普通高中课程标准实验教科书

数学 5

必修

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心　编著

人民教育出版社

A版

普通高中课程标准实验教科书
数学 5
必修
A版
人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学课程教材研究开发中心 编著
*
人民教育出版社 出版发行
（北京沙滩后街55号 邮编：100009）
网址：http://www.pep.com.cn
北京四季青印刷厂印装 全国新华书店经销
*
开本：890毫米×1 240毫米 1/16 印张：8 字数：150 000
2004年5月第1版 2004年10月第1次印刷
ISBN 7-107-17709-5
G·10798（课） 定价：8.80元

主　　编：刘绍学
副 主 编：钱珮玲　章建跃

本册主编：李建华
主要编者：俞求是　李建华　宋莉莉　薛　彬　郭玉峰　张炜卓　杨照宇
责任编辑：俞求是
美术编辑：王俊宏
设　　计：王　艾
封面设计：林荣桓

主 编 寄 语

同学们，欢迎大家使用这套普通高中数学教科书，希望它能够成为你们学习数学的好朋友.

作为这套教科书的主编，在大家开始用这套书学习数学之前，对于为什么要学数学，如何才能学好数学等问题，我有一些想法与你们交流.

为什么要学数学呢？我想从以下两个方面谈谈认识.

数学是有用的. 在生活、生产、科学和技术中，在这套教科书中，我们都会看到数学的许多应用. 实际上，“数量关系与空间形式”，在实践中，在理论中，在物质世界中，在精神世界中，处处都有，因而研究“数量关系与空间形式”的数学，处处都有用场. 数学就在我们身边，她是科学的语言，是一切科学和技术的基础，是我们思考和解决问题的工具.

学数学能提高能力. 大家都觉得，数学学得好的人也容易学好其他理论. 实际上，理论之间往往有彼此相通和共同的东西，而“数量关系与空间形式”、逻辑结构及探索思维等正是它们的支架或脉络，因而数学恰在它们的核心处. 这样，在数学中得到的训练和修养会很好地帮助我们学习其他理论，数学素质的提高对于个人能力的发展至关重要.

那么，如何才能学好数学呢？我想首先应当对数学有一个正确的认识.

数学是自然的. 在这套教科书中出现的数学内容，是在人类长期的实践中经过千锤百炼的数学精华和基础，其中的数学概念、数学方法与数学思想的起源与发展都是自然的. 如果有人感到某个概念不自然，是强加于人的，那么只要想一下它的背景，它的形成过程，它的应用，以及它与其他概念的联系，你就会发现它实际上是水到渠成、浑然天成的产物，不仅合情合理，甚至很有人情味. 这将有助于大家的学习.

数学是清楚的. 清楚的前提，清楚的推理，得出清楚的结论，数学中的命题，对就是

对，错就是错，不存在丝毫的含糊. 我们说，数学是易学的，因为它是清楚的，只要大家按照数学规则，按部就班地学，循序渐进地想，绝对可以学懂；我们又说，数学是难学的，也因为它是清楚的，如果有人不是按照数学规则去学去想，总想把“想当然”的东西强加给数学，在没有学会加法的时候就想学习乘法，那就要处处碰壁，学不下去了.

在对数学有一个正确认识的基础上，还需要讲究一点方法.

学数学要摸索自己的学习方法. 学习、掌握并能灵活应用数学的途径有千万条，每个人都可以有与众不同的数学学习方法. 做习题、用数学解决各种问题是必需的，理解概念、学会证明、领会思想、掌握方法也是必需的，还要充分发挥问题的作用，问题使我们的学习更主动、更生动、更富探索性. 要善于提问，学会提问，“凡事问个为什么”，用自己的问题和别人的问题带动自己的学习. 在这套书中，我们一有机会就提问题，希望“看过问题三百个，不会解题也会问”. 类比地学、联系地学，既要从一般概念中看到它的具体背景，不使概念“空洞”，又要在具体例子中想到它蕴含的一般概念，以使事物有“灵魂”.

同学们，学数学趁年轻. 你们正处在一生中接受数学训练、打好数学基础的最佳时期. 这个时期下点功夫学数学，将会终生受益. 我们构建了这片数学天地，期盼它有益于大家的成长. 你们是这片天地的主人，希望大家在学习的过程中能对它提出宝贵的改进意见. 预祝同学们愉快地生活在这片数学天地中.

本 册 导 引

我们根据《普通高中数学课程标准（实验）》编写了这套实验教科书. 本书是高中数学必修课程 5 个模块中的一个，包括解三角形、数列与不等式等三章内容.

三角形是最基本的几何图形，三角形中的数量关系是最基本的数量关系，有着极其广泛的应用. 我们将在以前学习的有关三角形、三角函数和解直角三角形知识的基础上，通过对于任意三角形边角关系的研究，发现并掌握三角形中的边长与角度之间的数量关系，并运用它们解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

数列可以看作是一种特殊的函数，它是反映自然规律的基本数学模型，尤其在计算机技术中扮演着重要角色. 我们将通过对日常生活中大量实际问题的分析，建立等差数列和等比数列这两种数列模型，探索并掌握它们的一些基本数量关系，感受这两种数列模型的广泛应用，并利用它们解决一些实际问题.

不等关系与相等关系都是客观存在的基本数量关系，是数学研究的重要内容. 建立不等观念、处理不等关系与处理等量问题是同样重要的. 在本模块中，学生将通过具体情境，感受在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，理解不等式（组）对于刻画不等关系的意义和价值；掌握求解一元二次不等式的基本方法，并能解决一些实际问题；能用二元一次不等式组表示平面区域，并尝试解决一些简单的二元线性规划问题；认识基本不等式及其简单应用；体会不等式、方程及函数之间的联系.

学习始于疑问. 在本书中，我们将通过适当的问题情景，引出需要学习的数学内容，然后在“观察”“思考”“探究”等活动中，引导同学们自己发现问题、提出问题，通过亲身实践、主动思维，经历不断的从具体到抽象、从特殊到一般的抽象概括活动来理解和掌握数学基础知识，打下坚实的数学基础.

学而不思则罔. 只有通过自己的独立思考才能真正学会数学，同时应当掌握科学的思维方法. 在本书中，我们将利用数学内容之间的内在联系，特别是蕴涵在数学知识中的数学思想方法，启发和引导同学们学习类比、推广、特殊化、化归等数学思考的常用逻辑方法，使同学们学会数学思考与推理，不断提高数学思维能力.

学习的目的在于应用. 在本书中，我们将努力为同学们提供应用数学知识解决各种数学内外问题的机会，以使同学们加深对数学概念本质的理解，认识数学知识与实际的联系，并学会用数学知识和方法解决一些实际问题. 另外，我们还开辟了“观察与猜想”

“阅读与思考”“探究与发现”“信息技术应用”等拓展性栏目，为同学们提供选学素材，有兴趣的同学可以自主选择其中的一些内容进行探究.

祝愿同学们通过本册书的学习，不但学到更多的数学知识，而且在数学能力、用数学解决问题的能力等方面都有较大提高，并培养起更高的数学学习兴趣，形成对数学的更加全面的认识.

本书部分常用符号

$\sin x$	x 的正弦
$\cos x$	x 的余弦
$\tan x$	x 的正切
$\cot x$	x 的余切
$\sin^2 x$	$\sin x$ 的平方
$\boldsymbol{a}$	向量 $\boldsymbol{a}$
$\mathbf{N}^*$	正整数集
a_n	数列$\{a_n\}$的第 n 项
S_n	数列前 n 项的和
d	等差数列的公差
q	等比数列的公比
$>$	大于
$<$	小于
$\geqslant$	大于或等于
$\leqslant$	小于或等于

目 录

第一章 解三角形

在我国古代就有嫦娥奔月的神话故事.明月高悬，我们仰望夜空，会有无限遐想，不禁会问，遥不可及的月亮离地球究竟有多远呢？

早在1671年，两个法国天文学家就测出了地球与月球之间的距离大约为385 400 km．他们是怎样测出两者之间距离的呢？

在数学发展历史上，受到天文测量、航海测量和地理测量等方面实践活动的推动，解三角形的理论得到不断发展，并被用于解决许多测量问题.

在初中，我们已经能够借助于锐角三角函数解决有关直角三角形的一些测量问题.在实际工作中我们还会遇到许多其他的测量问题，这些问题仅用锐角三角函数就不够了，如：

1．怎样在航行途中测出海上两个岛屿之间的距离？

2．怎样测量底部不可到达的建筑物的高度？

3．怎样在水平飞行的飞机上测量飞机下方山顶的海拔高度？

4．怎样测出海上航行的轮船的航速和航向？

这些问题的解决需要我们进一步学习任意三角形中边与角关系的有关知识.

在本章中我们要学习正弦定理和余弦定理，并学习应用这两个定理解三角形以及解决实际测量中的一些问题.

CHAPTER 1

1.1 正弦定理和余弦定理

1.1.1 正弦定理

探究

我们知道，在任意三角形中有大边对大角，小边对小角的边角关系. 我们是否能得到这个边、角关系准确量化的表示呢？

在$\triangle ABC$中，如果已知$\angle A$所对的边BC长为a，$\angle B$所对的边AC长为b，$\angle C$所对的边AB长为c，我们研究$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$，a，b，c之间有怎样的数量关系.

我们不容易直接得到一般三角形中边和角的关系. 我们先考虑直角三角形这种特殊情形.

如图 1.1-1，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle C$是最大的角，所对的斜边c是最大的边，要考虑边长之间的数量关系，就涉及到了锐角三角函数. 根据正弦函数的定义，

$$\frac{a}{c}=\sin A,$$

$$\frac{b}{c}=\sin B.$$

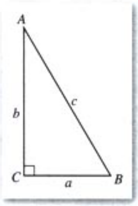


图 1.1-1

所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=c.$$

又 $\sin C=1$，所以

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

那么，对于一般的三角形，以上关系式是否仍然成立呢？

如图 1.1-2，当$\triangle ABC$是锐角三角形时，设边AB上的高是CD，根据三角函数的定义，

$$CD=a\sin B,$$

$$CD=b\sin A,$$

所以

$$a\sin B=b\sin A,$$

得到

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

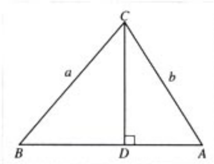


图 1.1-2

同理，在$\triangle ABC$中，

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

探究

当$\triangle ABC$是钝角三角形时，以上等式仍然成立吗？

从上面的讨论和探究，我们得到下面的定理.

是否可以用其他方法证明正弦定理？

正弦定理（law of sines）　在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

正弦定理指出了任意三角形中三条边与对应角的正弦之间的一个关系式. 由正弦函数在区间上的单调性可知，正弦定理非常好地描述了任意三角形中边与角的一种数量关系.

一般地，把三角形的三个角A，B，C和它们的对边a，b，c叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素求其他元素的过程叫做**解三角形**（solving triangles）.

思考

我们利用正弦定理可以解决一些怎样的解三角形问题呢？

分析正弦定理可知，如果已知三角形的任意两个角与一边，由三角形内角和定理，可以计算出三角形的另一角，并由正弦定理计算出三角形的另两边；如果已知三角形的任意两边与其中一边的对角，应用正弦定理，可以计算出另一边的对角的正弦值，进而确定这个角和三角形其他的边和角.

例 1 在$\triangle ABC$中，已知$A=32.0^\circ$，$B=81.8^\circ$，$a=42.9$ cm，解三角形.

解：根据三角形内角和定理，

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ-(A+B) \\ &= 180^\circ-(32.0^\circ+81.8^\circ) \\ &= 66.2^\circ. \end{aligned}$$

根据正弦定理，

$$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{42.9\sin 81.8^\circ}{\sin 32.0^\circ}\approx 80.1(\text{cm});$$

根据正弦定理，

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{42.9\sin 66.2^\circ}{\sin 32.0^\circ}\approx 74.1(\text{cm}).$$

对于任意给定的a，b，A的值，是否必能确定一个三角形？

例 2 在$\triangle ABC$中，已知$a=20$ cm，$b=28$ cm，$A=40^\circ$，解三角形（角度精确到1°，边长精确到1 cm）.

解：根据正弦定理，

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{28\sin 40^\circ}{20}\approx 0.899\,9.$$

因为$0^\circ<B<180^\circ$，所以$B\approx 64^\circ$，或$B\approx 116^\circ$.

(1) 当$B\approx 64^\circ$时，

$$C=180^\circ-(A+B)\approx 180^\circ-(40^\circ+64^\circ)=76^\circ,$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{20\sin 76^\circ}{\sin 40^\circ}\approx 30(\text{cm}).$$

(2) 当$B\approx 116^\circ$时，

$$C=180^\circ-(A+B)\approx 180^\circ-(40^\circ+116^\circ)=24^\circ,$$

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{20\sin 24^\circ}{\sin 40^\circ}\approx 13(\text{cm}).$$

练　习

1. 在$\triangle ABC$中，已知下列条件，解三角形（角度精确到1°，边长精确到1 cm）：

(1) $A=45^\circ$，$C=30^\circ$，$c=10$ cm；

(2) $A=60^\circ$，$B=45^\circ$，$c=20$ cm.

2. 在$\triangle ABC$中，已知下列条件，解三角形（角度精确到1°，边长精确到1 cm）：

(1) $a=20$ cm，$b=11$ cm，$B=30^\circ$；

(2) $c=54$ cm，$b=39$ cm，$C=115^\circ$.

1.1.2 余弦定理

探究

如果已知一个三角形的两条边及其所夹的角，根据三角形全等的判定方法，这个三角形是大小、形状完全确定的三角形.

我们仍然从量化的角度来研究这个问题，也就是研究如何从已知的两边和它们的夹角计算出三角形的另一边和另两个角的问题.

先考虑怎样计算出三角形第三条边的长. 这就是要研究如何用已知的两条边及其所夹的角来表示第三条边的问题.

如果已知三角形的两边的长$BC=a$，$AC=b$，边BC和边AC所夹的角是C，我们要设法找出一个已知的a，b和C与第三条边c之间的一个关系式，或用已知的a，b和C表示第三条边c的一个公式.

思考

联系已经学过的知识和方法，我们从什么途径来解决这个问题？

由于涉及边长问题，我们可以考虑用向量的数量积，或用解析几何中的两点间距离公式来研究这个问题.

如图 1.1-3，设$\overrightarrow{CB}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{c}$，那么

$$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b},$$

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{c}|^2&=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\\&=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\&=a^2+b^2-2ab\cos C.\end{aligned}$$

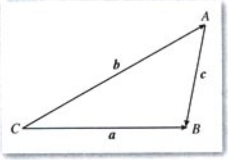


图 1.1-3

在这个证明中，你感到向量运算的威力了吗?

所以

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

同理可以证明：

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

于是，得到以下定理：

余弦定理（law of cosines） 三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍. 即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

用坐标方法怎样证明余弦定理? 还有其他方法吗?

应用余弦定理，我们就可以从已知的两边和夹角计算出三角形的第三条边.

思考?

余弦定理指出了三角形的三条边与其中的一个角之间的关系，应用余弦定理，我们可以解决已知三角形的三边确定三角形的角的问题，怎么确定呢?

从余弦定理，可以得到它的推论

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

应用以上推论，就可以从三角形的三边计算出三角形的三个角.

从上面可知，余弦定理及其推论把用“边、角、边”和“边、边、边”判定三角形全等的定理从数量化的角度进行了刻画，使其变成了可以计算的公式.

思考

勾股定理指出了直角三角形中三边平方之间的关系，余弦定理则指出了一般三角形中三边平方之间的关系，如何看这两个定理之间的关系？

三角函数把几何中关于三角形的定性结果都变成定量而可计算的公式了，你该因此更喜爱三角函数了吧！

从余弦定理和余弦函数的性质可知，如果一个三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么第三边所对的角是直角；如果小于第三边的平方，那么第三边所对的角是钝角；如果大于第三边的平方，那么第三边所对的角是锐角. 从上可知，余弦定理可以看作是勾股定理的推广.

我们把正弦定理和余弦定理结合起来应用，就能很好地解决三角形的问题.

例 3　在$\triangle ABC$中，已知$b=60$ cm，$c=34$ cm，$A=41°$，解三角形（角度精确到1°，边长精确到1 cm）.

解：根据余弦定理，

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=60^2+34^2-2\times60\times34\times\cos 41°\\&\approx3\ 600+1\ 156-4\ 080\times0.754\ 7\\&\approx1\ 676.82,\end{aligned}$$

所以

$$a\approx41(\text{cm}).$$

由正弦定理得，

$$\sin C=\frac{c\sin A}{a}\approx\frac{34\times\sin 41°}{41}\approx\frac{34\times0.656}{41}\approx0.544\ 0.$$

因为c不是三角形中最大的边，所以C是锐角，利用计算器

可得

$$C \approx 33^\circ,$$

$$B=180^\circ-(A+C)\approx 180^\circ-(41^\circ+33^\circ)=106^\circ.$$

例 4 在△ABC 中，已知 $a=134.6\text{ cm}$，$b=87.8\text{ cm}$，$c=161.7\text{ cm}$，解三角形（角度精确到 $1'$）.

解：由余弦定理的推论得：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{87.8^2+161.7^2-134.6^2}{2\times 87.8\times 161.7}\approx 0.5543,$$

$$A\approx 56^\circ 20';$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{134.6^2+161.7^2-87.8^2}{2\times 134.6\times 161.7}\approx 0.8398,$$

$$B\approx 32^\circ 53';$$

$$C=180^\circ-(A+B)\approx 180^\circ-(56^\circ 20'+32^\circ 53')=90^\circ 47'.$$

在解三角形的过程中，求某一个角有时既可以用余弦定理，也可以用正弦定理，两种方法有什么利弊呢？

思考

我们讨论的解三角形的问题可以分为几种类型？分别是怎样求解的？要求解三角形，是否必须已知三角形一边的长？

练　习

1. 在△ABC 中，已知下列条件，解三角形（角度精确到 0.1°，边长精确到 0.1 cm）：

 (1) $a=2.7\text{ cm}$，$b=3.696\text{ cm}$，$C=82.2^\circ$；

 (2) $b=12.9\text{ cm}$，$c=15.4\text{ cm}$，$A=42.3^\circ$.

