

中国科学院研究生院
2015 年招收攻读硕士学位研究生入学统一
考试试题
科目名称：量子力学



一、（共30分）质量为 μ 的氢原子的势能为H

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{e^2}{r} & ; r \leq a \\ \infty & ; r > a \end{cases} \quad (\text{提示: } \nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \frac{l^2}{\hbar^2 r^2})$$

(1)写出径向波函数 $R_l(r)$ 满足的方程,写出氢原能级 E_{nlm} 和基态波函数 ψ_{100} ;

(2)若氢原子处于基态 ψ_{100} ,试计算 $\Delta \hat{x}$ 和 $\Delta \hat{p}_x$ 的值,检验测不准关系;

(3)若氢原子处于定态 ψ_{nlm} ,试计算 $\langle nlm | \frac{1}{r} | nlm \rangle; \langle nlm | \frac{1}{r^2} | nlm \rangle$.

二、（共30分）已知能量算符 $H = a\hat{L}^2 + bL_x + cL_z$; (其中 a, b, c 为实常数)

选取 (L^2, L_z) 表象;

(1)若 $l=1$,试写出 H 矩阵形式,并求能级和相应的归一波函数;

(2)若 $l = \frac{3}{2}$,构造出 L_x 矩阵形式,并求 L_x 的本征值和让 L_x 对角化的矩阵.

三、（共30分）一个二维谐振子, $H_0 = \frac{1}{2m}(P_x^2 + P_y^2) + \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_1^+ + a_1), P_x = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a_1^+ - a_1)$$

$$y = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_2^+ + a_2), P_y = i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a_2^+ - a_2)$$

(1)试用升降算符来表示 H_0 ,求出能级及本征态;

(2)若谐振子受到微扰 $H' = 2\lambda xy$,计算第一激发态的能量(一级近似).

四、（共30分）利用变分原理,选取试探波函数 $\psi(\beta, x) = Ne^{-\beta^2 x^2/2}$,其中 β 为待定参数, N 为归一化常数.

(1)估算谐振子 $H = \frac{P_x^2}{2m} + \lambda x^4$ 的基态能量

(2)将你的结果与精确值 $E_0 = 1.060\lambda^{1/3}(\frac{\hbar^2}{2m})^{2/3}$ 比较大小.

五、（共30分）自旋均为 $1/2$ 的两个非全同粒子之间存在相互作用

$H = \gamma(S_{1x}S_{2x} + S_{1y}S_{2y})$,其中 γ 为实常数,只考虑自旋自由度,

(1)求体系能量本征值与本征态;

(2)如 $t=0$ 时,粒子1处于 $S_{1z} = \frac{\hbar}{2}$ 状态,粒子2处于 $S_{2x} = \frac{\hbar}{2}$ 状态,求 $t>0$ 时

$S_{1z} = -\frac{\hbar}{2}$ 状态,粒子2仍处于 $S_{2x} = \frac{\hbar}{2}$ 状态的概率.