f(x)$ 为 $2p$ 周期函数，在$[-p,p]$逐段可微，则

$$S_n(f,x_0)\to S_0=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}\quad (n\to+\infty).$$

3.5 Dirichlet 判别法

引理：设函数 $g(x)$ 在$[0,h]$上单调增加并有界，则

$$\lim_{l\to+\infty}\int_0^h g(x)\frac{\sin lx}{x}dx=\frac{p}{2}g(+0).$$

证明：

$$\begin{aligned}\int_0^h g(x)\frac{\sin lx}{x}dx&=\int_0^h[g(x)-g(+0)]\frac{\sin lx}{x}dx+g(+0)\int_0^h\frac{\sin lx}{x}dx.\\&=I+J.\end{aligned}$$

对于 J，我们有

$$J=g(+0)\int_0^h\frac{\sin lx}{x}dt=g(+0)\int_0^{lh}\frac{\sin t}{t}dt\to g(+0)\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$$

$$=\frac{p}{2}g(+0).$$

对于 I，我们有

$$I=\int_0^d[g(x)-g(+0)]\frac{\sin lx}{x}dx+\int_d^h[g(x)-g(+0)]\frac{\sin lx}{x}dx=I_1+I_2.$$

对于 I_1，$\forall e>0$，$\exists d>0$，使得当$0<x\le d$ 时，有

$$0\le g(x)-g(+0)<\frac{e}{4L},$$

其中 L 满足

$$\left|\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt\right|\le L.$$

用积分第二中值定理，我们有

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= \left|\int_0^d [g(x)-g(+0)]\frac{\sin\ lx}{x}dx\right| \\
&= \left|[g(d)-g(+0)]\int_h^d \frac{\sin\ lx}{x}dx\right| \\
&= \left|[g(d)-g(+0)]\int_{lh}^{ld} \frac{\sin t}{t}dt\right| \\
&< \frac{e}{4L}\left(\left|\int_0^{ld}\frac{\sin t}{t}dt\right|+\left|\int_0^{lh}\frac{\sin t}{t}dt\right|\right) \\
&\le \frac{e}{2}.
\end{aligned}
$$

对于I_2，$\dfrac{g(x)-g(+0)}{x}$**在**$[d,h]$**绝对可积，由** Riemann-Lebesgue **引理知** $\lim\limits_{l\to+\infty} I_2 = 0$．**即** $\exists\Delta>0$，**当** $l>\Delta$**时，有**

$$|I_2|<\frac{e}{2}.$$

于是当 $l>\Delta$**时，有**

$$|I| \le |I_1|+|I_2| < e\ ,$$

即 $\lim\limits_{l\to+\infty} I = 0$．**从而**

$$\lim_{l\to+\infty}\int_0^h g(x)\frac{\sin\ lx}{x}dx = \frac{p}{2}g(+0)\,.$$

注：若 $g(x)$ **在**$[0,h]$**上单调减少并有界，引理也成立.**

若把$[a,b]$**分成有限个区间，**$f(x)$**在每个区间单调，则称** $f(x)$ **在**$[a,b]$**逐段单调.**

定理：设 $f(x)$ **为** $2p$ **周期绝对可积函数，且存在** $h>0$，**使得** $f(x)$ **在** $[x_0-h,x_0]$，$[x_0,x_0+h]$**分别单调，则**

$$S_n(f,x_0)\to\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)]\quad (n\to+\infty).$$

证明：由局部化定理只须证明

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p}\int_0^h[f(x_0+t)+f(x_0-t)]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt \\
&=\frac{1}{2}[f(x_0+0)+f(x_0-0)].
\end{aligned}
$$

由条件知 $f(x_0+t)$ **在**$[0,h]$**单调，**$f(x_0-t)$ **在**$[0,h]$**单调，并都有界，由引理得**

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{p}\int_0^h\left[f(x_0+t)+f(x_0-t)\right]\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{t}dt\\
&=\frac{1}{p}\cdot\frac{p}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right].
\end{aligned}
$$

定理（Dirichlet **判别法）设** $f(x)$ **为** $2p$ **周期函数**，**在**$[-p,p]$ **逐段单调**，**则**

$$
S_n(f,x_0)\to\frac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right]\quad(n\to+\infty).
$$

定义：若 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，**且在某个区间**$[a,b]$**上成立**

$$
f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),
$$

则称它为 $f(x)$ **在区间**$[a,b]$**上的** Fourier **级数展开式**.