2. 在△ABC 中，已知下列条件，解三角形（角度精确到 0.1°，边长精确到 0.1 cm）：

 (1) $a=7\text{ cm}$，$b=10\text{ cm}$，$c=6\text{ cm}$；

 (2) $a=9.4\text{ cm}$，$b=15.9\text{ cm}$，$c=21.1\text{ cm}$.

解三角形的进一步讨论

先研究下面的问题.

已知：在$\triangle ABC$中，$a=22$ cm，$b=25$ cm，$A=133^\circ$，解三角形.

根据正弦定理，

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{25\sin 133^\circ}{22}\approx 0.831\,1.$$

因为$0^\circ<B<180^\circ$，所以$B\approx 56.21^\circ$，或$B\approx 123.79^\circ$.

于是

$$C=180^\circ-(A+B)\approx 180^\circ-(133^\circ+56.21^\circ)=-9.21^\circ,$$

或

$$C=180^\circ-(A+B)\approx 180^\circ-(133^\circ+123.79^\circ)=-76.79^\circ.$$

到这里，让我们惊讶的是所计算出的角竟然是负角.

问题出在何处呢？是已知条件有问题吗？

分析已知条件，我们注意到$a=22$ cm，$b=25$ cm，这里$a<b$，$A=133^\circ$，是一个钝角，根据三角形的性质，应该有$A<B$，因而B也应该是一个钝角，而在一个三角形中是不可能有两个钝角的．这说明满足已知条件的三角形是不存在的.

从上面的分析我们发现，在已知三角形的两边及其中一边的对角解三角形时，在某些条件下会出现无解的情形．下面我们一起深入研究一下这种情形下解三角形的问题.

以已知a，b，A，解三角形的问题为例来讨论．在这种情形下我们可以先用正弦定理，计算出另一边的对角的正弦值

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}.$$

并由此求出B；再用三角形内角和定理计算出第三个角

$$C=180^\circ-(A+B).$$

然后，应用正弦定理计算第三边

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

1. 如果已知的A是钝角或直角，那么必须$a>b$才能有解，这时从$\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$计算$B$时，只能取锐角的值，因此有一个解.

2. 如果已知的 A 是锐角，并且 $a>b$ 或者 $a=b$，这时从 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 计算 B 时，也只能取锐角的值，因此都只有一个解.

3. 如果已知的 A 是锐角，并且 $a<b$，我们可以分下面三种情形来讨论：

(1) 如果 $a>b\sin A$，这时从 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 计算得 $\sin B<1$，B 可以取一个锐角的值和一个钝角的值，因此可以有两个解.

(2) 如果 $a=b\sin A$，这时从 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 计算得 $\sin B=1$，B 只能是直角，因此只有一个解.

(3) 如果 $a<b\sin A$，这时从 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 计算得 $\sin B>1$，但是一个角的正弦的值不能大于 1，因此没有解.

你能画出图来表示上面各种情形下三角形的解吗？

如果已知一边和两个角，会有不能解的情况吗？

我们知道，任何三角形的两边之和都大于第三边. 当已知三角形的三边作一个三角形时，已知的三条边必须满足上面的条件. 例如，如果已知的三条边的长分别是 3 cm，4 cm，5 cm，我们就可以作出这个三角形. 但是我们无法作出一个三角形，使它的三条边分别是 3 cm，4 cm，7 cm，或分别是 3 cm，4 cm，8 cm. 这是因为已知条件中三角形的两边的和等于或小于第三边. 在这种情况下，当然也无法解出三角形. 从上可知，在已知三角形的三边解三角形时，已知三边的边长必须满足构成三角形的三边的条件，解三角形才是有意义的.

如果已知三角形的两边和它们的夹角，那么这个三角形是唯一确定的，也就是可解的. 我们可以用余弦定理计算出第三边，用余弦定理的推论或用正弦定理计算出其余的角.

习题1.1

A 组

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知下列条件，解三角形（角度精确到 1°，边长精确到 1 cm）：

(1) $A=70^\circ$，$C=30^\circ$，$c=20$ cm；

(2) $A=34^\circ$，$B=56^\circ$，$c=68$ cm.

2. 在$\triangle ABC$中，已知下列条件，解三角形（角度精确到1°，边长精确到1 cm）：

(1) $b=26$ cm，$c=15$ cm，$C=23^\circ$；

(2) $a=15$ cm，$b=10$ cm，$A=60^\circ$；

(3) $b=40$ cm，$c=20$ cm，$C=25^\circ$.

3. 在$\triangle ABC$中，已知下列条件，解三角形（角度精确到1°，边长精确到1 cm）：

(1) $a=49$ cm，$b=26$ cm，$C=107^\circ$；

(2) $c=55$ cm，$a=58$ cm，$B=66^\circ$；

(3) $b=38$ cm，$c=40$，$A=106^\circ$.

4. 在$\triangle ABC$中，已知下列条件，解三角形（角度精确到1°）：

(1) $a=9$ cm，$b=10$ cm，$c=15$ cm；

(2) $a=31$ cm，$b=42$ cm，$c=27$ cm.

B 组

1. 在$\triangle ABC$中，证明模尔外得（Mollweide，德国数学家）公式：

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}},$$

$$\frac{a-b}{c}=\frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

（说明：以上两个公式涉及了三角形的三边和三角，解三角形时可以用以上公式对于计算的结果进行验算.）

2. 证明：设三角形的外接圆的半径是R，则

$$a=2R\sin A,\quad b=2R\sin B,\quad c=2R\sin C.$$

3. 在$\triangle ABC$中，如果有性质$a\cos A=b\cos B$，试问这个三角形的形状具有什么特点？

1.2 应用举例

正弦定理和余弦定理在实际测量中有许多应用，下面介绍它们在测量距离、高度、角度等问题中的一些应用. 在这些应用问题中，测量者借助于经纬仪与钢卷尺等测量角和距离的工具进行测量.

同学们在学习时可以考虑，题中为什么要给出这些已知条件，而不是其他的条件？应该注意到，例题及习题中的一组已知条件，常隐含着对于这类测量问题在某一种特定情境和条件限制下的一个测量方案. 在这种情境与条件限制下，别的方案中的量可能无法测量出来，因而不能实施别的测量方案.

下面是几个测量距离的问题.

例 1 如图 1.2-1，设 A、B 两点在河的两岸，要测量两点之间的距离. 测量者在 A 的同侧，在所在的河岸边选定一点 C，测出 AC 的距离是 55 m，$\angle BAC=51^\circ$，$\angle ACB=75^\circ$. 求 A、B 两点间的距离（精确到 0.1 m）.

分析：所求的边 AB 的对角是已知的，又已知三角形的一边 AC，根据三角形内角和定理可计算出边 AC 的对角，根据正弦定理，可以计算出边 AB.

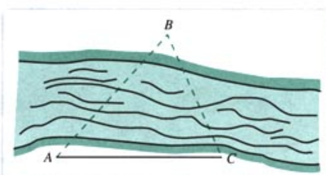


图 1.2-1

解：根据正弦定理，得

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=\frac{AC}{\sin\angle ABC},$$

$$\begin{aligned}AB&=\frac{AC\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}\\&=\frac{55\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}\\&=\frac{55\sin 75^\circ}{\sin(180-51^\circ-75^\circ)}\\&=\frac{55\sin 75^\circ}{\sin 54^\circ}\\&\approx 65.7(\mathrm{m}).\end{aligned}$$

答：A、B 两点间的距离为 65.7 米．

例 2　如图 1.2-2，A、B 两点都在河的对岸（不可到达），设计一种测量 A、B 两点间距离的方法．

分析：用例 1 的方法，可以计算出河的这一岸的一点 C 到对岸两点的距离，再测出 $\angle BCA$ 的大小，借助于余弦定理可以计算出 A、B 两点间距离．

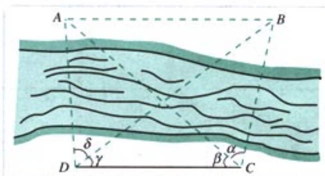


图 1.2-2

解：测量者可以在河岸边选定两点 C、D，测得 $CD=a$，并且在 C、D 两点分别测得 $\angle BCA=\alpha$，$\angle ACD=\beta$，$\angle CDB=\gamma$，$\angle BDA=\delta$. 在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle BDC$ 中，应用正弦定理得

$$AC=\frac{a\sin(\gamma+\delta)}{\sin[180^\circ-(\beta+\gamma+\delta)]}=\frac{a\sin(\gamma+\delta)}{\sin(\beta+\gamma+\delta)},$$

$$BC=\frac{a\sin\gamma}{\sin[180^\circ-(\alpha+\beta+\gamma)]}=\frac{a\sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

计算出 AC 和 BC 后，再在 $\triangle ABC$ 中，应用余弦定理计算出 AB 两点间的距离

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\times BC\cos\alpha}.$$

请同学们想一想，还有没有别的测量方法.

在测量上，我们根据测量需要适当确定的线段叫做基线，如例1中的AC，例2中的CD. 在测量过程中，要根据实际需要选取合适的基线长度，使测量具有较高的精确度. 一般来说，基线越长，测量的精确度越高. 例如，早在1671年，两位法国天文学家为了测量地球与月球之间的距离，利用几乎位于同一子午线的柏林与好望角，测量计算出α，β的大小和两地之间的距离AB，从而算出了地球与月球之间的距离约为385 400 km（图 1.2-3）. 我们在地球上所能用的最长的基线是地球椭圆轨道的长轴的长. 当然，随着科学技术的发展，还有一些更加先进与准确的测量距离的方法.

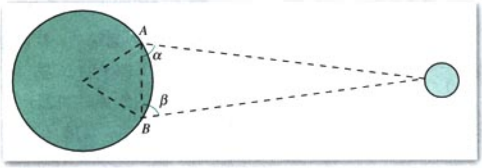


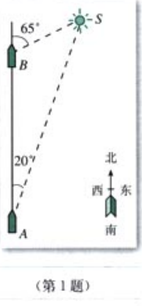
图 1.2-3

练 习

1. 如图，一艘船以 32.2 n mile/h 的速度向正北航行. 在A处看灯塔S在船的北偏东20°的方向，30 min 后航行到B处，在B处看灯塔在船的北偏东65°的方向，已知距离此灯塔 6.5 n mile 以外的海区为航行安全区域，这艘船可以继续沿正北方向航行吗？

2. 自动卸货汽车的车箱采用液压机构. 设计时需要计算油泵顶杆BC的长度，已知车箱的最大仰角是60°，油泵顶点B与车箱支点A之间的距离为 1.95 m，AB与水平线之间的夹角为$6°20'$，AC长为 1.40 m，计算BC的长（精确到 0.01 m）.

（第2题）



（第1题）

我们再来看几个测量高度的问题.

例 3　AB 是底部 B 不可到达的一个建筑物，A 为建筑物的最高点. 设计一种测量建筑物高度 AB 的方法.

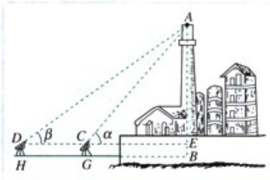


图 1.2-4

分析：由于建筑物的底部 B 是不可到达的，所以不能直接测量出建筑物的高. 由解直角三角形的知识，只要能测出一点 C 到建筑物的顶部 A 的距离 CA，并测出由点 C 观察 A 的仰角，就可以计算出建筑物的高. 所以应该设法借助解三角形的知识测出 CA 的长.

解：选择一条水平基线 HG（图 1.2-4），使 H，G，B 三点在同一条直线上. 由在 H，G 两点用测角仪器测得 A 的仰角分别是 α，β，$CD=a$，测角仪器的高是 h. 那么，在 $\triangle ACD$ 中，根据正弦定理可得

$$AC=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)},$$

$$\begin{aligned}AB&=AE+h\\&=AC\sin\alpha+h\\&=\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}+h.\end{aligned}$$

例 4　如图 1.2-5，在山顶铁塔上 B 处测得地面上一点 A 的俯角 $\alpha=54^\circ40'$，在塔底 C 处测得 A 处的俯角 $\beta=50^\circ1'$. 已知铁塔 BC 部分的高为 27.3 m，求出山高 CD（精确到 1 m）.

分析：根据已知条件，应该设法计算出 AB 或 AC 的长.

解：在$\triangle ABC$ 中，$\angle BCA=90^\circ+\beta$，$\angle ABC=90^\circ-\alpha$，$\angle BAC=\alpha-\beta$，$\angle BAD=\alpha$. 根据正弦定理，

$$\frac{BC}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{AB}{\sin(90^\circ+\beta)},$$

所以

$$AB=\frac{BC\sin(90^\circ+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}=\frac{BC\cos\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

解 Rt△ABD，得

$$BD=AB\sin\angle BAD$$
$$=\frac{BC\cos\beta\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

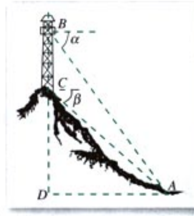


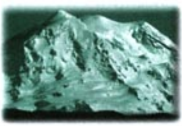
图 1.2-5

把测量数据代入上式，得

$$BD=\frac{27.3\cos 50^\circ1'\sin 54^\circ40'}{\sin(54^\circ40'-50^\circ1')}$$
$$=\frac{27.3\cos 50^\circ1'\sin 54^\circ40'}{\sin 4^\circ39'}$$
$$\approx 177(\text{m}).$$

$CD=BD-BC\approx 177-27.3\approx 150(\text{m})$.

答：山的高度约为 150 米．



例 5 如图 1.2-6，一辆汽车在一条水平的公路上向正东行驶，到 A 处时测得公路南侧远处一山顶 D 在东偏南 15° 的方向上，行驶 5 km 后到达 B 处，测得此山顶在东偏南 25°的方向上，仰角为 8°，求此山的高度 CD.

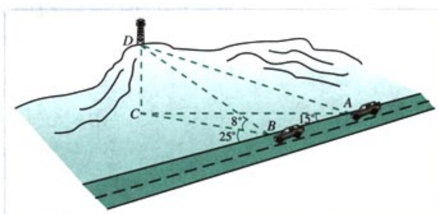


图 1.2-6

分析：要测出高 CD，只要测出高所在的直角三角形的另一条直角边或斜边的长．根据已知条件，可以计算出 BC 的长．

解：在△ABC 中，

$$\angle A=15^\circ,\ \angle C=25^\circ-15^\circ=10^\circ.$$

根据正弦定理，

$$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AB}{\sin C},$$

$$BC=\frac{AB\sin A}{\sin C}=\frac{5\sin 15^\circ}{\sin 10^\circ}$$

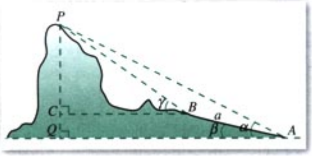
$$\approx 7.452\ 4(\text{km}).$$

$CD=BC\times\tan\angle DBC\approx BC\times\tan 8^\circ\approx 1\ 047(\text{m})$.

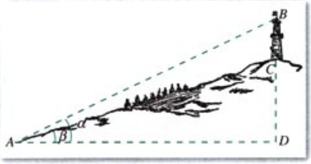
答：山的高度约为 1 047 米．

练 习

1. 如图，在山脚 A 测得山顶 P 的仰角为 α，沿倾斜角为 β 的斜坡向上走 a 米到 B，在 B 处测得山顶 P 的仰角为 γ，求证：山高 $h=\dfrac{a\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)}{\sin(\gamma-\alpha)}$.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 测山上石油钻井的井架 BC 的高，从山脚 A 测得 $AC=65.3$ m，塔顶 B 的仰角 α 是 $25^\circ25'$. 已知山坡的倾斜角是 $17^\circ38'$，求井架的高 BC.

3. 勘探队员朝一座山行进，在前后两处观察山顶的仰角分别是 29° 和 38°，两个观察点之间的距离是 200 m，求此山的高度.

（第 3 题）

下面是一个测量角度的问题.

例 6 如图 1.2-7，一艘海轮从 A 出发，沿北偏东 75° 的方向航行 67.5 n mile 后到达海岛 B，然后从 B 出发，沿北偏东 32° 的方向航行 54.0 n mile 后到达海岛 C. 如果下次航行直接从 A 出发到达 C，此船应该沿怎样的方向

航行，需要航行多少距离？（角度精确到 0.1°，距离精确到 0.01 n mile）

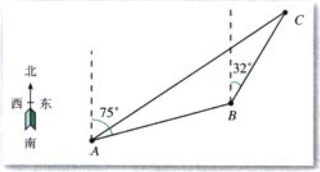


图 1.2-7

解：在△ABC 中，$\angle ABC=180°-75°+32°=137°$，根据余弦定理，

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2AB\times BC\times\cos\angle ABC}$$
$$=\sqrt{67.5^2+54.0^2-2\times 67.5\times 54.0\times\cos 137°}$$
$$\approx 113.15,$$

根据正弦定理，

$$\frac{BC}{\sin\angle CAB}=\frac{AC}{\sin\angle ABC},$$
$$\sin\angle CAB=\frac{BC\sin\angle ABC}{AC}$$
$$=\frac{54.0\sin 137°}{113.15}$$
$$\approx 0.325\ 5,$$

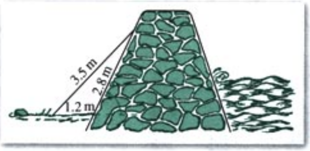
所以

$$\angle CAB=19.0°,$$
$$75°-\angle CAB=56.0°.$$

答：此船应该沿北偏东 56.1°的方向航行，需要航行 113.15 n mile.

练　习

3.5 m 长的棒斜靠在石堤旁，棒的一端在离堤足 1.2 m 地面上，另一端在沿堤上 2.8 m 的地方，求堤对地面的倾斜角 α.



借助于正弦定理和余弦定理，我们可以进一步解决一些有关三角形的计算问题.

