

中国科学技术大学

2014 年硕士学位研究生入学考试试题

(量子力学)

所有试题答案写在答题纸上，答案写在试卷上无效

需使用计算器

不使用计算器

(本卷共 7 题, 150 分)

1. (20 分) 质量为 μ 的粒子被限制在宽为 a 的无限深方势阱中运动, $0 < x < a$ 。

(a) (10 分) 在开始时刻 $t = 0$, 测量到粒子处于基态的概率是 $1/2$, 处于第一激发态的概率也为 $1/2$ 。写出 t 时刻系统波函数的一般形式。

(b) (10 分) 若上问中, 开始时刻粒子的平均位置 $\bar{x} = \langle \hat{x} \rangle > a/2$ 且偏离势阱中心最远, 求此时的波函数。

2. (20 分) 金属内部含有传导电子。对于这类物理体系, 作用于传导电子的势场可用平均的势场来模拟, 即

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & x < 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases} \quad (V_0 > 0)$$

(a) (10 分) 若导体内 ($x < 0$) 传导电子的能量 $E > 0$, 计算接近金属表面的传导电子穿过金属表面进入真空的穿透系数;

(b) (10 分) 若导体内传导电子的能量 $E < 0$, 讨论金属表面外附近能否找到电子?

3. (25 分) 设 \hat{a} 、 \hat{a}^\dagger 分别为吸收算符和发射算符。今定义新算符 $\hat{b} = \alpha\hat{a} + \beta\hat{a}^\dagger$,

其中 α 、 β 为复常数。

(a) (5 分) 若 \hat{b} 及其厄米共轭 \hat{b}^\dagger 构成新的一组吸收发射算符, 则 α 、 β 应满足什么条件?

(b) (20 分) 利用 \hat{b} 、 \hat{b}^\dagger 来求哈氏量 $\hat{H} = \hbar\omega[\hat{a}^\dagger\hat{a} + A\hat{a}\hat{a} + A\hat{a}^\dagger\hat{a}^\dagger]$ 的本征值, 其中 $A^2 < \frac{1}{4}$ 为实参数。

4, (20分) 有四个质量都为 μ 的粒子在一个半径为 R 的固定圆环上运动, 呈彼此相对位置不变的正四边形分布。

(a) (10分) 若这些粒子可分辨, 求体系的能量;

(b) (10分) 若这些粒子不可分辨, 求体系的能量。

5, (20分) 粒子处于状态 $\psi = \frac{1}{\sqrt{3}}[\sqrt{2}\chi_{\frac{1}{2}}(s_z)Y_{10}(\theta, \varphi) + \chi_{-\frac{1}{2}}(s_z)Y_{11}(\theta, \varphi)]$, 问测量

总角动量平方 \hat{j}^2 及其投影 \hat{j}_z 的可能值与相应概率, 其中 $\chi_{\pm\frac{1}{2}}$ 为电子的自旋波函数。

6, (25分) 在一维定态束缚态问题中, 系统哈氏量为

$$\hat{H} = \hat{T} + V = \frac{1}{2\mu} \hat{p}^2 + V(x)$$

能量本征方程 $\hat{H}|m\rangle = E_m|m\rangle, m = 0, 1, 2, \dots$

(a) (5分) 计算 $[\hat{x}, [\hat{x}, \hat{H}]] = ?$

(b) (10分) 证明 $\sum_n (E_n - E_m) |\langle m|\hat{x}|n\rangle|^2 = \hbar^2 / 2\mu$

(c) (10分) 证明不等式 $(E_1 - E_0) \leq 4 \langle \hat{T} \rangle_0$

这里 E_1, E_0 分别为系统第一激发态和基态的能量本征值, $\langle T \rangle_0$ 是基态中的动能平均值。

7, (20分) 设一质量为 m 的粒子在势场

$$V(z) = \begin{cases} \infty & z < 0 \\ mgz & z > 0 \quad (g > 0) \end{cases}$$

中运动。请用变分法来计算基态能量的近似值, 试探函数取为

$$\psi = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ ze^{-\lambda z} & z > 0 \end{cases}, \text{ 其中 } \lambda \text{ 为实的变分参数。}$$