上述定理，**即** Dini, Lipschitz, Dirichlet **判别法**，**给出函数能展开成** Fourier **级数的充分条件**.

3.6　Fourier **展开式的例**

1． $x=2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sin nx}{n},\quad x\in(-p,p).$

特别地，$\dfrac{p}{4}=1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots.$

2． $x^2=\dfrac{1}{3}p^2+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{4}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-p,p].$

特别地，

$$
\begin{aligned}
\frac{p^2}{6}&=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots,\\
\frac{p^2}{12}&=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots.
\end{aligned}
$$

3．

$$
\cos ax=\frac{\sin ap}{p}\left(\frac{1}{a}-\frac{2a}{a^2-1}\cos x+\frac{2a}{a^2-2^2}\cos 2x-\cdots+(-1)^n\frac{2a}{a^2-n^2}\cos nx+\cdots\right),
$$
$$
x\in[-p,p].
$$

在上式令 $x=p$ **后**，**再用**$\sin ap$ **除两边**，**可以得到**

$$\frac{\cos ap}{\sin ap}=\frac{1}{p}\left(\frac{1}{a}+\frac{2a}{a^2-1}+\frac{2a}{a^2-2^2}+\cdots+\frac{2a}{a^2-n^2}+\cdots\right).$$

再令 $z=ap$，**得**

$$\mathrm{ctg}z=\frac{1}{z}+\frac{2z}{z^2-p^2}+\frac{2z}{z^2-(2p)^2}+\cdots+\frac{2z}{(z^2-np)^2}+\cdots,\quad z\neq kp..$$

类似地可得

$$\frac{1}{\sin z}=\frac{1}{z}-\left(\frac{1}{z-p}+\frac{1}{z+p}\right)-+\cdots+\left(\frac{1}{z-np}+\frac{1}{z+mp}\right)+\cdots,\quad z\neq kp..$$

它们是有理函数的部分分式的推广.

§8．4　任意区间上的 Fourier 级数

4.1　周期 $2l$ 情形

设 $f(x)$ **为** $2l$ **周期绝对可积函数**，**令** $x=\frac{lt}{p}$，**则** $j(t)=f\left(\frac{lt}{p}\right)$ **为** $2p$ **周期绝对可积函数**.

对 $j(t)$ **我们有** Fourier **级数：**

$$j(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

其中

$$a_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f\left(\frac{lt}{p}\right)\cos ntdt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{npx}{l}dx,$$
$$b_n=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f\left(\frac{lt}{p}\right)\sin ntdt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{npx}{l}dx.$$

由此得

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{npx}{l}+b_n\sin\frac{npx}{l}\right).$$

4.2　非周期函数情形

对于定义在 $[-l,l]$ **上的函数** $f(x)$，**我们可以把它开拓成周期** $2l$ **的函数** $f^*(x)$，**其在** $[-l,l]$ **修改为**

$$f^*(x)=\begin{cases}f(x), & x\in(-l,l),\\ f(l), & x=-l,l.\end{cases}$$

我们可以针对 $f^*(x)$ **来研究** Fourier **级数和** Fourier **级数的收敛性**. **在逐段可微条件下**,

Fourier **级数部分和收敛到** $\dfrac{f(-l)+f(l)}{2}$.

如果 $f(x)$ **是定义在** $[a,a+T]$ **上的函数，我们也可把它开拓成** T **周期函数** $f^*(x)$，**然后在** $\left[-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$ **上研究** Fourier **级数及其收敛性**.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{2npx}{T}+b_n\sin\frac{2npx}{T}\right),$$

其中

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^*(x)dx=\frac{2}{T}\int_a^{a+T}f(x)dx,\\
a_n&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^*(x)\cos\frac{2npx}{T}dx=\frac{2}{T}\int_a^{a+T}f(x)\cos\frac{2npx}{T}dx,\\
b_n&=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f^*(x)\sin\frac{2npx}{T}dx=\frac{2}{T}\int_a^{a+T}f(x)\sin\frac{2npx}{T}dx.
\end{aligned}$$

当逐段可微时，在端点 $x=a,a+T$ **处**, Fourier **级数收敛到**

$$\frac{f(a+0)+f(a+T-0)}{2}.$$

即使在端点处可导，也是这样.