在△ABC 中，边 BC，CA，AB 上的高分别记为 h_a，h_b，h_c，那么容易证明：

$$h_a=b\sin C=c\sin B,$$
$$h_b=c\sin A=a\sin C,$$
$$h_c=a\sin B=b\sin A.$$

根据三角形的面积公式 $S=\frac{1}{2}ah$，应用以上高的公式 $h_a=b\sin C$，可以推导出下面的三角形的面积公式：

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

同理：

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

$$S=\frac{1}{2}ca\sin B.$$

例 7 在△ABC 中，根据下列条件，求三角形的面积 S（精确到 0.1 cm^2）：

（1）已知 $a=14.8$ cm，$c=23.5$ cm，$B=148.5°$；

（2）已知 $B=62.7°$，$C=65.8°$，$b=3.16$ cm；

（3）已知三边的长分别为 $a=41.4$ cm，$b=27.3$ cm，$c=38.7$ cm.

解：（1）应用 $S=\frac{1}{2}ca\sin B$，得

$$S=\frac{1}{2}\times 23.5\times 14.8\times\sin 148.5°\approx 90.9(\text{cm}^2);$$

（2）根据正弦定理，

$$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B},$$

$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}b^2\frac{\sin C\sin A}{\sin B},$$

$$A=180°-(B+C)=180°-(62.7°+65.8°)$$
$$=51.5°,$$

$$S=\frac{1}{2}\times 3.16^2\times\frac{\sin 65.8°\ \sin 51.5°}{\sin 62.7°}\approx 4.0(\text{cm}^2);$$

(3) 根据余弦定理的推论，得

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{38.7^2+41.4^2-27.3^2}{2\times 38.7\times 41.4}$$

$$\approx 0.769\ 7,$$

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}\approx\sqrt{1-0.769\ 7^2}\approx 0.638\ 4.$$

应用 $S=\frac{1}{2}ca\sin B$，得

$$S\approx\frac{1}{2}\times 38.7\times 41.4\times 0.638\ 4\approx 511.4\ (\text{cm}^2).$$

例 8 如图 1.2-8，在某市进行城市环境建设中，要把一个三角形的区域改造成市内公园，经过测量得到这个三角形区域的三条边长分别为 68 m，88 m，127m，这个区域的面积是多少？（精确到 0.1 cm²）

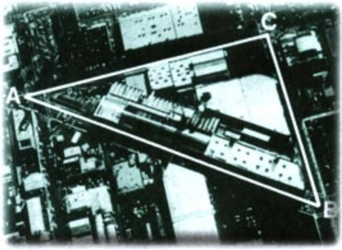


图 1.2-8

解：设 $a=68$ m，$b=88$ m，$c=127$ m，根据余弦定理的推论，

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$=\frac{127^2+68^2-88^2}{2\times 127\times 68}$$

$$\approx 0.753\ 2,$$

$$\sin B=\sqrt{1-0.753\ 2^2}\approx 0.657\ 8.$$

应用 $S=\frac{1}{2}ca\sin B$，得

$$S\approx\frac{1}{2}\times127\times68\times0.657\,8\approx2\,840.38\ (\mathrm{m}^2).$$

答：这个区域的面积是 2 840.38 m^2.

例 9 在$\triangle ABC$中，求证：

(1) $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{\sin^2A+\sin^2B}{\sin^2C}$；

(2) $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$.

证明：(1) 根据正弦定理，可设

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=k,$$

显然 $k\neq0$，所以

$$\text{左边}=\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{k^2\sin^2A+k^2\sin^2B}{k^2\sin^2C}$$
$$=\frac{\sin^2A+\sin^2B}{\sin^2C}=\text{右边}.$$

(2) 根据余弦定理的推论，

$$\text{右边}=2\left(bc\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+ca\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+ab\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$
$$=(b^2+c^2-a^2)+(c^2+a^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)$$
$$=a^2+b^2+c^2=\text{左边}.$$

练 习

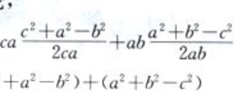
1. 在$\triangle ABC$中，根据下列条件，求三角形的面积 S（精确到 1 cm^2）：

   (1) 已知 $a=18$ cm，$c=25$ cm，$B=48.5^\circ$；

   (2) 已知 $B=52.8^\circ$，$C=75.8^\circ$，$b=16$ cm；

   (3) 已知三边的长分别为 $a=44$ cm，$b=23$ cm，$c=37$ cm.

2. 有一块四边形土地的形状如图所示，它的三条边的长分别是 50 m，60 m，70 m，两个内角是 127°和 132°，求四边形的面积（精确到 0.1 m^2）.



（第 2 题）

3. 在$\triangle ABC$中，求证：

(1) $\dfrac{a+b}{b-c}=\dfrac{\tan\dfrac{A+B}{2}}{\tan\dfrac{A-B}{2}}$；

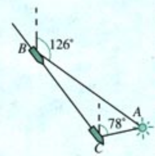
(2) $a=b\cos C+c\cos B$，

$b=c\cos A+a\cos C$，

$c=a\cos B+b\cos A$.

习题1.2

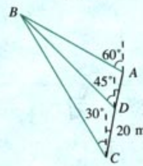
A 组



（第 1 题）

1. 如图，货轮在海上以 35 n mile/h 的速度沿着方位角（从指北方向顺时针转到目标方向线的水平角）为 148°的方向航行．为了确定船位，在 B 点观察灯塔 A 的方位角是 126°，航行半小时后到达 C 点，观察灯塔 A 的方位角是 78°．求货轮到达 C 点时与灯塔 A 的距离（精确到1 n mile）.

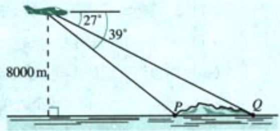
2. 轮船 A 和轮船 B 在中午 12 时离开海港 C，两艘轮船的航行方向之间的夹角为 120°，轮船 A 的航行速度是 25 n mile/h，轮船 B 的航行速度是 15 n mile/h，下午 2 时两船之间的距离是多少？



（第 3 题）

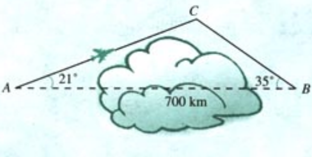
3. 如图，已知一艘船以 30 n mile/h 的速度往北偏东 10°的 A 岛行驶，计划到达 A 岛后停留 10 min 后继续驶往 B 岛，B 岛在 A 岛 的北偏西 60°的方向上．船到达 C 处时是上午 10 时整，此时测得 B 岛在北偏西 30°的方向，经过 20 min 到达 D 处，测得 B 岛在北偏西 45°的方向，如果一切正常的话，此船何时能到达 B 岛？

4. 一架飞机在海拔 8 000 m 的高度飞行，在空中测出前下方海岛两侧海岸俯角分别是 27°和 39°，计算这个海岛的宽度.



（第 4 题）

5. 一架飞机从 A 地飞到 B 地，两地相距 700 km. 飞行员为了避开某一区域的雷雨云层，从机场起飞以后，就沿与原来的飞行方向成 21°角的方向飞行，飞行到中途，再沿与原来的飞行方向成 35°角的方向继续飞行直到终点. 这样飞机的飞行路程比原来的路程 700 km 远了多少？

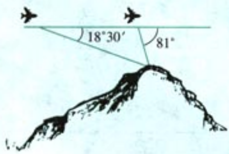


（第 5 题）

6. A、B 两地相距 2 558 m，从 A、B 两处发出的两束探照灯光照射在上方一架飞机的机身上（如图），飞机离两个探照灯的距离是多少？飞机的高度是多少？

（第 6 题）

7. 飞机的航线和山顶在同一个铅垂平面内，已知飞机的高度为海拔 20 250 m，速度为 1 000 km/h，飞行员先看到山顶的俯角为 $18^\circ30'$，经过 150 s 后又看到山顶的俯角为 81°，求山顶的海拔高度（精确到 1 m）.



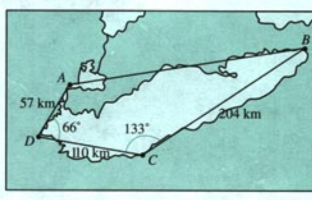
（第 7 题）

（第 8 题）

8. 为测量某塔的高度，在 A、B 两点进行测量的数据如图所示，求塔的高度.

9. 一架侦察机在海拔 5 000 m 的高空飞行，观测到一艘潜艇的方位角是 82°，俯角是 23°，一艘货轮的方位角是 145°，俯角是 64°. 潜艇与货轮之间的距离是多少？

10. 一架飞机以 326 km/h 的速度，沿北偏东 75°的航向从城市 A 出发向城市 B 飞行，18 min 以后，飞机由于天气原因按命令改飞另一个城市 C，问收到命令时飞机应该沿什么航向飞行，此时离城市 C 的距离是多少？



（第 10 题）

11. 同步通讯卫星在赤道上空 35 800 km 的轨道上，它每 24 小时绕地球一周，所以它定位于赤道上某一点的上空. 如果此点与北京在同一条子午线上，北京的纬度是北纬 $39^\circ54'$，求在北京观察此卫星的仰角（取地球半径是 6 400 km）？

12. 在$\triangle ABC$ 中，根据下列条件，求三角形的面积 S（精确到 1 cm^2）：

(1) 已知 $a=28$ cm，$c=33$ cm，$B=45°$；

(2) 已知 $A=32.8°$，$C=66.5°$，$a=36$ cm；

(3) 已知三边的长分别为 $a=54$ cm，$b=61$ cm，$c=71$ cm.

13. 求半径是 R 的圆内接正 n 边形的面积.

14. 三角形$\triangle ABC$的三边分别为 a、b、c，边 BC、CA、AB 上的中线分别记为 m_a、m_b、m_c，应用余弦定理证明：

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2},\qquad m_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2},$$

$$m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}.$$

15. 在$\triangle ABC$中，求证：$c(a\cos B-b\cos A)=a^2-b^2$.

B 组

1. 证明三角形的面积公式

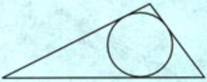
$$S=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A}.$$

2. 已知三角形的三边为 a、b、c，设 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，求证：

(1) 三角形的面积 $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$；

(2) r 为三角形的内切圆半径，则

$$r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}};$$



(第 2 (2) 题)

(3) 把边 BC、CA 、AB 上的高分别记为 h_a、h_b、h_c，则

$$h_a=\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_b=\frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$h_c=\frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

海伦和秦九韶

古希腊的数学发展到亚历山大里亚时期，数学的应用性得到了很大的发展，其突出的一点就是三角术的发展. 三角术是由于人们想建立定量的天文学，以便用来预报天体的运行路线和位置以帮助报时，计算日历，航海和研究地理而产生的.

在解三角形的问题中，其中一个比较困难的问题是如何由三角形的三边 a、b、c 直接求出三角形的面积. 据说这个问题最早是由古希腊数学家阿基米德解决的，他得到了公式

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}，这里\ p=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

但现在人们常常以古希腊的数学家海伦（Heron）命名这个公式，称此公式为海伦公式，因为这个公式最早出现在海伦的著作《测地术》中，并在海伦的著作《测量仪器》和《度量术》中给出证明. 海伦公式的特点是形式漂亮，便于记忆.

海伦是古希腊的数学家，他还是一位优秀的测绘工程师，生活的年代大约是一世纪. 他的代表作是《度量术》，讨论平面图形的面积、立体图形的体积以及把图形分成比例部分.《测量仪器》是他的另一本代表作，其中描述的一种仪器，功能相当于现代的经纬仪. 在此书中他还讨论许多测量的问题，如怎样挖隧道，从山的两侧开始，找准方向，使隧道准确会合；确定两点间高度的差；测量可望不可即的两点之间的距离；还有各种高度和距离的测量问题. 我国南宋著名数学家秦九韶（约 1202—1261）也发现了与它等价的从三角形三边求面积的公式，他把这种方法称为“三斜求积”. 在他的著作《数书九章》卷五“田域类”里有一个题目：“问有沙田一段，有三斜. 其小斜一十三里，中斜一十四里，大斜一十五里. 里法三百步. 欲知为田几何.”这道题实际上就是已知三角形的三边长，求三角形的面积.《数书九章》中的求法是：“以小斜幂并大斜幂减中斜幂，余半之，自乘于上. 以小斜幂乘大斜幂减上，余四约之，为实. 一为从隅，开平方得积.”如果把以上这段文字写成公式，就是

$$S=\sqrt{\frac{1}{4}\left\{c^2a^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2}\right)^2\right\}}.$$

秦九韶独立推出了“三斜求积”公式，它虽然与海伦公式形式上不一样，但两者是完全等价的，实质是一样的，它填补了我国传统数学的一个空白，从中可以看到我国古代已具有很高的数学水平.

秦九韶是我国古代数学家的杰出代表之一，他的《数书九章》概括了宋元时期中国传统数学的主要成就，尤其是系统总结和发展了高次方程的数值解法与一次同余问题的解法，提出了相当完备的“正负开方术”和“大衍求一术”，对数学发展产生了广泛的影响. 秦九韶是一位既重视理论又重视实践，既善于继承又勇于创新的数学家，他被国外科学史家称为是“他那个民族，那个时代，并且确实也是所有时代最伟大的数学家之一”.

1.3 实 习 作 业

根据实际需要，利用本章所学的知识做一个有关测量的实习作业，并写出实习报告.

实 习 报 告

测量问题	
附　　图	
测量工具	
测得数据	
计　　算	
负责人及参加者	
计算者及复核者	
指导教师审核意见	

小　结

一、本章知识结构

二、回顾与思考

1. 本章学习了两个在解三角形中起重要作用的定理，就是

（1）正弦定理　在一个三角形中，各边和它所对角的正弦的比相等，即

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

（2）余弦定理　三角形中任何一边的平方等于其他两边的平方的和减去这两边与它们的夹角的余弦的积的两倍. 即

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

联系初中所学的有关三角形的知识，正弦定理和余弦定理分别是哪些知识的进一步深化？

2. 从三角形的已知元素求出三角形的未知元素的过程，就是解三角形. 解三角形常常借助于正弦定理和余弦定理.

在解三角形中应用两个定理要注意些什么问题？

3. 解三角形知识的产生主要受到天文测量、航海测量、地理测量等实践活动的推动.

本章中解三角形的知识主要应用于怎样的一些问题？

4. 从初中到高中，我们研究过怎样一些测量河流宽度和物体高度的的方法？它们的适用范围有哪些不同？

复习参考题

A 组

1. 在△ABC 中，已知下列条件，解出三角形（角度精确到 $1'$，边长精确到 0.01 cm）：

   (1) $a=12$ cm，$b=5$ cm，$A=120^\circ$；　　(2) $a=6$ cm，$b=8$ cm，$A=30^\circ$；

   (3) $a=7$ cm，$b=23$ cm，$C=130^\circ$；　　(4) $b=14$ cm，$c=10$ cm，$A=145^\circ$；

   (5) $a=32$ cm，$c=23$ cm，$B=152^\circ$；　　(6) $a=2$ cm，$b=3$ cm，$c=4$ cm；

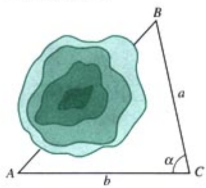
   (7) $a=7$ cm，$b=2$ cm，$c=8$ cm.

2. 海中一小岛，周围 3.8 n mile 内有暗礁. 海轮由西向东航行，望见这岛在北偏东 75°. 航行 8 n mile 以后，望见这岛在北偏东 60°. 如果这艘海轮不改变航向继续前进，有没有触礁的危险？

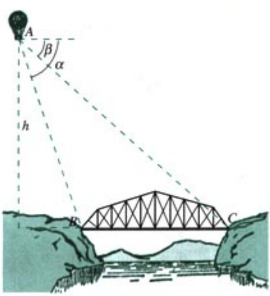
3. 如图，在铁路建设中需要确定隧道的长度和隧道两端的施工方向. 已测得隧道两端的两点 A、B 到某一点 C 的距离 a，b 及 $\angle ACB=\alpha$，求 A、B 两点之间的距离，以及 $\angle ABC$、$\angle BAC$.

4. 设计一种借助于两个观察点 A、B（已知两观察点之间的距离）测量航船 C 的航向与速度的方法.

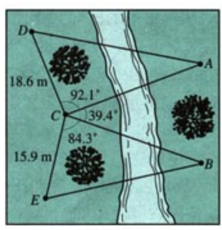
5. 如图，从气球 A 上测得正前方的河流的两岸 B，C 的俯角分别为 α，β. 如果这时气球的高是 h，求河流的宽度 BC.



（第 3 题）



（第 5 题）



（第 6 题）

6. 如图，为了测量河对岸 A、B 两点之间的距离，观察者找到一个点 C，从 C 点可以观察到点 A、B；找到一个点 D，从 D 点可以观察到点 A、C；找到一个点 E，从 E 点可以观察 B、C. 并测量得到图中的一些数据，此外，$\angle CDA=72.3^\circ$，$\angle CEB=64.7^\circ$. 求出 A、B 两点之间的距离.

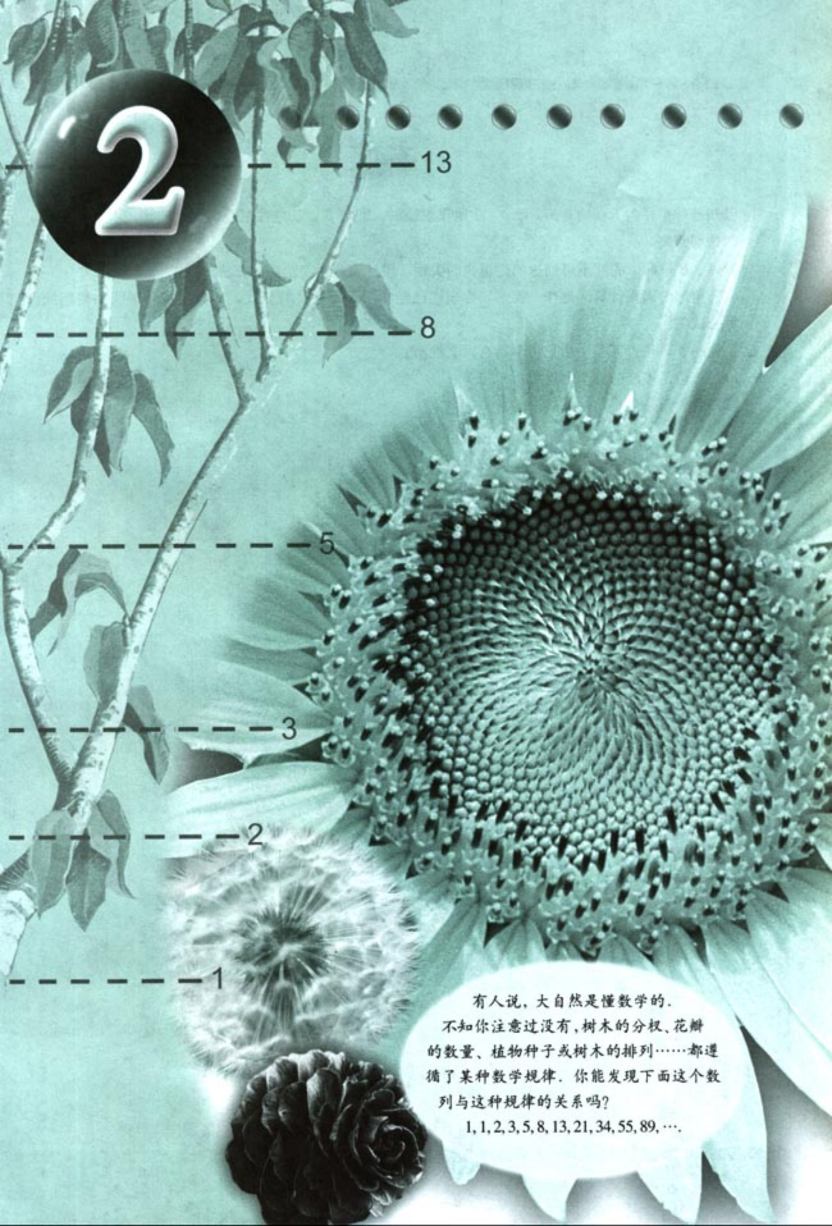
7. 如果你在海上航行，请设计一种测量海上两个小岛之间距离的方法.

B 组

1. 已知地球半径为 R（约 6 371 km），A 地在东经 α_1，北纬 β_1，B 地在东经 α_2，北纬 β_2，求这两地之间的球面距离.
2. 设 A、B 是两个底部不可到达的建筑物的尖顶，设计测量两者距离的方法.
3. 就三角形的面积计算问题作一探索，你现在已经学习了哪些计算公式，还可发现和证明一些新的计算公式吗?
4. 研究一下，是否存在一个三角形具有以下性质：

   (1) 三边是连续的三个自然数；

   (2) 最大角是最小角的 2 倍.



有人说，大自然是懂数学的．不知你注意过没有，树木的分杈、花瓣的数量、植物种子或树木的排列……都遵循了某种数学规律．你能发现下面这个数列与这种规律的关系吗？

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ⋯.

第二章

数列

人们对数列的研究有的源于现实生产、生活的需要，也有的出自对数的喜爱.

数是刻画静态下物体的量，例如一棵树在某一时刻的高度是2 m．如果在每年的同一时刻都记录下这棵树的高度，并按自然顺序排列起来，就得到一列数．像这样，按一定顺序排列着的一列数称为数列．数列可以看成定义在正整数集或其有限子集上的函数，它是刻画离散过程的重要数学模型.

在日常生活中，人们经常遇到的像存款利息、购房贷款等实际计算问题，都需要用有关数列的知识来解决．数列的知识也是我们将来学习高等数学的基础.

在本章中，我们将学习一般数列的概念和简单表示方法，并将研究两类特殊的数列——等差数列和等比数列，解决与这些数列相关的一些问题，了解它们在实际生活中的应用.

2.1 数列的概念与简单表示法

传说古希腊毕达哥拉斯（Pythagoras，约公元前 570 年—约公元前 500 年）学派的数学家经常在沙滩上研究数学问题，他们在沙滩上画点或用小石子来表示数．比如，他们研究过 1，3，6，10，….

图 2.1-1

由于这些数都能够表示成三角形（图 2.1-1），他们就将其称为三角形数．类似地，1，4，9，16，…等被称为正方形数，因为这些数能够表示成正方形（图 2.1-2）.

图 2.1-2

像这样，按照一定顺序排列着的一列数称为**数列**（sequence of number），数列中的每一个数叫做这个数列的**项**．数列中的每一项都和它的序号有关，排在第一位的数称为这个数列的第 1 项（通常也叫做**首项**），排在第二位的数称为这个数列的第 2 项……排在第 n 位的数称为这个数列的第 n 项．所以，数列的一般形式可以写成

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots,$$

简记为$\{a_n\}$．项数有限的数列叫做**有穷数列**，项数无限的数列叫做**无穷数列**.

我们还可以按照数列的每一项随序号变化的情况对数列进行分类．从第 2 项起，每一项都不小于它的前一项的数列叫做递增数列；从第 2 项起，每一项都不大于它的前一项的数列叫做递减数列；各项相等的数列叫做常数列；从第 2 项

起，有些项大于它的前一项，有些项小于它的前一项的数列叫做摆动数列.

观察

下面的数列，哪些是递增数列、递减数列、常数列、摆动数列？

(1) 全体自然数构成数列

$$0，1，2，3，\cdots.$$

(2) 1996～2002 年某市普通高中生人数（单位：万人）构成数列

82，93，105，119，129，130，132.

(3) 无穷多个 3 构成数列

3，3，3，3，….

(4) 目前通用的人民币面额按从大到小的顺序构成数列（单位：元）

100，50，20，10，5，2，1，0.5，0.2，0.1，0.05，0.02，0.01.

(5) -1 的 1 次幂，2 次幂，3 次幂，4 次幂……构成数列

-1，1，-1，1，….

(6) $\sqrt{2}$的精确到 1，0.1，0.01，0.001，…，的不足近似值与过剩近似值分别构成数列

1，1.4，1.41，1.414，…；

2，1.5，1.42，1.415，….

数列可以看成以正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集$\{1，2，\cdots，n\}$）为定义域的函数 $a_n=f(n)$，当自变量按照从小到大的顺序依次取值时，所对应的一列函数值（图 2.1-3）. 反过来，对于函数 $y=f(x)$，如果 $f(i)$（$i=1，2，3，\cdots$）有意义，那么我们可以得到一个数列

$$f(1)，f(2)，f(3)，\cdots，f(n)，\cdots.$$

函数 $y=7x+9$ 与 $y=3^x$，当 x 依次取 1，2，3，…时，其函数值构成的数列各有什么特点？

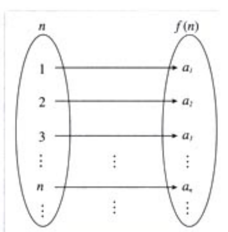


图 2.1-3

如果数列$\{a_n\}$的第n项与序号n之间的关系可以用一个公式来表示，那么这个公式叫做这个数列的通项公式. 我们可以根据数列的通项公式写出数列.

思考？

通项公式可以看成数列的函数解析式. 利用一个数列的通项公式，你能确定这个数列哪些方面的性质？

根据数列的前若干项写出的通项公式的形式唯一吗？请举例说明.

例 1　写出下面数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) 1，$-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{4}$；

(2) 2，0，2，0.

解：(1) 这个数列的前 4 项的绝对值都是序号的倒数，并且奇数项为正，偶数项为负，所以，它的一个通项公式为

$$a_n=\frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

(2) 这个数列的前 4 项构成一个摆动数列，奇数项是 2，偶数项是 0，所以，它的一个通项公式为

$$a_n=(-1)^{n+1}+1.$$

与函数一样，数列也可以用图象、列表等方法来表示. 数列的图象是一系列孤立的点. 例如，全体正偶数按从小到大的顺序构成数列

$$2，4，6，\cdots，2n，\cdots.$$

这个数列还可以用列表和图象分别表示在表 2-1 和图 2.1-4 中.

表 2-1

n	1	2	3	$\cdots$	k	$\cdots$
a_n	2	4	6	$\cdots$	$2k$	$\cdots$

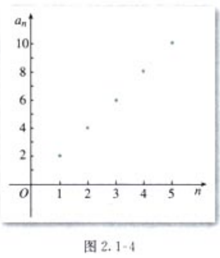


图 2.1-4

例 2 图2.1-5 中的三角形称为希尔宾斯基（Sierpinski）三角形. 在下图 4 个三角形中，着色三角形的个数依次构成一个数列的前 4 项，请写出这个数列的一个通项公式，并在直角坐标系中画出它的图象.

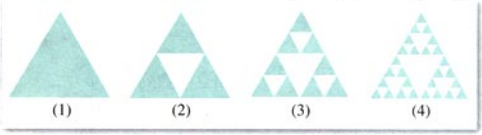


图 2.1-5

解： 如图，这 4 个三角形中着色三角形的个数依次为 1，3，9，27. 则所求数列的前 4 项都是 3 的指数幂，指数为序号减 1. 所以，这个数列的一个通项公式是

$$a_n=3^{n-1}.$$

在直角坐标系中的图象见图 2.1-6.

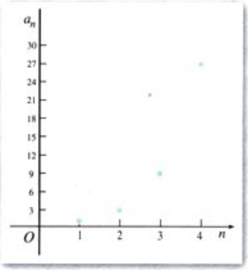


图 2.1-6

如果一个数列$\{a_n\}$的首项 $a_1=1$，从第 2 项起每一项等于它的前一项的 2 倍再加 1，即

$$a_n=2a_{n-1}+1\ (n>1),$$

那么

$$a_2=2a_1+1=3,$$
$$a_3=2a_2+1=7,$$
$$\cdots$$

像这样给出数列的方法叫做递推法，其中

$$a_n=2a_{n-1}+1\ (n>1)$$

称为递推公式. 递推公式也是数列的一种表示方法.

一个数列的递推公式的表示形式唯一吗? 请举例说明.

例 3 设数列$\{a_n\}$满足

$$\begin{cases}a_1=1,\\ a_n=1+\dfrac{1}{a_{n-1}}\ (n>1).\end{cases}$$

写出这个数列的前 5 项.

解: 由题意可知

$$a_1=1,$$

$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{1}=2,$$

$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

$$a_4=1+\frac{1}{a_3}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3},$$

$$a_5=1+\frac{1}{a_4}=1+\frac{3}{5}=\frac{8}{5}.$$

练习

1. 根据数列的通项公式填表:

n	1	2	…	5	…		…	n
a_n			…		…	153	…	$3(3+4n)$

2. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}^2-1(n>1)$, 写出它的前 5 项.
3. 分别就例 1 中的两个数列写出与其解答不同的一个通项公式.
4. 数列的前 5 项分别是以下各数, 写出各数列的一个通项公式:

(1) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$;

(2) $-\frac{1}{2\times1}, \frac{1}{2\times2}, -\frac{1}{2\times3}, \frac{1}{2\times4}, -\frac{1}{2\times5}$;

(3) $1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{1}{4}$.

5. 本节“观察”中的七个数列是否有通项公式? 如果有, 请写出来.

斐波那契数列

1202 年，意大利数学家斐波那契（Leonardo Fibonacci，约 1170—1250）出版了他的《算盘全书（Liber Abacci）》．他在书中提出了一个关于兔子繁殖的问题：

如果一对兔子每月能生 1 对小兔子（一雄一雌），而每 1 对小兔子在它出生后的第三个月里，又能生 1 对小兔子．假定在不发生死亡的情况下，由 1 对初生的小兔子开始，50 个月后会有多少对兔子？

在第 1 个月时，只有 1 对小兔子，过了 1 个月，那对兔子成熟了，在第 3 个月时便生下 1 对小兔子，这时有两对兔子．再过 1 个月，成熟的兔子再生 1 对小兔子，而另 1 对小兔子长大，有 3 对小兔子．如此推算下去，我们可以得到一个表格：

时间（月）	初生兔子（对）	成熟兔子（对）	兔子总数（对）
1	1	0	1
2	0	1	1
3	1	1	2
4	1	2	3
5	2	3	5
6	3	5	8
7	5	8	13
8	8	13	21
9	13	21	34
10	21	34	55

由此可知，从第 1 个月开始，以后每个月的兔子总对数是

$$1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，233，\cdots.$$

你发现这个数列的规律了吗？

如果用 F_n 表示第 n 个月的兔子的总对数，可以看出，

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}.$$

这是一个由递推关系给出的数列，称为斐波那契数列．

斐波那契数列是从动物的繁殖问题引出的，但人们在研究它的过程中，发现了许多意

想不到的结果．例如，章前图中的树苗在第一年长出一条新枝，新枝成长一年后变为老枝，老枝每年都长出一条新枝．每一条树枝都按照这个规律成长，则每年的分枝数正好构成了斐波那契数列．又如带小花的大向日葵的管状小花排列成两组交错的螺旋，通常顺时针的螺旋有 34 条，逆时针的螺旋有 55 条，恰为斐波契数列的相邻两项，这样的螺旋被称为“斐波那契螺旋”．蒲公英和松塔就是以“斐波那契螺旋”的形式排列种子或鳞片的．再如很多花朵的瓣数恰是斐波那契数列中的数，如梅花 5 瓣，飞燕草 8 瓣，万寿菊 13 瓣，紫宛 21 瓣，大多数雏菊都是 34 瓣、55 瓣或 89 瓣．

斐波那契数列还有很多有趣的性质，在实际生活中也有广泛的应用．美国还于 1963 年以《斐波那契季刊》为名创刊了一份数学杂志，用于专门刊登关于数列的研究论文．

有兴趣的同学可以通过浏览互联网或查阅相关书籍搜集资料，进一步了解和研究斐波那契数列．

习题2.1

A 组

1. 分别写出下面的数列：

(1) 0～20 之间的质数按从小到大的顺序构成的数列；

(2) 0～20 之间的合数的正的平方根按从小到大的顺序构成的数列；

(3) $\sqrt{3}$精确到 1，10^{-1}，10^{-2}，10^{-3}，…，10^{-6}的不足近似值与过剩近似值分别构成的数列．

2. 根据下面数列$\{a_n\}$的通项公式，写出它的前 5 项：

(1) $a_n=\frac{1}{n^2}$；　　(2) $a_n=(-1)^{n+1}(n^2+1)$．

3. 观察下面数列的特点，用适当的数填空，并写出各数列的一个通项公式：

(1) (　)，-4，9，(　)，25，(　)，49；

(2) 1，$\sqrt{2}$，(　)，2，$\sqrt{5}$，(　)，$\sqrt{7}$．

4. 写出下面数列$\{a_n\}$的前 5 项：

(1) $a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=4a_{n-1}+1$ $(n>1)$；

(2) $a_1=-\frac{1}{4}$，$a_n=1-\frac{1}{a_{n-1}}$ $(n>1)$．

5. 根据下面的图形及相应的点数，在空格和括号中分别填上适当的图形和点数，并写出点数构成的数列的一个通项公式.

1　　6　　11　　______　　______；

　　　　　　　　( )　　( )

1　　4　　7　　______　　______；

　　　　　　　　( )　　( )

3　　8　　15　　______　　______.

　　　　　　　　( )　　( )

6. 分别写出三角形数构成的数列的第 5 项，第 6 项和第 7 项，并写出它的一个递推公式.

B 组

1. 下图中的三个正方形块中，着色正方形的个数依次构成一个数列的前 3 项. 请写出这个数列的一个通项公式，并在直角坐标系中画出它的图象.

2. 中国银行人民币活期存款年利率为 0.72%. 假设某人存入 10 万元人民币后，既不加进存款也不取钱. 如果不考虑利息税，用 a_n 表示第 n 年到期时的存款余额，求 a_1，a_2，a_3 及 a_n.
3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的第 1 项是 1，第 2 项是 2，以后各项由 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$ $(n>2)$ 给出.

   (1) 写出这个数列的前 5 项；

   (2) 利用上面的数列 $\{a_n\}$，通过公式 $b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 构造一个新的数列 $\{b_n\}$，试写出数列 $\{b_n\}$ 的前 5 项.
4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=5$，$a_2=2$，$a_n=2a_{n-1}+3a_{n-2}$ $(n\geqslant 3)$，对于这个数列的通项公式作一研究，能否写出它的通项公式？

信息技术应用

估计$\sqrt{2}$的值

我们知道，边长为 1 个单位长度的正方形的对角线长是$\sqrt{2}$. 据说，最早发现并证明$\sqrt{2}$是无理数的，就是本节开始提到的毕达哥拉斯学派的数学家. 但无理数的发现直接触犯了毕氏学派的根本信条——“万物皆(整)数与(整)数之比”，从而引发了第一次数学危机.

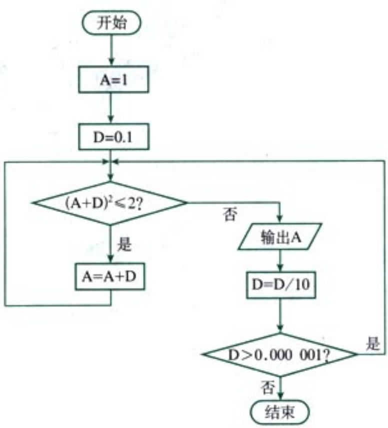
为了得到$\sqrt{2}$的更为精确的近似值，历史上出现过许多估计$\sqrt{2}$的方法. 例如，可以用$\sqrt{2}$的不足近似值来估计它的大小. 当依次取定精确度 1，0.1，0.01，0.001，…时，$\sqrt{2}$的不足近似值构成无穷数列

$$1，1.4，1.41，1.414，\cdots. \qquad ①$$

容易看出，这个数列中的项随着序号的增加逐渐接近$\sqrt{2}$，那么我们就可以用这个数列来“逼近”$\sqrt{2}$了.

下面的程序框图就是用来输出数列①的，请你将它转换为程序语句.

你还能想到其他估计$\sqrt{2}$的方法吗？请分别用程序框图和程序语句表达你的算法，并和同学交流一下.



2.2 等差数列

> 从特殊入手，研究数学对象的性质，再逐步扩展到一般，这是数学常用的研究方法.