函数的奇延拓和偶延拓：如果函数 $f(x)$ **只定义在** $[0,l]$ **上，我们可以首先把它延拓到** $[-l,l]$，**然后在延拓成** $2l$ **周期函数．这时常用的有两种方法：**

偶延拓：

$$F_e(x)=\begin{cases}f(x), & 0\le x\le l,\\ f(-x), & -l<x<0.\end{cases}$$

它在 $(-l,l)$ **上是偶函数，其** Fourier **级数中只有余弦项**.

奇延拓：

$$F_o(x)=\begin{cases}f(x), & 0\le x\le l,\\ -f(-x), & -l<x<0.\end{cases}$$

它在 $(-l,l)$ **上是奇函数，其** Fourier **级数中只有正弦项**.

两种情况下 Fourier **级数在端点** $(-l,0,l)$ **收敛性要具体分析得到．下面罗列几个例子，读者可自行验证**.

例 1：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{px}{2}=-\dfrac{p^{2}}{6}+\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2},\quad x\in[0,p]$.

例 2：$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le \dfrac{p}{2},\\ 0, & \dfrac{p}{2}<x\le p,\end{cases}$ **按余弦展开**.

$$f(x)=\frac{1}{p}+\frac{1}{p}\cos x-\frac{4}{p}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{4m^2-1}\cos 2mx,\quad 0\le x\le p\,.$$

例 3：$f(x)=\begin{cases}\sin x, & 0\le x\le \dfrac{p}{2},\\ 0, & \dfrac{p}{2}<x\le p,\end{cases}$ **按正弦展开**.

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos x-\frac{4}{p}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}m}{4m^2-1}\sin 2mx,\quad x\in\left[0,\frac{p}{2}\right)\cup\left(\frac{p}{2},p\right].$$

§8．5　Fourier 级数的复数形式，快速 Fourier 变换，快速 Sine 和 Cosine 变换

5.1　Fourier 级数的复数形式

利用公式

$$\cos nx=\frac{1}{2}\left(e^{inx}+e^{-inx}\right),$$

$$\sin nx=\frac{1}{2i}\left(e^{inx}-e^{-inx}\right)$$

及 $e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$，**我们可以把** Fourier **级数表示成复数形式**

$$f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{inx}\,, \tag{5.1}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}f(x)e^{-inx}dx\,.$$

这里 $f(x)$ **是复值函数，函数系** $\left\{\dfrac{1}{2p}e^{inx}\right\}$ **是一完全正交函数系**.

如果 $f(x)$ **是实值的，对应的** c_n **与** a_n,b_n **之间有如下关系**

$$c_0 = \frac{1}{2} a_0,$$
$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad n = 1,2,\cdots,$$
$$c_{-n} = \overline{c_n}, \quad n = 1,2,\cdots.$$

对于复数形式的 Fourier 级数，也有相应的 L^1 理论，特别地有 Dini, Lipschitz, Dirichlet 判别法．我们还可建立它的 L^2 理论，借助于复数形式的 L^2 理论，我们还可建立实 Fourier 级数的 L^2 理论．

5.2 Fourier 级数的平均收敛性

设以 $2p$ 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-p, p]$ 上 Riemann 可积，这时我们推出 $|f(x)|^2$ 在 $[-p, p]$ 上也 Riemann 可积，如果有瑕点时，我们假设平方可积，即积分

$$\int_{-p}^{p} |f(x)|^2 dx$$

收敛．利用不等式

$$|f(x)| \le \frac{1 + |f(x)|^2}{2},$$

由平方可积立即推出 $f(x)$ 绝对可积，这时它存在 Fourier 级数：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

考虑这个 Fourier 级数的部分和

$$S_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

我们仍然得不到它的聚点收敛性，但是在平方可积条件下，我们可以得到它在“平方可积范数”是收敛的，称为平均收敛，即

$$S_n(f) \xrightarrow{L^2} f.$$

定理：设以 $2p$ 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-p, p]$ 上平方可积，则

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{-p}^{p} |f(x) - S_n(f, x)|^2 dx = 0$$