我们在初中学习了实数，研究了它的一些运算与性质（如加、减、乘、除运算，能被 3，5，7 整除的数的特征等）. 现在，我们面对数列（一列数），能不能也像研究实数一样，研究它的项与项之间的关系，运算与性质呢？

为此，我们先从一些特殊的数列入手来研究这些问题.

在现实生活中，我们会遇到下面的特殊数列.

我们经常这样数数，从 0 开始，每隔 5 数一次，可以得到数列：

$$0,\ 5,\ \underline{\qquad},\ \underline{\qquad},\ \underline{\qquad},\ \underline{\qquad},\ \cdots. \qquad ①$$

2000 年，在澳大利亚悉尼举行的奥运会上，女子举重被正式列为比赛项目. 该项目共设置了 7 个级别，其中较轻的 4 个级别体重组成数列（单位：kg）：

$$48,\ 53,\ 58,\ 63. \qquad ②$$

水库的管理人员为了保证优质鱼类有良好的生活环境，用定期放水清库的办法清理水库中的杂鱼. 如果一个水库的水位为 18 m，自然放水每天水位降低 2.5 m，最低降至5 m. 那么从开始放水算起，到可以进行清理工作的那天，水库每天的水位组成数列（单位：m）：

$$18,\ 15.5,\ 13,\ 10.5,\ 8,\ 5.5. \qquad ③$$

我国现行储蓄制度规定银行支付存款利息的方式为单利，即不把利息加入本金计算下一期的利息. 按照单利计算本利和的公式是：

本利和＝本金×（1＋利率×存期）.

例如，按活期存入 10 000 元钱，年利率是 0.72%，那么按照单利，5 年内各年末的本利和分别是：

时间	年初本金（元）	年末本利和❶（元）
第 1 年	10 000	10 072
第 2 年	10 000	10 144
第 3 年	10 000	10 216
第 4 年	10 000	10 288
第 5 年	10 000	10 360

❶ 假设 5 年既不加进存款也不取款，且不扣除利息税.

各年末的本利和（单位：元）组成了数列：

$$10\,072,\ 10\,144,\ 10\,216,\ 10\,288,\ 10\,360. \qquad ④$$

观察

上面的数列①、②、③、④有什么共同特点？

可以看到：

对于数列①，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于______；

对于数列②，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于______；

对于数列③，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于______；

对于数列④，从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于______.

也就是说，这些数列有一个共同特点：从第 2 项起，每一项与前一项的差都等于同一常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的差等于同一个常数，那么这个数列就叫做**等差数列**(arithmetic sequence)❷，这个常数叫做等差数列的**公差**(common difference)，公差通常用字母 d 表示.

❷ 一些教科书把等差数列的英文缩写记作 A.P.(Arithmetic Progression).

上面的四个数列都是等差数列，公差依次是______，______，______，______.

日常生活中，人们常常用到等差数列. 例如，在给各种产品的尺寸划分级别时，当其中的最大尺寸与最小尺寸相差不大时，常按等差数列进行分级（如衬衫的尺码）. 你能举

出一些例子吗？

由三个数 a，A，b 组成的等差数列可以看成最简单的等差数列．这时，A 叫做 a 与 b 的**等差中项**（arithmetic mean）．

你能用 a 与 b 表示 A 吗？

如同我们在前一节看到的，能否确定一个数列的通项公式对研究这个数列有重要的意义．

思考

数列①、②、③、④的通项公式存在吗？如果存在，分别是什么？

一般地，如果等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1，公差是 d，我们根据等差数列的定义，可以得到

$$a_2-a_1=d,\ a_3-a_2=d,\ a_4-a_3=d,\ \cdots.$$

所以

$$a_2=a_1+d,$$
$$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d,$$
$$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d,$$
……

由此，请你填空完成下面等差数列的以下通项公式

$$\boxed{a_n=a_1+(\qquad)d.}$$

对所有的 $n\in\mathbf{N}^*$，这个等式都能成立吗？

例 1　（1）求等差数列 8，5，2，…的第 20 项．

（2）-401 是不是等差数列 -5，-9，-13，…的项？如果是，是第几项？

解：（1）由 $a_1=8$，$d=5-8=-3$，$n=20$，得

$$a_{20}=8+(21-1)\times(-3)=-49.$$

（2）由 $a_1=-5$，$d=-9-(-5)=-4$，得这个数列的通项公式为

$$a_n=-5-4(n-1)=-4n-1.$$

由题意知，本题是要回答是否存在正整数 n，使得

$$-401=-4n-1$$

成立．解这个关于 n 的方程，得 $n=100$，即 -401 是这个数列的第 100 项．

例 2　某市出租车的计价标准为 1.2 元/km，起步价为 10 元，即最初的 4 km（不含 4 千米）计费 10 元. 如果某人乘坐该市的出租车去往 14 km 处的目的地，且一路畅通，等候时间为 0，需要支付多少车费？

解：根据题意，当该市出租车的行程大于或等于 4 km 时，每增加 1 km，乘客需要支付 1.2 元. 所以，我们可以建立一个等差数列 $\{a_n\}$ 来计算车费.

令 $a_1=11.2$，表示 4 km 处的车费，公差 $d=1.2$. 那么，当出租车行至 14 km 处时，$n=11$，此时需要支付车费

$$a_{11}=11.2+(11-1)\times1.2=23.2\ (元).$$

答：需要支付车费 23.2 元.

例 2 对出租车收费方法作了简化. 有兴趣的同学可以调查一下出租车计费的真实情况.

例 3　已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=pn+q$，其中 p，q 为常数，且 $p\neq0$，那么这个数列一定是等差数列吗？

分析：判定 $\{a_n\}$ 是不是等差数列，可以利用等差数列的定义，也就是看 a_n-a_{n-1}（$n>1$）是不是一个与 n 无关的常数.

解：取数列 $\{a_n\}$ 中的任意相邻两项 a_n 与 a_{n-1}（$n>1$），求差得

$$\begin{aligned}a_n-a_{n-1}&=(pn+q)-[p(n-1)+q]\\&=pn+q-(pn-p+q)\\&=p.\end{aligned}$$

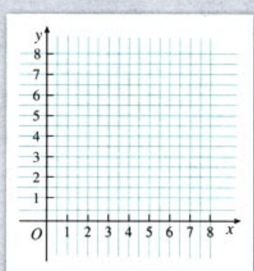
它是一个与 n 无关的数. 所以 $\{a_n\}$ 是等差数列.

这个等差数列的首项与公差分别是多少？

探究

(1) 在直角坐标系中，画出通项公式为 $a_n=3n-5$ 的数列的图象. 这个图象有什么特点？

(2) 在同一个直角坐标系中，画出函数 $y=3x-5$ 的图象. 你发现了什么？据此说一说等差数列 $a_n=pn+q$ 的图象与一次函数 $y=px+q$ 的图象之间有什么关系.



练　习

1. 已知$\{a_n\}$是一个等差数列，请在下表中填入适当的数.

a_1	a_3	a_5	a_7	d
-7		8		
	2			-6.5

(第 2 题)

2. 体育场一角的看台的座位是这样排列的：第一排有 15 个座位，从第二排起每一排都比前一排多 2 个座位. 你能用 a_n 表示第 n 排的座位数吗？第 10 排能坐多少个人？

3. 等差数列$\{a_n\}$的首项为 a，公差为 d；等差数列$\{b_n\}$的首项为 b，公差为 e. 如果 $c_n=a_n+b_n$ $(n\geqslant 1)$，且 $c_1=4$，$c_2=8$，求数列$\{c_n\}$的通项公式.

4. 已知一个无穷等差数列$\{a_n\}$的首项为 a_1，公差为 d.

   (1) 将数列中的前 m 项去掉，其余各项组成一个新的数列，这个新数列是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别是多少？

   (2) 取出数列中的所有奇数项，组成一个新的数列，这个新数列是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别是多少？

   (3) 如果取出数列中所有序号为 7 的倍数的项，组成一个新的数列呢？你能根据得到的结论作出一个猜想吗？

5. 已知$\{a_n\}$是等差数列.

   (1) $2a_5=a_3+a_7$ 是否成立？$2a_5=a_1+a_9$ 呢？为什么？

   (2) $2a_n=a_{n-1}+a_{n+1}$ $(n>1)$ 是否成立？据此你能得出什么结论？

   $2a_n=a_{n-k}+a_{n+k}$ $(n>k>0)$ 是否成立？你又能得出什么结论？

习题 2.2

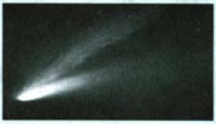
A 组

1. 在等差数列$\{a_n\}$中，

   (1) 已知 $a_1=2$，$d=3$，求 a_{10}；

   (2) 已知 $d=-\frac{1}{3}$，$a_7=8$，求 a_1.

2. 1682 年，英国的天文学家哈雷发现一颗大彗星描绘的曲线和 1531 年，1607 年的彗星惊人地相似，便大胆断定，这是同一天体的三次出现，并预言它将于 76 年后再度回归．这就是著名的哈雷彗星，它的回归周期大约是 76 年．请你查找资料，列出哈雷彗星的回归时间表，并预测它在本世纪回归的时间．



（第 2 题）

3. 如果三角形的三个内角的度数成等差数列，那么中间的角是多少度？
4. 在通常情况下，从地面到 10 km 高空，高度每增加 1 km，气温就下降某一个固定数值．如果 1 km 高度的气温是 8.5 ℃，5 km 高度的气温是 −17.5 ℃，求 2 km，4 km，8 km 高度的气温．
5. 甲虫是行动最快的昆虫之一．下表记录了某种类型的甲虫的爬行速度．

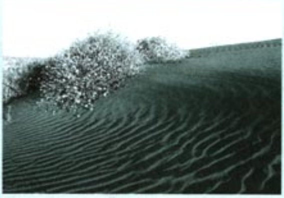
时间/s	1	2	3	…	?	…	60
距离/cm	9.8	19.6	29.4	…	49	…	?

（1）你能建立一个等差数列的模型，表示甲虫的爬行距离和时间之间的关系吗？
（2）利用建立的模型计算，甲虫 1 min 能爬多远？它爬行 49 cm 需要多长时间？

B 组

1. 某地区 1997 年底沙漠面积为 9×10^5 hm²．地质工作者为了解这个地区沙漠面积的变化情况，从 1998 年开始进行了连续 5 年的观测，并在每年底将观测结果记录如下表：

观测年份	$\dfrac{\text{该地区沙漠面积比原有面积增加数}}{\text{hm}^2}$
1998	2 000
1999	4 000
2000	6 001
2001	7 999
2002	10 001



请根据上表所给的信息进行预测．

（1）如果不采取任何措施，到 2010 年底，这个地区的沙漠面积将大约变成多少 hm²？
（2）如果从 2003 年初开始，采取植树造林等措施，每年改造 8 000 hm² 沙漠，但沙漠面积仍

按原有速度增加，那么到哪一年年底，这个地区的沙漠面积将小于 8×10^5 hm²？

2. 已知等差数列$\{a_n\}$的公差为 d，求证：

$$\frac{a_m-a_n}{m-n}=d.$$

2.3 等差数列的前 n 项和

200 多年前，高斯的算术老师提出了下面的问题：

$$1+2+3+\cdots+100=?$$

据说，当其他同学忙于把 100 个数逐项相加时，10 岁的高斯却用下面的方法迅速算出了正确答案：

$$(1+100)+(2+99)+\cdots+(50+51)=101\times50=5\ 050.$$

高斯（Carl Friedrich
ss，1777—1855），德国
数学家. 他研究的内容
数学的各个领域，是历
最伟大的数学家之一，
为“数学王子”.

高斯的算法实际上解决了求等差数列

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

前 100 项的和的问题. 人们从这个算法中受到启发，用下面的方法计算 1，2，3，…，n，…的前 n 项和：

由

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

可知

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)\ \times n}{2}.$$

探究

高斯的算法妙处在哪里？这种方法能够推广到求一般等差数列的前 n 项和吗？

一般地，我们称

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$$

为数列$\{a_n\}$的前 n 项和，用 S_n 表示，即

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

由高斯算法的启示，对于公差为 d 的等差数列，我们用两种方式表示 S_n：

$$S_n=a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots+[a_1+(n-1)d], \quad ①$$

$$S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]. \quad ②$$

由①+②，得

$$2S_n=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots+(a_1+a_n)}_{n\text{个}}$$

$$=n(a_1+a_n).$$

由此得到等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和的公式

$$\boxed{S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}.}$$

如果代入等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，S_n 也可以用首项 a_1 与公差 d 表示，即

$$\boxed{S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d.}$$

思考

比较这两个公式，说说它们分别从哪些角度反映了等差数列的性质.

例 1 2000 年 11 月 14 日教育部下发了《关于在中小学实施“校校通”工程的通知》. 某市据此提出了实施“校校通”工程的总目标：从 2001 年起用 10 年的时间，在全市中小学建成不同标准的校园网. 据测算，2001 年该市用于“校校通”工程的经费为 500 万元. 为了保证工程的顺利实施，计划每年投入的资金都比上一年增加 50 万元. 那么从 2001 年起的未来 10 年内，该市在“校校通”工程中的总投入是多少?

解：根据题意，从 2001～2010 年，该市每年投入“校校通”工程的经费都比上一年增加 50 万元. 所以，可以建立一个等差数列$\{a_n\}$，表示从 2001 年起各年投入的资金，其中，

$$a_1=500,\qquad d=50.$$

那么，到 2010 年（$n=10$），投入的资金总额为

$$S_{10}=10\times500+\frac{10\times(10-1)}{2}\times50=7\ 250\text{（万元）}.$$

答：从 2001～2010 年，该市在“校校通”工程中的总投入是 7 250 万元.

对于等差数列的相关量 a_1，a_n，d，n，S_n，已知几个量就可以确定其他量？

例 2 已知一个等差数列$\{a_n\}$前 10 项的和是 310，前 20 项的和是 1 220. 由这些条件能确定这个等差数列的前 n 项和的公式吗？

分析：将已知条件代入等差数列前 n 项和的公式后，可得到两个关于 a_1 与 d 的关系式，它们都是关于 a_1 与 d 的二元一次方程，由此可以求得 a_1 与 d，从而得到所求前 n 项和的公式.

解：由题意知

$$S_{10}=310,\qquad S_{20}=1\ 220,$$

将它们代入公式

$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d,$$

得到

$$\begin{cases}10a_1+45d=310,\\20a_1+190d=1\ 220.\end{cases}$$

解这个关于 a_1 与 d 的方程组，得到

$$a_1=4,\qquad d=6,$$

所以

$$S_n=4n+\frac{n(n-1)}{2}\times6=3n^2+n.$$

例 3 已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n=n^2+\frac{1}{2}n$，求这个数列的通项公式. 这个数列是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别是什么？

解：根据

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n$$

与

$$S_{n-1}=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}(n>1),$$

可知，当 $n>1$ 时，

$$\begin{aligned}a_n &= S_n - S_{n-1}\\ &= n^2+\frac{1}{2}n-\left[(n-1)^2+\frac{1}{2}(n-1)\right]\\ &= 2n-\frac{1}{2}.\end{aligned} \qquad ①$$

当 $n=1$ 时，

$$a_1=S_1=1^2+\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{2},$$

也满足①式.

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=2n-\frac{1}{2}.$$

由此可知，数列 $\{a_n\}$ 是一个首项为 $\frac{3}{2}$，公差为 2 的等差数列.

探究

一般地，如果一个数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为

$$S_n=pn^2+qn+r,$$

其中 p、q、r 为常数，且 $p\neq 0$，那么这个数列一定是等差数列吗？如果是，它的首项与公差分别是什么？

例 4　已知等差数列

$$5,\ 4\frac{2}{7},\ 3\frac{4}{7},\ \cdots$$

的前 n 项和为 S_n，求使得 S_n 最大的序号 n 的值.

从等差数列的通项公式出发来分析这道题，是否有解决的方案？

分析： 等差数列的前 n 项和公式可以写成 $S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n$，所以 S_n 可以看成函数 $y=\frac{d}{2}x^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)x$（$x\in \mathbf{N}^*$）当 $x=n$ 时的函数值. 另一方面，容易知道 S_n 关于 n 的图象是一条抛物线上的一些点. 因此，我们可以利用二次函数来求 n 的值.

解：由题意知，等差数列 5，$4\frac{2}{7}$，$3\frac{4}{7}$，…的公差为 $-\frac{5}{7}$，所以

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{n}{2}\left[2\times 5+(n-1)\left(-\frac{5}{7}\right)\right]\\&=\frac{75n-5n^2}{14}\\&=-\frac{5}{14}\left(n-\frac{15}{2}\right)^2+\frac{1\,125}{56}.\end{aligned}$$

于是，当 n 取与 $\frac{15}{2}$ 最接近的整数即 7 或 8 时，S_n 取最大值.

同学们可以画出 S_n 的图象，验证上述结论.

练 习

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

   (1) $a_1=-4$，$a_8=-18$，$n=8$；

   (2) $a_1=14.5$，$d=0.7$，$a_n=32$.

（第 2 题）

2. 一位技术人员计划用下面的办法测试一种赛车：从时速 10 km/h 开始，每隔 2 s 速度提高 20 km/h. 如果测试时间是 30 s，测试距离是多长？

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 $S_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{2}{3}n+4$，求这个数列的通项公式.

4. 求集合 $M=\{m \mid m=2n-1，n\in \mathbf{N}^*，且\ m<60\}$ 的元素个数，并求这些元素的和.

习题 2.3

A 组

1. (1) 求正整数列前 n 个偶数的和；

   (2) 求正整数列前 n 个奇数的和；

   (3) 在三位正整数的集合中有多少个数是 5 的倍数？求它们的和.

(4) 在正整数集合中有多少个三位数？求它们的和.

2. 为了参加冬季运动会的 5 000 m 长跑比赛，某同学给自己制定了 7 天的训练计划：第 1 天跑 5 000 m，以后每天比前一天多跑 500 m. 这个同学 7 天一共将跑多长的距离？

(第 2 题)

3. 一个多边形的周长等于 158 cm，所有各边的长成等差数列，最大边的长等于 44 cm，公差等于 3 cm，求多边形的边数.