而且

$$\frac{1}{p} \int_{-p}^{p} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

我们不给出它的证明，有兴趣的同学可参考有关教科书．关于复数形式的 Fourier 级数也有相同的结果，而且几何意义更加直观．设以$2p$ 为周期的复值函数 $f(x)$ 在$[-p,p]$上平方可积，因而它有复数形式的 Fourier 级数

$$f(x) \sim \sum_{k\in Z} c_k e^{ikx},$$

其中

$$c_k = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)e^{-ikx}dx .$$

它的部分和

$$S_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

在“平方可积范数”下收敛到 f，即平均收敛到 f．

定理：设以$2p$ 为周期的复值函数 $f(x)$ 在$[-p,p]$上平方可积，则

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-p}^{p}\left|f(x)-S_n(f,x)\right|^2 dx = 0$$

而且

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left|f(x)\right|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\left|c_k\right|^2 .$$

这两个定理的几何意义十分明显．我们把$[-p,p]$上平方可积函数之全体看成一个内积空间，加法和数乘都用函数加法 $f(x)+g(x)$ 和数乘 $cf(x)$ 来定义，内积定义为

$$< f,g >= \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(x)\overline{g(x)}dx ,$$

范数就是

$$\| f\| =< f,f >^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}\left|f(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} .$$

那么$\left\{e^{ikx}\right\}_{k\in \mathbf{Z}}$ （或$\left\{\frac{1}{\sqrt{p}},\frac{\cos x}{\sqrt{p}},\frac{\sin x}{\sqrt{p}},\cdots\right\}$，对实值函数情况）就是这个内积空间的“标准正交基”，即

$$\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} e^{imx}e^{-inx}dx = \begin{cases}0, & n\neq m,\\ 1 & n = m.\end{cases}$$

而且对每一个平方可积函数存在以“平方可积范数”下收敛的 Fourier 级数．定理的最后部分表明函数的平方可积范数可以用它的 Fourier 级数中的系数平方和来表示，它是勾股定理向无穷维的推广．

需要指出的是目前我们定义的这个平方可积函数空间是不完备的，它的完备化需要把

Riemann 积分概念推广. 这个工作是由 Lebesgue 完成的, 在"实变函数论"课程中将建立 Lebesgue 积分理论, 那时的平方可积函数空间$L^2[-p,p]$是完备的, 即如果复数列$\{c_n\}$满足

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2 < +\infty,$$

则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}$ 以 L^2 范数收敛到一个 L^2 函数 $f(x)$.

5.3 离散 Fourier 变换, 离散 Sine 和 Cosine 变换

在信号处理和图象处理中, 函数 $f(x)$ 经过取样变成一个 N 维向量（图象可变成 $N \times M$ 的矩阵）, 这时需要采用离散的 Fourier 变换（复值信号时）和离散的 Sine 和 Cosine 变换.

离散 Fourier 变换：$\mathbf{C}^N \to \mathbf{C}^N$, $v = \{v(n)\}_{n=0}^{N-1} \in \mathbf{C}^N$,

$$\hat{v}(n) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=0}^{N-1} v(j) \exp\left(-2pi\frac{jn}{N}\right).$$

它可以用矩阵表示为$\hat{v} = Fv$, 其中矩阵$F = \{F(n,i)\}$由下式给出

$$F(n,j) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp\left(-2pi\frac{jn}{N}\right).$$

容易验证

$$FF^*(n,j) = d(n,j) = \begin{cases} 1, & n = j, \\ 0, & n \neq j. \end{cases}$$

由此得到逆变换公式

$$v = F^*\hat{v}.$$

它有快速算法, 称为 FFT.

离散 Sine 和 Cosine 变换：$\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$, 共有八种, 对应的矩阵元素列表如下：

DCT-I：$C_{N+1}^{\mathrm{I}} : \mathbf{R}^{N+1} \to \mathbf{R}^{N+1}$ ；$C_{N+1}^{\mathrm{I}}(n,m) = b(n)b(m)\sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{pnm}{N}$.

DCT-Ⅱ：$C_N^{\mathrm{II}} : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ ；$C_N^{\mathrm{II}}(n,m) = b(n)\sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{pn\left(m+\frac{1}{2}\right)}{N}$.

DCT-Ⅲ：$C_N^{\mathrm{III}} : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$ ；$C_N^{\mathrm{III}}(n,m) = b(m)\sqrt{\frac{2}{N}}\cos\frac{pm\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}$.

DCT-IV：$C_N^{\mathrm{IV}}:\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$；$C_N^{\mathrm{IV}}(n,m)=\sqrt{\dfrac{2}{N}}\cos\dfrac{pn\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)}{N}$.