4. 在小于 100 的正整数中共有多少个数被 7 除余 2？这些数的和是多少？

5. 一支打井队需要打一口深 50 m 的水井. 打到第 1 m 处，花了 10 min；打到第 2 m 处，花了 30 min；估计以后每向深处打 1 m，都比前 1 m 多用 20 min. 打完这口井共需要多长时间？

6. 有两个等差数列 2，6，10，…，190 及 2，8，14，…，200，由这两个等差数列的公共项按从小到大的顺序组成一个新数列，求这个新数列的各项之和.

B 组

1. 一家冷饮厂每个月都要对一种大型冰激凌机进行维修. 维修人员发现，维修费用与时间有下列的关系：第 n 个月花费维修费 $2(n-1)+500$ 元. 这种冰激凌机的售价为 50 万元，使用 5 年后报废. 那么，这台冰激凌机从投入使用到报废，每天的平均消耗❶是多少（一年按 365 天计，结果保留 3 位有效数字）？

❶ 机器从投入生产到报废共付出的维修费用与购买费用之和平均到每一天，叫做每天的平均消耗.

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项的和，求证 S_6，$S_{12}-S_6$，$S_{18}-S_{12}$ 也成等差数列.

3. 一支车队有 15 辆车，某天依次出发执行运输任务. 第一辆车于下午 2 时出发，第二辆车于下午 2 时 10 分出发，第三辆车于下午 2 时 20 分出发，依此类推. 假设所有的司机都连续开车，并都在下午 6 时停下来休息.

(1) 到下午 6 时，最后一辆车行驶了多长时间？

(2) 如果每辆车的行驶速度都是 60 km/h，这个车队当天一共行驶了多少 km？

4. 数列 $\left\{\dfrac{1}{n(n+1)}\right\}$ 的前 n 项和

$$S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\frac{1}{4\times5}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)},$$

研究一下，能否找到求 S_n 的一个公式. 你能对这个问题作一些推广吗？

5. 数列 $\{n^2\}$ 的前 n 项和

$$S_n=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2,$$

研究一下，能否找到求 S_n 的一个公式. 你能把你的思想方法作一些推广吗？

2.4 等比数列

在现实生活中，我们还会遇到下面一类特殊数列. 图2.4-1是某种细胞分裂的模型.

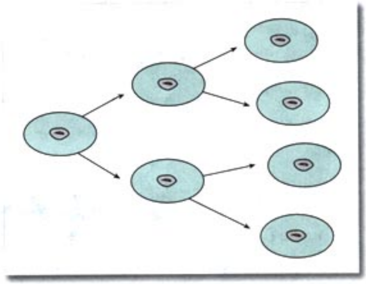


图 2.4-1

细胞分裂个数可以组成下面的数列：

$$1, 2, 4, 8, \cdots. \quad ①$$

我国古代一些学者提出："一尺之棰，日取其半，万世不竭." 用现代语言叙述为：一尺长的木棒，每日取其一半，永远也取不完. 这样，每日剩下的部分都是前一日的一半. 如果把"一尺之棰"看成单位"1"，那么，得到的数列是

$$1, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \_\_\_\_, \cdots. \quad ②$$

一种计算机病毒可以查找计算机中的地址簿，通过邮件进行传播. 如果把病毒制造者发送病毒称为第一轮，邮件接收者发送病毒称为第二轮，依此类推. 假设每一轮每一台计算机都感染20台计算机，那么在不重复的情况下，这种病毒每一轮感染的计算机数构成的数列是

$$1, 20, 20^2, 20^3, \cdots. \quad ③$$

除了单利，银行还有一种支付利息的方式——复利❶，即把前一期的利息和本金加在一起算作本金，再计算下一期

❶ 我国现行定期储蓄中的自动转存业务实际上就是按复利支付利息.

的利息，也就是通常说的“利滚利”．按照复利计算本利和的公式是

$$本利和=本金\times(1+利率)^{存期}.$$

例如，现在存入银行 10 000 元钱，年利率是 1.98%，那么按照复利，5 年内各年末得到的本利和分别是（计算时精确到小数点后 2 位）：

时间	年初本金（元）	年末本利和❶（元）
第 1 年	10 000	$10\,000\times1.019\,8$
第 2 年	$10\,000\times1.019\,8$	$10\,000\times1.019\,8^2$
第 3 年	$10\,000\times1.019\,8^2$	$10\,000\times1.019\,8^3$
第 4 年	$10\,000\times1.019\,8^3$	$10\,000\times1.019\,8^4$
第 5 年	$10\,000\times1.019\,8^4$	$10\,000\times1.019\,8^5$

❶ 假设储户 5 年既不加进存款也不取款，且不扣除利息税.

各年末的本利和（单位：元）组成了下面的数列：

$$10\,000\times1.019\,8，10\,000\times1.019\,8^2，10\,000\times1.019\,8^3，$$
$$10\,000\times1.019\,8^4，10\,000\times1.019\,8^5. \quad ④$$

观察

上面的数列①②③④有什么共同特点？

可以看到：

对于数列①，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于______；

对于数列②，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于______；

对于数列③，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于______；

对于数列④，从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于______.

也就是说，这些数列有一个共同的特点：从第 2 项起，每一项与前一项的比都等于同一常数.

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它的前一项的比等于同一常数，那么这个数列叫做**等比数列**(geometric sequence)❶，这个常数叫做等比数列的**公比**(common ratio)，公比通常用字母 q 表示 $(q\neq 0)$.

❶ 一些书籍把等比数列的英文缩写记作 G.P.(Geometric Progression).

上面的四个数列都是等比数列，公比依次是______，______，______，______.

与等差中项的概念类似，如果在 a 与 b 中间插入一个数 G，使 a，G，b 成等比数列，那么 G 叫做 a 与 b 的**等比中项**. 想一想，这时 a、b 的符号有什么特点？你能用 a 与 b 表示 G 吗？

既是等差数列又是等比数列的数列存在吗？如果存在，你能举出例子吗？

现在，我们来研究等比数列的通项公式.

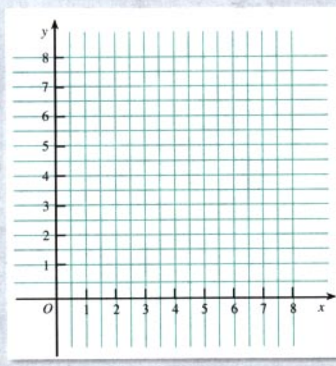
探究

(1) 写出上面四个等比数列的通项公式. 类比等差数列的通项公式的推导过程，请你补全首项是 a_1，公比是 q 的等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

$$\boxed{a_n=a_1q^{(\quad)}.}$$

(2) 在右面的直角坐标系中，画出通项公式为 $a_n=2^{n-1}$ 的数列的图象和函数 $y=2^{x-1}$ 的图象，你发现了什么？

(3) 类似地，在同一直角坐标系中，画出通项公式为 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ 的数列的图象和函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$ 的图象，并观察它们之间的关系.



例 1　某种放射性物质不断变化为其他物质，每经过一年剩留的这种物质是原来的 84%．这种物质的半衰期❶为多长（精确到 1 年）？

❶ 放射性物质衰变到原来的一半所需时间称为这种物质的半衰期．

解：设这种物质最初的质量是 1，经过 n 年，剩留量是 a_n．由条件可得，数列 $\{a_n\}$ 是一个等比数列，其中

$$a_1=0.84,\ q=0.84.$$

设 $a_n=0.5$，则

$$0.84^n=0.5.$$

两边取对数，得

$$n\lg 0.84=\lg 0.5.$$

用计算器算得

$$n\approx 4.$$

答：这种物质的半衰期大约为 4 年．

例 2　根据图 2.4-2 中的框图，写出所打印数列的前 5 项，并建立数列的递推公式．这个数列是等比数列吗？

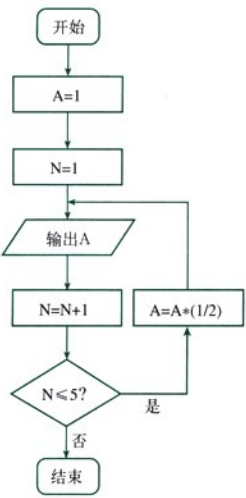


图 2.4-2

解：若将打印出来的数依次记为 a_1（即 A），a_2，a_3，…．由图 2.4-2 可知，

$$a_1=1,$$

$$a_2=a_1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2},$$

$$a_3=a_2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},$$

$$a_4=a_3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

$$a_5=a_4\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}.$$

于是，可得递推公式

$$\begin{cases}a_1=1,\\ a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}\ (n>1).\end{cases}$$

由于 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\dfrac{1}{2}$，因此这个数列是等比数列，其通项公式是

$$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

例 3 一个等比数列的第 3 项和第 4 项分别是 12 和 18，求它的第 1 项和第 2 项.

解：设这个等比数列的第 1 项是 a_1，公比是 q，那么

$$a_1q^2=12, \qquad ①$$

$$a_1q^3=18. \qquad ②$$

②÷①，得

$$q=\frac{3}{2}. \qquad ③$$

把③代入①，得

$$a_1=\frac{16}{3}.$$

因此，

$$\begin{aligned}a_2&=a_1q\\&=\frac{16}{3}\times\frac{3}{2}\\&=8.\end{aligned}$$

答：这个数列的第 1 项和第 2 项分别是$\frac{16}{3}$与 8.

例 4 已知$\{a_n\}\{b_n\}$是项数相同的等比数列，仿照下表中的例子填写表格. 从中你能得出什么结论？证明你的结论.

当数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$是项数相同的两个等差数列时，数列$\{pa_n+qb_n\}$（其中 p、q 是常数）也是等差数列吗？

	a_n	b_n	$a_n\cdot b_n$	判断数列$\{a_n\cdot b_n\}$是否等比数列
例	$3\times\left(\frac{2}{3}\right)^n$	$-5\times2^{n-1}$	$-10\times\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$	是
自选 1				
自选 2				

解：填表请同学们自己完成.

根据这个表格，我们可以得到：如果$\{a_n\}\{b_n\}$是项数相同的等比数列，那么$\{a_n\cdot b_n\}$也是等比数列.

证明如下：

设数列$\{a_n\}$的公比为 p，$\{b_n\}$的公比为 q，那么数列

$\{a_n \cdot b_n\}$的第 n 项与第 $n+1$ 项分别为 $a_1p^{n-1} \cdot b_1q^{n-1}$ 与 $a_1p^n \cdot b_1q^n$，即 $a_1b_1(pq)^{n-1}$ 与 $a_1b_1(pq)^n$. 因为

$$\frac{a_{n+1} \cdot b_{n+1}}{a_n \cdot b_n} = \frac{a_1b_1(pq)^n}{a_1b_1(pq)^{n-1}} = pq,$$

它是一个与 n 无关的常数，所以$\{a_n \cdot b_n\}$是一个以 pq 为公比的等比数列.

特别地，如果$\{a_n\}$是等比数列，c 是不等于 0 的常数，那么数列$\{c \cdot a_n\}$也是等比数列.

探究

对于例 4 中的等比数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$，数列$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$也一定是等比数列吗？

练 习

1. 已知$\{a_n\}$是一个等比数列，在下表中填入适当的数.

a_1	a_3	a_5	a_7	q
2		8		
	2			0.2

2. 在利用电子邮件传播病毒的例子中，如果第一轮感染的计算机数是 80 台，并且从第一轮起，以后各轮的每一台计算机都可以感染下一轮的 20 台计算机，到第 5 轮可以感染到多少台计算机❶？

❶ 由计算结果可以看到，计算机病毒的感染速度是非常惊人的. 你能体会到“指数爆炸”的含义吗？

3. 已知$\{a_n\}$是一个无穷等比数列，公比为 q.

(1) 将数列$\{a_n\}$中的前 k 项去掉，剩余各项组成一个新的数列，这个新数列是等比数列吗？如果是，它的首项与公比分别是多少？

(2) 取出数列$\{a_n\}$中的所有奇数项，组成一个新的数列，这个新数列是等比数列吗？如果是，它的首项与公比分别是多少？

(3) 在数列$\{a_n\}$中，每隔 10 项取出一项，组成一个新的数列，这个新数列是等比数列吗？如果是，它的公比是多少？你能根据得到的结论作出一个猜想吗？

4. 已知$\{a_n\}$是等比数列.

(1) $a_5^2 = a_3 \cdot a_7$ 是否成立？$a_5^2 = a_1 \cdot a_9$ 成立吗？为什么？

(2) $a_n^2=a_{n-1}\cdot a_{n+1}$ $(n>1)$ 是否成立？你据此能得到什么结论？

$a_n^2=a_{n-k}\cdot a_{n+k}$ $(n>k>0)$ 是否成立？你又能得到什么结论？

5. 某人买了一辆价值 13.5 万元的新车．专家预测这种车每年按 10% 的速度折旧❶．

(1) 用一个式子表示 n $(n\in \mathbf{N}^*)$ 年后这辆车的价值．

(2) 如果他打算用满 4 年时卖掉这辆车，他大概能得到多少钱？

❶ 折旧是贬值的意思．

习 题 2.4

A 组

1. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，

(1) $a_4=27$，$q=-3$，求 a_7；

(2) $a_5-a_1=15$，$a_4-a_2=6$，求 a_3．

2. 某地为了保持水土资源，实行退耕还林，如果 2000 年退耕 8 万公顷，以后每年增加 10%，那么 2005 年需退耕多少公顷？（结果保留到个位）

（第 2 题）

（第 5 题）

3. 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等比数列，$\{\sqrt{a_n}\}$ 是等比数列吗？为什么？

4. 如果能将一张厚度为 0.05 mm 的报纸对折，再对折，再对折……对折 50 次后，报纸的厚度是多少？你相信这时报纸的厚度可以在地球和月球之间建一座桥吗？

5. 某城市今年空气质量为“良”的天数共为 105 天，力争 2 年后使空气质量为“良”的天数达到 240 天．这个城市空气质量为“良”的天数的年平均增长率为多少？（精确到小数点后 2 位）

6. 已知 a，b 是互异的正数，A 是 a，b 的等差中项，G 是 a，b 的正的等比中项，A 与 G 有无确定的大小关系？

B 组

1. 已知等比数列$\{a_n\}$的公比为 q，求证

$$\frac{a_m}{a_n}=q^{m-n}.$$

2. 考古学中常利用死亡的生物体中碳 14 元素稳定持续衰变的现象测定遗址的年代. 假定碳 14 每年的衰变率不变，已知它的半衰期为 5 730 年，那么：

(1) 碳 14 的衰变率为多少？

(2) 某动物标本中碳 14 的含量为正常大气中碳 14 的含量的 60%（即衰变了 40%），该动物大约在距今多少年前死亡？

(第 2 题)

3. 就任一等差数列 $\{a_n\}$，计算 a_7+a_{10} 和 a_8+a_9，$a_{10}+a_{40}$ 和 $a_{20}+a_{30}$，你发现了什么一般规律，能把你发现的规律作一般化的推广吗？从等差数列和函数之间的联系角度来分析这个问题. 在等比数列中会有怎样的类似结论？

2.5 等比数列的前 n 项和

国际象棋起源于古代印度．相传国王要奖赏国际象棋的发明者，问他想要什么．发明者说："请在棋盘的第 1 个格子里放上 1 颗麦粒，第 2 个格子里放上 2 颗麦粒，第 3 个格子里放上4 颗麦粒，依此类推，每个格子里放的麦粒数都是前一个格子里放的麦粒数的 2 倍，直到第64 个格子．请给我足够的麦粒以实现上述要求．"国王觉得这个要求不高，就欣然同意了．假定千粒麦子的质量为 40 g，据查，目前世界年度小麦产量约 6 亿 t，根据以上数据，判断国王是否能实现他的诺言．

让我们一起来分析一下，如果把各格所放的麦粒数看成一个数列，我们可以得到一个等比数列，它的首项是 1，公比是 2，求第 1 个格子到第 64 个格子各格所放的麦粒数总和就是求这个等比数列前 64 项的和．

$1+q+q^2+\cdots+q^n=?$

一般地，对于等比数列

$$a_1，a_2，a_3，\cdots，a_n，\cdots，$$

它的前 n 项和是

$$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n.$$

根据等比数列的通项公式，上式可写成

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}. \qquad ①$$

我们发现，如果用公比 q 乘①的两边，可得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n, \qquad ②$$

当 $q=1$ 时，等比数列的前 n 项和 S_n 等于多少？

①，②的右边有很多相同的项．用①的两边分别减去②的两边，就可以消去这些相同的项，得

$$(1-q)S_n=a_1-a_1q^n.$$

当 $q\neq1$ 时，等比数列的前 n 项和的公式为

$$\boxed{S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\ (q\neq1).}$$

因为 $a_n=a_1q^{n-1}$，所以上面的公式还可以写成

$$\boxed{S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}\ (q\neq 1).}$$

有了上述公式，就可以解决本节开头提出的问题. 由 $a_1=1$，$q=2$，$n=64$，可得

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}\\&=\frac{1\times(1-2^{64})}{1-2}\\&=2^{64}-1.\end{aligned}$$

对于等比数列的相关量 a_1，a_n，q，n，S_n，已知几个量，就可以确定其他量？

$2^{64}-1$ 这个数很大，超过了 1.84×10^{19}. 假定千粒麦子的质量为 40 g，那么麦粒的总质量超过了7 000亿吨，因此，国王不能实现他的诺言.

例 1 求下列等比数列前 8 项的和：

(1) $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，…；

(2) $a_1=27$，$a_9=\frac{1}{243}$，$q<0$.

解：(1) 因为 $a_1=1$，$q=\frac{1}{2}$，所以当 $n=8$ 时，

$$S_n=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{255}{256}.$$

(2) 由 $a_1=27$，$a_9=\frac{1}{243}$，可得

$$\frac{1}{243}=27\cdot q^8.$$

又由 $q<0$，可得

$$q=-\frac{1}{3}.$$

于是当 $n=8$ 时，

$$S_8=\frac{27\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^8\right]}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}=\frac{1\ 640}{81}.$$

例 2 某商场今年销售计算机 5 000 台. 如果平均每年的销售量比上一年的销售量增加 10%，那么从今年起，大约几年可使总销售量达到 30 000 台（结果保留到个位)?