DST-I：$S_{N-1}^{\mathrm{I}}:\mathbf{R}^{N-1} \to \mathbf{R}^{N-1}$；$S_{N-1}^{\mathrm{I}}(n,m)=\sqrt{\dfrac{2}{N}}\sin\dfrac{pnm}{N}$.

DST-II：$S_N^{\mathrm{II}}:\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$；$S_N^{\mathrm{II}}(n,m)=b(n+1)\sqrt{\dfrac{2}{N}}\sin\dfrac{p\,(n+1)\left(m+\frac{1}{2}\right)}{N}$.

DST-III：$S_N^{\mathrm{III}}:\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$；$S_N^{\mathrm{III}}(n,m)=b(m+1)\sqrt{\dfrac{2}{N}}\sin\dfrac{p\,(m+\frac{1}{2})\left(n+\frac{1}{2}\right)}{N}$.

DST-IV：$S_N^{\mathrm{IV}}:\mathbf{R}^N \to \mathbf{R}^N$；$S_N^{\mathrm{IV}}(n,m)=\sqrt{\dfrac{2}{N}}\sin\dfrac{pn\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(m+\frac{1}{2}\right)}{N}$.

其中$b(k)$是保证变换正交性的一个权，它定义为

$$b(k)=\begin{cases}0, & \text{如果} k<0 \text{或} k>N; \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}, & \text{如果} k=0 \text{或} k=N; \\ 1, & \text{如果} 0<k<N.\end{cases}$$

通过 FFT 和简单的修改，可以实现上述八种变换的快速算法；它们的逆变换也可以通过 FFT 的逆变换的适当修正来实现．这里不再详述．很多数学软件中已经有这些程序．美国工业与应用数学学会理事长 Strong 教授说 FFT 加速了现代工业化步伐，实际上 FFT 和 DCT, DST 已经成为信号处理和图象处理的一个基础工具．

习题

1．证明下列函数系$\{y_n(x)\}$在$[0,l]$上正交，（即$\int_0^l y_n(x)y_m(x)dx=0,\ n\neq m$），并求$\int_0^l y_n^2(x)dx$.

（1）$y_n(x)=\sin\dfrac{np}{l}x,\ n=1,2,3,\cdots$；

（2）$y_n(x)=\cos\dfrac{np}{l}x,\ n=0,1,2,\cdots$；

（3）$y_n(x)=\sin\dfrac{2n+1}{2l}px,\ n=0,1,2,\cdots$；

（4）$y_n(x)=\cos\dfrac{2n+1}{2l}px,\ n=0,1,2,\cdots$.

2．求证：函数系

$$\left\{1,\cos\frac{px}{l},\sin\frac{px}{l},\cdots,\cos\frac{npx}{l},\sin\frac{npx}{l},\cdots\right\}$$

在$[-l,l]$上是正交的.

3．求下列周期为$2p$ 的函数的富里埃级数.

（1）三角多项式$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$；

（2）$f(x)=x\ (-p\le x<p)$；

（3）$f(x)=e^{ax}\ (-p\le x<p)$；

（4）$f(x)=x^3\ (-p\le x<p)$；

（5）$f(x)=\cos\dfrac{x}{2}$；

（6）$f(x)=|\sin x|\ (-p\le x<p)$

（7）$f(x)=\begin{cases} e^{ax}, & -p\le x<0, \\ 0, & 0\le x<p; \end{cases}$

（8）$f(x)=\cos^3 x$；

（9）$f(x)=x\cos x\ \ (-p\le x<p)$；

（10）$f(x)=\ln\left(2\sin\dfrac{x}{2}\right)\ (-p\le x<p)$.

4．将函数

$$f(x)=\sin^4 x$$

展开成富里埃级数.

5．在区间$(-p,p)$中展开下列函数成富里埃级数：

（1）$\operatorname{sgn} x$；　　（2）$\operatorname{sgn}\sin 2x$；

（3）$\operatorname{sgn}\cos 2x$；　　（4）$|x|$.

6．在$(0,2p)$中展开下列函数成富里埃级数：

（1）$\dfrac{p-x}{2}$；　　（2）$\ln\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}}$.