解：根据题意，每年销售量比上一年增加的百分率相同. 所以，从今年起，每年的销售量组成一个等比数列 $\{a_n\}$，其中

$$a_1=5\ 000,\ q=1+10\%=1.1,\ S_n=30\ 000.$$

于是得到

$$\frac{5\ 000(1-1.1^n)}{1-1.1}=30\ 000.$$

整理，得

$$1.1^n=1.6.$$

两边取对数，得

$$n\lg 1.1=\lg 1.6.$$

用计算器算得

$$n=\frac{\lg 1.6}{\lg 1.1}\approx\frac{0.20}{0.041}\approx 5(\text{年}).$$

答：大约 5 年可以使总销量达到 30 000 台.

实际上，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 构成了一个新的数列：

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots.$$

请你完成这个新数列的递推关系：

$$\begin{cases} S_1=\_\_\_\_\_\_, \\ S_n=S_{n-1}+\_\_\_\_\_\_\quad (n>1). \end{cases}$$

计算机可以帮助我们求一般数列的前 n 项和，请看下面的例子.

例 3 如图 2.5-1，为了估计函数 $y=9-x^2$ 在第一象限的图象与 x 轴、y 轴围成的区域的面积 X，把 x 轴上的区间 $[0,\ 3]$ 分成 n 等份，从各分点作 y 轴的平行线与函数图象相交，再从各交点向左作 x 轴的平行线，构成 $(n-1)$ 个矩形. 下面的程序用来计算这 $(n-1)$ 个矩形的面积的和 S.

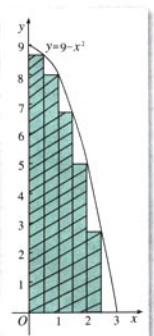


图 2.5-1

```
SUM = 0
k=1
INPUT "请输入将[0, 3]分成的份数 n:"; N
WHILE  k<=N-1
AN=(9-(k*3/N)^2)*3/N
SUM=SUM +AN
PRINT  k, AN, SUM
k=k+1
WEND
END
```

阅读程序，回答下列问题：

（1）程序中的 AN、SUM 分别表示什么，为什么？

（2）请根据程序分别计算当 $n=6$，11，16 时，各个矩形的面积的和（不必在计算机上运行程序）.

解：（1）当把 x 轴上的区间[0，3]分成 n 等份时，各等份的长都是 $\frac{3}{n}$，即各矩形的底都是 $\frac{3}{n}$. 显然分点的横坐标分别是 $\frac{3}{n}$，$\frac{3\times2}{n}$，…，$\frac{3\times(n-1)}{n}$，从各分点作 y 轴的平行线与 $y=9-x^2$ 的图象相交，交点的纵坐标分别是 $9-\left(\frac{3}{n}\right)^2$，$9-\left(\frac{3\times2}{n}\right)^2$，…，$9-\left[\frac{3\times(n-1)}{n}\right]^2$，它们分别是相应矩形的高. 这样，各个矩形的面积分别是 $\left[9-\left(\frac{3}{n}\right)^2\right]\times\frac{3}{n}$，$\left[9-\left(\frac{3\times2}{n}\right)^2\right]\times\frac{3}{n}$，…，$\left\{9-\left[\frac{3\times(n-1)}{n}\right]^2\right\}\times\frac{3}{n}$. 所以，程序中的 AN 表示第 k 个矩形的面积，SUM 表示前 k 个矩形面积的和.

求矩形面积和时需用公式 $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

（2）根据程序，当 $n=6$ 时，5 个矩形的面积的和就是输入 N=6 时，SUM 的最后一个输出值，即 SUM=15.625（这里精确到小数点后 3 位）.

利用微积分的知识可得 $X=18$. 取定几个 n 值，继续右面的计算，你发现了什么规律？

同理，当 $n=11$ 时，10 个矩形的面积的和就是输入 N=11时，SUM 的最后一个输出值，即 SUM=16.736；当 $n=16$ 时，我们得到 15 个矩形的面积的和 SUM=17.139.

练 习

1. 根据下列各题中的条件，求相应的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n.

   (1) $a_1=3$，$q=2$，$n=6$；

   (2) $a_1=-2.7$，$q=-\frac{1}{3}$，$a_n=\frac{1}{90}$.

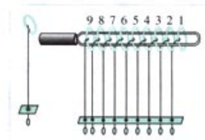
2. 如果一个等比数列前 5 项的和等于 10，前 10 项的和等于 50，那么它前 15 项的和等于多少？

3. 某市近 10 年的国内生产总值从 2 000 亿元开始以 10%的速度增长，这个城市近 10 年的国内生产总值一共是多少？

阅读与思考

九连环

九连环是中国的一种古老智力游戏，它环环相扣，趣味无穷.



九连环的结构如图：9 个大小相同的圆环（一般由较粗的铁丝制成），依次排开，每一个圆环上都连有一个较细的铁丝直杆，各直杆在后一个圆环内穿过. 九个直杆的另一端都插在一个木板的一排小孔里. 直杆的末端都弯成一个小圈，使它们能在小孔里上下移动，但不会脱出. 另外有一个粗铁丝做成的框架，圆环可以从框架上解下或套上. 玩九连环就是要把这九个圆环全部从框架上解下或套上. 但无论是解下还是套上圆环，都要遵循一定的规则. 例如我们可以按照下面的方法进行：为了解下第 i 个圆环，必须先解下前$(i-2)$个圆环，这是因为：如果前$(i-1)$个圆环已经被解下，第 i 个圆环就无法再解下；如果前$(i-1)$个圆环已经被解下，第$(i+1)$个圆环就可以很容易解下. 相反地，要套上第 i 个圆环，必须先套上前$(i-2)$个圆环. 套上一个圆环与解下一个圆环的过程正好相反，所需要的次数相同. 如果按照这个规则解开九连环，最少需要移动圆环多少次呢？

我们不妨考虑 n 个圆环的情况. 用 $K(n)$表示解下 n 个圆环所需的最少移动次数. 显然，解下第 1 个圆环需 $K(1)=1$(次). 当 $n=2$ 时，必须先解下第 2 个圆环，再解下第 1 个圆环，所以解下第 2 个圆环需 $K(2)=2$(次).

若要解下第 n 个圆环，就必须先解下第$(n-2)$个圆环，需要 $K(n-2)$次，然后再移动 1 次即可将第 n 个圆环解下，则只剩下第$(n-1)$个圆环.

若我们再用 $k(n)$表示前$(n-1)$个圆环都已经解下后，再解下第 n 个圆环所需的次数，则可得下式：

$$K(n)=K(n-2)+1+k(n-1).$$

接着，我们求 $k(n)$的表达式. 由前面显然可知，若要将第 n 个圆环解下，必须先将第$(n-1)$个圆环套回框架，这个过程需 $k(n-1)$次. 这时再移动 1 次，就可以解下第 n 个圆环，然后再将第$(n-1)$个圆环解下，又需 $k(n-1)$次，所以可得

$$k(1)=1,\quad k(n)=2k(n-1)+1.$$

由此得到

$$\begin{aligned}k(n)&=2^2k(n-2)+2+1\\&=2^3k(n-3)+2^2+2+1\\&=\cdots\end{aligned}$$

$$=2^{n-1}k(1)+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1$$
$$=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+2+1$$
$$=2^{n}-1.$$

这是一个以 1 为首项，2 为公比的等比数列的前 n 项的和.

现在可以确定公式 $K(n)$ 了，

$$K(n)=K(n-2)+2^{n-1}.$$

由于 $K(1)=1$，$K(2)=2$，所以当 n 为偶数时，

$$\begin{aligned}K(n)&=K(n-2)+2^{n-1}\\&=K(n-4)+2^{n-1}+2^{n-3}\\&=K(n-6)+2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}\\&=\cdots\\&=K(2)+2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{3}\\&=2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{3}+2\\&=\frac{2(1-2^{n})}{1-2^{2}}\\&=\frac{1}{3}(2^{n+1}-2);\end{aligned}$$

这是一个以 2 为首项，2^2 为公比的等比数列的前 $\frac{n}{2}$ 项的和.

当 n 为奇数时，

$$\begin{aligned}K(n)&=K(n-2)+2^{n-1}\\&=K(n-4)+2^{n-1}+2^{n-3}\\&=K(n-6)+2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}\\&=\cdots\\&=K(1)+2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{2}\\&=2^{n-1}+2^{n-3}+2^{n-5}+\cdots+2^{2}+1\\&=\frac{2(1-2^{n+1})}{1-2^{2}}\\&=\frac{1}{3}(2^{n+1}-1).\end{aligned}$$

这是一个以1为首项，2^2 为公比的等比数列的前 $\frac{n+1}{2}$ 项的和.

于是，$K(9)=\frac{1}{3}(2^{9+1}-1)=341.$

所以，解九连环最少需要移动圆环 341 次.

习题2.5

A 组

1. 在等比数列$\{a_n\}$中：

(1) 已知$a_1=-1$，$a_4=64$，求q与S_4；

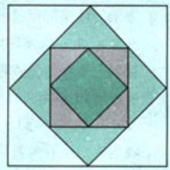
(2) 已知$a_3=\dfrac{3}{2}$，$S_3=\dfrac{9}{2}$，求a_1与q.

2. 某企业去年的产值是138万元，计划在今后5年内每年比上一年产值增长10%，这5年的总产值是多少？

3. 如图，画一个边长为2 cm的正方形，再将这个正方形各边的中点相连得到第2个正方形，依此类推，这样一共画了10个正方形. 求：

(1) 第10个正方形的面积；

(2) 这10个正方形的面积的和.



(第3题)

4. 求和：

(1) $(a-1)+(a^2-2)+\cdots+(a^n-n)$；

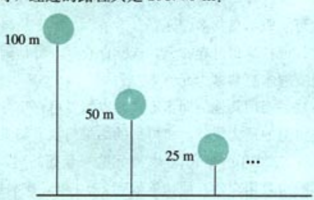
(2) $(2-3\times5^{-1})+(4-3\times5^{-2})+\cdots+(2n-3\times5^{-n})$；

(3) $1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$.

5. 一个球从100 m高处自由落下，每次着地后又跳回到原高度的一半再落下.

(1) 当它第10次着地时，经过的路程共是多少？

(2) 当它第几次着地时，经过的路程共是293.75 m？



(第5题)

6. 已知S_n是等比数列$\{a_n\}$的前n项和，S_3，S_9，S_6成等差数列，求证a_2，a_8，a_5成等差数列.

B 组

1. 利用等比数列的前 n 项和的公式证明

$$a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-1}+b^n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b},$$

其中 $n\in\mathbf{N}^*$，a，b 是不为 0 的常数，且 $a\neq b$.

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，求证 S_7，$S_{14}-S_7$，$S_{21}-S_{14}$ 也成等比数列.

3. 资料表明，2000 年我国工业废弃垃圾达 7.4×10^8 t，每 t 占地 1 平方米. 环保部门每回收或处理 1 t 废旧物资，相当于消灭 4 t 工业废弃垃圾. 如果环保部门 2002 年共回收处理了 100 t 废旧物资，且以后每年的回收量递增 20%.

(1) 2010 年能回收多少 t 废旧物资？

(2) 从 2002 年到 2010 年底，可节约土地多少 m^2（精确到1 m^2）？

（第 3 题）

4. 收集本地区有关教育储蓄的信息，思考以下问题.

(1) 依教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年，到期（3 年）或 6 年时一次可支取本息共多少元？

(2) 依教育储蓄的方式，每月存 a 元，连续存 3 年，到期（3 年）或 6 年时一次可支取本息共多少元？

(3) 依教育储蓄的方式，每月存 50 元，连续存 3 年，到期（3 年）时一次可支取本息比同档次的“零存整取”多收益多少元？

(4) 欲在 3 年后一次支取教育储蓄本息合计 1 万元，每月应存入多少元？

(5) 欲在 3 年后一次支取教育储蓄本息合计 a 万元，每月应存入多少元？

(6) 依教育储蓄的方式，原打算每月存 100 元，连续存 6 年，可是到 4 年时，学生需要提前支取全部本息，一次可支取本息共多少元？

(7) 依教育储蓄的方式，原打算每月存 a 元，连续存 6 年，可是到 b 年时，学生需要提前支取全部本息，一次可支取本息共多少元？

(8) 不用教育储蓄的方式，而用其他的储蓄形式，以每月可存 100 元，6 年后使用为例，探讨以现行的利率标准可能的最大收益，将得到的结果与教育储蓄比较.

5. 购房问题：某家庭打算在 2010 年的年底花 40 万元购一套商品房，为此，计划从 2004 年初开始，每年年初存入一笔购房专用存款，使这笔款到 2010 年底连本带息共有 40 万元. 如果每年的存款数额相同，依年利息 2% 并按复利计算，问每年应该存入多少钱？

购房中的数学

数列在实际生活中有很多应用，例如人们在贷款、储蓄、购房、购物等经济生活中就大量用到数列的知识. 某地一位居民为了改善家庭的住房条件，决定在2003年重新购房. 某日，他来到了一个房屋交易市场. 面对着房地产商林林总总的宣传广告，是应该买商品房还是买二手房呢，他一时拿不定主意.

经过一番调查，这位居民搜集了一些住房信息，然后在下表中列出了他的家庭经济状况和可供选择的方案，准备向专家咨询.

家庭经济状况	家庭每月总收入3 000元，也就是年收入3.6万元. 现有存款6万元，但是必须留2万元～3万元以备急用.
预选方案	1. 买商品房： 一套面积为80 m^2 的住宅，每平方米售价为1 500元.
	2. 买二手房： 一套面积为110 m^2 左右的二手房，售价为14.2万元，要求首付4万元.

购房还需要贷款. 这位居民选择了一家银行申请购房贷款. 该银行的贷款评估员根据表格中的信息，向他提供了下列信息和建议：

申请商业贷款，贷款期限为15年比较合适，年利率为5.04%. 购房的首期付款应不低于实际购房总额的20%，贷款额应不高于实际购房总额的80%. 还款方式为等额本金还款，如果按季还款，每季还款额可以分成本金部分和利息部分，其计算公式分别为

本金部分＝贷款本金÷贷款期季数，

利息部分＝(贷款本金－已归还贷款本金累计额)×季利率.

同学们今后也可能面临这样的问题. 现在，就用我们学过的数列知识帮这位居民算一算这笔经济账. 根据以上购房贷款方式，你认为预选方案1、2到底哪个是他的最佳选择？

和同学交流你的想法，然后给他写一封信，阐述你的建议，并说明理由.

你可以借助报纸或互联网查找、整理有关房地产和购房贷款的资料，还可以请教老师或到相关机构咨询.

参考资料

1. 贷款买房时，购房者首先与房地产开发商签订房屋购买合同，然后与银行签订贷款合同，用这套住房作为抵押，向银行申请贷款. 银行在审查同意你的申请后，通常会将住房总价值的70%或80%直接划给房地产开发商. 这时候，购房者只需要拿出住房总价值的30%或20%（通常叫做首期），就可以搬进新房了. 其余的款项，购房者以一定的利率，逐月偿还给银行，偿还期限短则3～5年，长则15年、20年，甚至30年.

2. 二手房即旧房. 新建的商品房进行第一次交易时称为“一手”，第二次交易称为“二手”. 二手房贷款是向购买二手房的购房者提供贷款，由借款人分期还款的贷款方式.

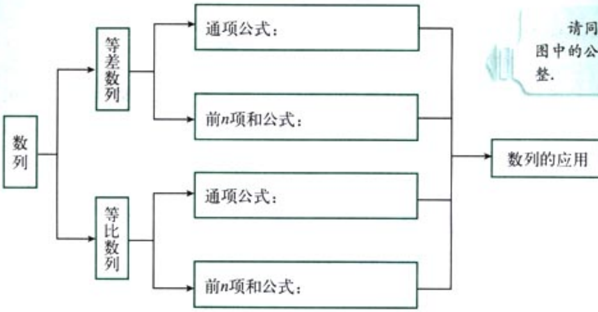
3. 目前购房贷款可以采用三种贷款类型：商业贷款、公积金贷款和商业公积金组合贷款. 商业贷款1～5年月利率为0.397 5%，年利率为4.77%；6～20年月利率为0.425%，年利率为5.04%. 公积金贷款1～5年月利率为0.3%，年利率为3.6%；6～20年月利率为0.337 5%，年利率为4.05%.

4. 目前银行规定有两种还款方式：(1) 等额本息还款法；(2) 等额本金还款法. 等额本金还款法的特点是：每期还款额递减，利息总支出比等额本息还款法少. 这种方式1999年1月正式推出，正被各银行逐渐采用. 等额本金还款法可以是按月还款和按季还款. 由于银行结息惯例的要求，一般采用按季还款的方式.

5. 对于家庭经济收入的分配，国内外经济学家提供了下述参考标准：家庭收入的30%用于偿还购房贷款，30%用于投资储蓄，20%用于子女教育，20%用于日常开销. 因此，偿还购房贷款的金额占家庭总收入的20%～30%为宜.

小 结

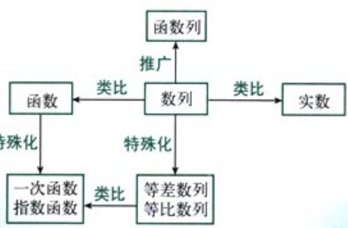
一、本章知识结构



请同学们将框图中的公式补充完整.

二、回顾与思考

1. 数列在现实世界中无处不在，你能举出一些数列的实例吗？数列实际上是定义域为正整数集 $\mathbf{N}^*$（或它的有限子集 $\{1,2,\cdots,n\}$）的函数当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值．你能从函数的观点认识数列吗？你能体会数列的学习与实数的学习之间的异同吗？



2. 数列的通项公式描述的是数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项 a_n 与序号 n 之间的函数关系，可用式子 $a_n=f(n)$ 表示．数列的图象是一系列孤立的点 $(n, f(n))$ 所组成的图形．等差数列与等比数列的通项公式分别反映了什么函数关系？它们的图象各有什么特点？

3. 由于等差数列与等比数列所具有的特殊性质，使我们可以得到这两种数列的前 n 项和公式. 你能用不同的方法推导出等差数列与等比数列的前 n 项和公式吗？对于任何数列 $\{a_n\}$，S_n 与 a_n 有以下关系：

$$a_n=\begin{cases} S_1 & (n=1), \\ S_n-S_{n-1} & (n>1). \end{cases}$$

你认为这个公式在解决数列问题时有哪些作用？

4. 数列，特别是等差数列与等比数列，既有趣又有用. 在物理、化学、生物等学科，以及经济、天文、历法等领域都有它的身影. 请你谈谈这一章的学习对你的生活和学习有什么帮助.