7．设$f(x)$有界，并在$(-p,p)$上逐段单调. 求证：

$$a_n = O\left(\frac{1}{n}\right),\quad b_n = O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad n \to +\infty .$$

8．**设** $f(x)$ **是以** $2p$ **为周期的周期函数，并满足**

$$\left| f(x) - f(y) \right| \le L\left| x - y \right|^{a},\quad (0 < a \le 1).$$

求证：

$$a_n = O\left(\frac{1}{n^{a}}\right),\quad b_n = O\left(\frac{1}{n^{a}}\right) \qquad n \to +\infty .$$

9．**将函数** $f(x) = x^2$ **展开成富里埃级数：**

（1）**按余弦展开；** （2）**按正弦展开；**

（3）**在区间** $(0, 2p)$ **内展开；**

（4）**求下列级数的和：**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2},\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

10．**由展开式**

$$x = 2\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \quad (-p < x < p),$$

（1）**用逐项积分法求** x^2, x^3, x^4 **在** $(-p, p)$ **中的富里埃展开式；**

（2）**求级数** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4}$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ **的和.**

11．**设**

$$f(x) = \begin{cases} 2a - |x|, & |x| \le 2a, \\ 0, & 2a \le |x| \le p. \end{cases}$$

（1）**求** $f(x)$ **的富里埃级数；**

（2）**求级数** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$ **与** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{n^2}$ **的和.**

12．

（1）**在** $(-p, p)$ **内，求** $f(x) = e^x$ **的富里埃展开式；**

（2）**求级数** $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$ **的和.**

13．设$T_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$ （$T_n(x)$ 称为 n 阶三角多项式）．求证：

$$T_n(x)=\frac{1}{2p}\int_{-p}^{p}T_n(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}dt\,.$$

14．设 $f(x)$ 以$2p$ 为周期，已知其富里埃级数的部分和为

$$S_n(x)=\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f(x+t)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\,,$$

作$S_n(x)$的平均值

$$s_n(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}S_k(x)\,.$$

（1）证明：$\sum\limits_{m=0}^{n-1}\sin\left(m+\dfrac{1}{2}\right)t=\dfrac{\sin^2\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}$ ；

（2）证明：$s_n(x)=\int_{-p}^{p}f(x+t)F_n(t)dt$，其中

$$F_n(t)=\frac{1}{2np}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2\ ;$$

（3）证明：$F_n(t)$ 有下列性质：

1° $F_n(t)\geq 0$ ；

2° $\int_{-p}^{p}F_n(t)dt=1$ ；

3° $\forall d>0$,

$$\int_{d\leq|t|\leq p}F_n(t)dt\to 0\quad(n\to+\infty)\,.$$

15．设 $f(x)\in C[-p,p]$，且周期为$2p$．求证：当$n\to+\infty$时

$$s_n(x)\rightrightarrows f(x)\quad(-p\leq x\leq p)\,.$$

16．设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，以 $2p$ 为周期，它的富里埃级数在 x_0 收敛．求证：

$$S_n(x_0)\to f(x_0)\ (n\to+\infty).$$

17．将下列函数在指定区间上展开为富里埃级数．

（1） 在区间 $(0,2l)$ 展开

$$f(x)=\begin{cases}A, & 0<x<l,\\ 0, & l<x<2l,\end{cases}$$

其中 A 为常数；

（2） $f(x)=x\cos x,\ \left(-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$；

（3） $f(x)=x,\ (0,l)$．

18．在指定区间中求下列函数的富里埃级数，并指出它的和函数：

（1） $f(x)=\sin x,\ 0\le x\le p$，偶延拓；

（2） $f(x)=\cos x,\ 0\le x\le p$，奇延拓；

（3） $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<\frac{p}{2},\\ \frac{1}{2}, & x=\frac{p}{2},\\ 0, & \frac{p}{2}<x\le p,\end{cases}$ 奇延拓与偶延拓；

（4） $f(x)=x(p-x),\ 0<x<p$，奇延拓与偶延拓．

19．设 $f(x)$ 的富里埃级数在 $[-p,p]$ 上已知收敛于 $f(x)$．求证：

$$\frac{1}{p}\int_{-p}^{p}f^2(x)dx=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n^2+b_n^2).$$

20．设 $f(x)$ 在 $[0,l]$ 上平方可积．求证：

$$\frac{2}{l}\int_0^l f^2(x)dx=\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n^2,$$

其中

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{npx}{l}dx.$$