复习参考题

A 组

1. 选择题.

(1) 由 $a_1=1$，$d=3$ 确定的等差数列 $\{a_n\}$，当 $a_n=298$ 时，序号 n 等于（　　）

(A) 99.　　(B) 100.　　(C) 96.　　(D) 101.

(2) 一个蜂巢里有 1 只蜜蜂．第 1 天，它飞出去找回了 5 个伙伴；第 2 天，6 只蜜蜂飞出去，各自找回了 5 个伙伴…… 如果这个找伙伴的过程继续下去，第 6 天所有的蜜蜂都归巢后，蜂巢中一共有（　　）只蜜蜂.

(A) 55 986.　　(B) 46 656.　　(C) 216.　　(D) 36.

(3) 预测人口的变化趋势有多种方法，“直接推算法”使用的公式是 $P_n=P_0(1+k)^n(k>-1)$，其中 P_n 为预测期人口数，P_0 为初期人口数，k 为预测期内年增长率，n 为预测期间隔年数．如果在某一时期有 $-1<k<0$，那么在这期间人口数（　　）

(A) 呈上升趋势.　　(B) 呈下降趋势.　　(C) 摆动变化.　　(D) 不变.

(4)《莱因德纸草书》(Rhind Papyrus)是世界上最古老的数学著作之一．书中有一道这样的题目：把 100 个面包分给 5 个人，使每人所得成等差数列，且使较大的三份之和的 $\frac{1}{7}$ 是较小的两份之和，问最小 1 份为（　　）

(A) $\frac{5}{3}$.　　(B) $\frac{10}{3}$.　　(C) $\frac{5}{6}$.　　(D) $\frac{11}{6}$.

2. 写出数列的一个通项公式，使它的前 4 项分别是下列各数：

(1) $\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{7}{16}$；

(2) $1+\frac{1}{2^2}$，$1-\frac{3}{4^2}$，$1+\frac{5}{6^2}$，$1-\frac{7}{8^2}$；

(3) 7，77，777，777 7；

(4) 0，$\sqrt{2}$，0，$\sqrt{2}$.

3. 根据下面 4 个数列的通项公式，分别作出它们的图象：

(1) $a_n=-\frac{n}{4}$；(2) $b_n=\frac{2^n}{3}$；(3) $c_n=\frac{2n+1}{n}$；(4) $d_n=\frac{(-1)^n}{n}$.

4. a，b，c 三个数成等差数列，其中 $a=5+2\sqrt{6}$，$c=5-2\sqrt{6}$，那么 b 等于多少？如果 a，b，c 成等比数列呢？

5. 某同学设计了一个计算机程序，用来求一个等比数列前 n 项的和.

```
sum=0
INPUT "请输入序号 n:"; n
i=1
WHILE i<=n
an=4*3^i
sum=sum + an
PRINT i, an
PRINT i, sum
i=i+1
WEND
END
```

当 $n=5$ 时，按顺序写出 an 所有的输出值；当 $n=15$ 时，sum 的最后一个输出值是多少？（不必在计算机上运行程序）

6. 一个从地面通往舞台的台阶共有 16 级，最低的一级高 0.2 m，其他等高，且两级之间相差0.12 m，这个舞台有多高？

7. 根据第五次全国人口普查的结果，截至 2000 年 11 月 1 日，北京市的常住人口总数为 1 381.9 万．如果从 2001 年初开始，北京市把全市人口的年增长率控制在 0.13%以内，到 2008 年举办奥运会时（按到年底计算），北京市最多有多少常住人口？

8. 某市一家商场的新年最高促销奖设立了两种领奖方式．获奖者可以选择 2 000 元的奖金，或者从 12 月 20 日到第二年的 1 月 1 日，每天到该商场领取奖品．第 1 天领取的奖品的价值为 100 元，第 2 天为 110 元，以后逐天增加 10 元．你认为哪种领奖方式获奖者受益更多？

9. 在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=450$，那么 a_2+a_8 等于多少？

10. 某中学的“希望工程”募捐小组暑假期间走上街头进行了一次募捐活动，共获得捐款 1 200 元．他们第 1 天只得到 10 元，之后采取了积极措施，从第 2 天起，每 1 天获得的捐款都比前 1 天多 10 元．这次募捐活动一共进行了多少天？

11. 在数列$\{a_n\}$中，设 $S_1=a_1+a_2+\cdots+a_n$，$S_2=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$，$S_3=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$．
    （1）如果$\{a_n\}$是以 d 为公差的等差数列，求证 S_1，S_2，S_3 也是等差数列，并求其公差；
    （2）如果$\{a_n\}$是以 q 为公比的等比数列，求证 S_1，S_2，S_3 也是等比数列，并求其公比．

12. 数列$\{a_n\}$是等差数列，$a_1=f(x+1)$，$a_2=0$，$a_3=f(x-1)$，其中 $f(x)=x^2-4x+2$，求通项公式 a_n．

13. 某牛奶厂 2002 年初有资金 1 000 万元，由于引进了先进生产设备，资金年平均增长率可达到 50%．每年年底扣除下一年的消费基金后，余下的资金投入再生产．这家牛奶厂每年应扣除多少消费基金，才能实现经过 5 年资金达到 2 000 万元的目标？

B 组

1. 选择题．
    （1）等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且 $a_5a_6+a_4a_7=18$，则 $\log_3 a_1+\log_3 a_2+\cdots+\log_3 a_{10}=$（　　）

(A) 12.　　(B) 10.　　(C) 8.　　(D) $2+\log_3 5$.

(2) 等比数列的前 n 项，前 $2n$ 项，前 $3n$ 项的和分别为 A，B，C，则（　　）.

(A) $A+B=C$.　　(B) $B^2=AC$.　　(C) $(A+B)-C=B^2$.　(D) $A^2+B^2=A(B+C)$.

2. 非零实数 a，b，c 不全相等.

(1) 如果 a，b，c 成等差数列，$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$能构成等差数列吗？你能用函数图象解释一下吗？

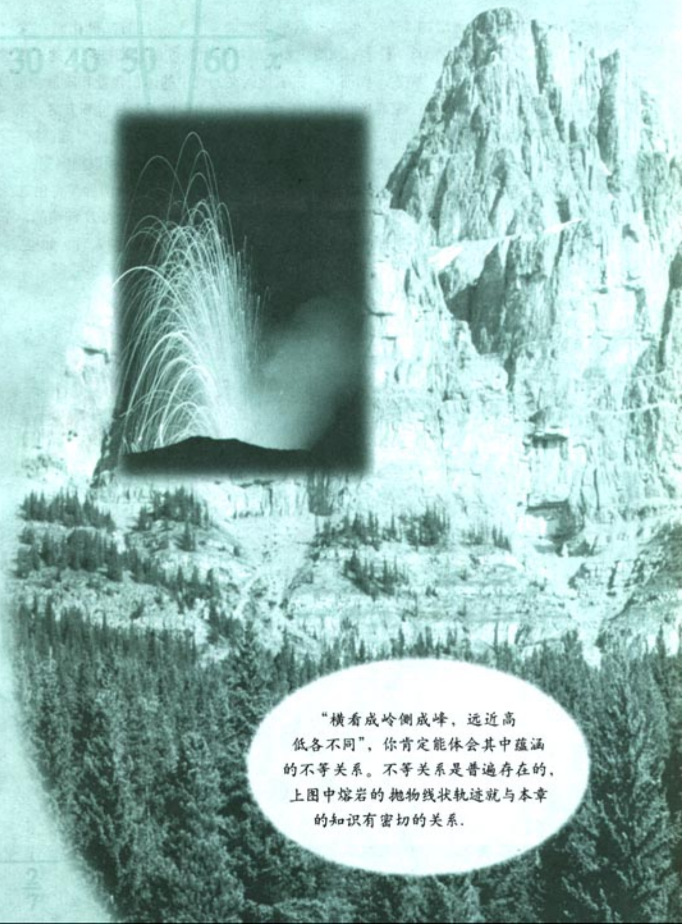
(2) 如果 a，b，c 成等比数列，$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{b}$，$\frac{1}{c}$能构成等比数列吗？为什么？

3. 二氧化碳的含量每增加 25%，地球气温平均增加 0.5 ℃. 目前二氧化碳在大气中的体积分数为 0.033，质量分数为 0.05. 科学家预测：如果地球表面温度的升高按现在的速度继续发展，到 2050 年全球温度将上升 3 ℃左右. 到那时，二氧化碳在大气中的体积含量和质量含量分别大约是多少？

4. 某同学利用暑假时间到一家商场勤工俭学. 该商场向他提供了三种付酬方案：第一种，每天支付 38 元；第二种，第一天付 4 元，第二天付 8 元，第三天付 12 元，依此类推；第三种，第一天付 0.4 元，以后每天比前一天翻一番（即增加 1 倍）. 你会选择哪种方式领取报酬呢？

5. 选菜问题：学校餐厅每天供应 500 名学生用餐，每星期一有 A、B 两种菜可供选择. 调查资料表明，凡是在这星期一选 A 种菜的，下星期一会有 20%改选 B 种菜；而选 B 种菜的，下星期一会有 30%改选 A 种菜. 用 a_n，b_n 分别表示在第 n 个星期选 A 的人数和选 B 的人数，如果 $a_1=300$，求 a_{10}.

3



“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，你肯定能体会其中蕴涵的不等关系。不等关系是普遍存在的，上图中熔岩的抛物线状轨迹就与本章的知识有密切的关系。

第三章

不等式

与等量关系一样，不等量关系也是自然界中存在着的基本数量关系，它们在现实世界和日常生活中大量存在，在数学研究和数学应用中也起着重要的作用.

在本章中，我们将学习一些关于不等式的基本知识．通过不等式丰富的实际背景理解不等式（组)，体会不等关系和不等式的意义与价值；理解二元一次不等式（组）与平面区域的关系；借助几何直观解决简单的线性规划问题；通过基本不等式了解不等式的证明，解决一些简单的最大（小）值问题；通过不等式与函数、方程的联系，提高对数学各部分内容之间联系性的认识.

3.1 不等关系与不等式

现实世界和日常生活中，既有相等关系，又存在着大量的不等关系.

我们知道，两点之间线段最短，三角形两边之和大于第三边、两边之差小于第三边，等等. 人们还经常用长与短、高与矮、轻与重、大与小、不超过或不少于等来描述某种客观事物在数量上存在的不等关系.

在数学中，我们用不等式来表示这样的不等关系.

例如，限速 40 km/h 的路标，指示司机在前方路段行驶时，应使汽车的速度 v 不超过 40 km/h，写成不等式就是$v\leqslant 40$.

某品牌酸奶的质量检查规定，酸奶中脂肪的含量 f 应不少于 2.5%，蛋白质的含量 p 应不少于 2.3%，写成不等式组就是

$$\begin{cases} f\geqslant 2.5\%, \\ p\geqslant 2.3\%. \end{cases}$$

我们经常应用不等式来研究含有不等关系的问题. 下面来看几个具体的问题.

问题 1 设点 A 与平面 α 的距离为 d，B 为平面 α 上的任意一点，则 $d\leqslant |AB|$.

问题 2 某种杂志原以每本 2.5 元的价格销售，可以售出 8 万本. 据市场调查，若单价每提高 0.1 元，销售量就可能相应减少 2 000 本. 若把提价后杂志的定价设为 x 元，怎样用不等式表示销售的总收入仍不低于 20 万元呢?

分析：若杂志的定价为 x 元，则销售的总收入为 $\left(8-\dfrac{x-2.5}{0.1}\times 0.2\right)x$ 万元. 那么不等关系“销售的总收入不低于 20 万元”可以表示为不等式

$$\left(8-\frac{x-2.5}{0.1}\times 0.2\right)x\geqslant 20.$$

问题 3 某钢铁厂要把长度为 4 000 mm 的钢管截成

500 mm和 600 mm 两种. 按照生产的要求，600 mm 钢管的数量不能超过 500 mm 钢管的 3 倍. 怎样写出满足上述所有不等关系的不等式呢?

分析：假设截得 500 mm 的钢管 x 根，截得 600 mm 的钢管 y 根.

根据题意，应有如下的不等关系：

(1) 截得两种钢管的总长度不能超过 4 000 mm；

(2) 截得 600 mm 钢管的数量不能超过 500 mm 钢管数量的 3 倍；

(3) 截得两种钢管的数量都不能为负.

要同时满足上述三个不等关系，可以用下面的不等式组来表示：

$$\begin{cases} 500x+600y\leqslant 4\ 000; \\ 3x\geqslant y; \\ x\geqslant 0; \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

为了利用不等式研究不等关系，我们需要对不等式的性质有必要的了解.

我们知道，等式有一些基本性质，如“等式两边加(减)同一个数(或式子)，结果仍相等”. 不等式是否也有类似的性质呢?

从实数的基本性质(任意两个正数的和与积都是正数)出发，我们可以证明下列常用的不等式的基本性质：

(1) $a>b$，$b>c\Rightarrow a>c$；

(2) $a>b\Rightarrow a+c>b+c$；

(3) $a>b$，$c>0\Rightarrow ac>bc$；

(4) $a>b$，$c<0\Rightarrow ac<bc$.

例如，

$$\begin{aligned} a>b,\ c>0 &\Rightarrow a-b>0,\ c>0 \\ &\Rightarrow (a-b)c=ac-bc>0 \\ &\Rightarrow ac>bc. \end{aligned}$$

思考

利用上述基本性质，证明不等式的下列性质：

(1) $a>b$，$c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

(2) $a>b>0$，$c>d>0\Rightarrow ac>bd$；

(3) $a>b>0$，$n\in \mathbf{N}$，$n>1\Rightarrow a^n>b^n$；$\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$.

例 1 已知 $a>b>0$，$c<0$，求证

$$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}.$$

证明：因为 $a>b>0$，所以 $ab>0$，$\frac{1}{ab}>0$.

于是

$$a\times\frac{1}{ab}>b\times\frac{1}{ab},$$

即

$$\frac{1}{b}>\frac{1}{a}.$$

由 $c<0$，得

$$\frac{c}{a}>\frac{c}{b}.$$

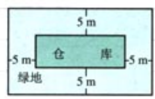
练 习

1. 用不等式表示下面的不等关系：

（1）a 与 b 的和是非负数；

（2）某公路立交桥对通过车辆的高度 h “限高 4 m”；

（3）如图，在一个面积为 350 m^2 的矩形地基上建造一个仓库，四周是绿地. 仓库的长 L 大于宽 W 的 4 倍.



第 1（3）题图

2. 有一个两位数大于 50 而小于 60，其个位数字比十位数字大 2. 试用不等式表示上述关系，并求出这个两位数（用 a 和 b 分别表示这个两位数的十位数字和个位数字）.

3. 用不等号“$>$”或“$<$”填空：

（1）$a>b$，$c<d\Rightarrow a-c$ ______ $b-d$；

（2）$a>b>0$，$c<d<0\Rightarrow ac$ ______ bd；

（3）$a>b>0\Rightarrow\sqrt[3]{a}$ ______ $\sqrt[3]{b}$；

（4）$a>b>0\Rightarrow\frac{1}{a^2}$ ______ $\frac{1}{b^2}$.

习题3.1

A 组

1. 举出几个现实生活中与不等式有关的例子.
2. 比较下面两组数的大小：

   (1) $2+\sqrt[3]{7}$与 4；

   (2) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$与$\sqrt{3}+\sqrt{14}$.
3. 已知 $x>-1$，求证 $\sqrt{1+x}<1+\frac{x}{2}$.
4. 某夏令营有 48 人，出发前要从 A、B 两种型号的帐篷中选择一种. A 型号的帐篷比 B 型号的少 5 顶. 若只选 A 型号的，每顶帐篷住 4 人，则帐篷不够；每顶帐篷住 5 人，则有一顶帐篷没有住满. 若只选 B 型号的，每顶帐篷住 3 人，则帐篷不够；每顶帐篷住 4 人，则有帐篷多余. 设 A 型号的帐篷有 x 顶，用不等式将题目中的不等关系表示出来.

5. 某市环保局为增加城市的绿地面积，提出两个投资方案：方案 A 为一次性投资 500 万元；方案 B 为第一年投资 5 万元，以后每年都比前一年增加 10 万元. 列出不等式表示“经 n 年之后，方案 B 的投入不少于方案 A 的投入”.

B 组

1. 比较下列各组中两个代数式的大小：

   (1) x^2+5x+6 与 $2x^2+5x+9$；

   (2) $(x-3)^2$ 与 $(x-2)(x-4)$；

   (3) 当 $x>1$ 时，x^3 与 x^2-x+1；

   (4) x^2+y^2+1 与 $2(x+y-1)$.
2. 已知 $a>b>0$，$c>d>0$，求证$\sqrt{\frac{a}{d}}>\sqrt{\frac{b}{c}}$.
3. 火车站有某公司待运的甲种货物 1 530 t，乙种货物 1 150 t. 现计划用 A、B 两种型号的车厢共 50 节运送这批货物. 已知 35 t 甲种货物和 15 t 乙种货物可装满一节 A 型货厢；25 t 甲种货物和 35 t 乙种货物可装满一节 B 型货厢，据此安排 A、B 两种货厢的节数，共有几种方案？若每节 A 型货厢的运费是 0.5 万元，每节 B 型货厢的运费是 0.8 万元，哪种方案的运费最少？

3.2 一元二次不等式及其解法

上网获取信息已经成为人们日常生活的重要组成部分．因特网服务公司（Internet Service Provider）的任务就是负责将用户的计算机接入因特网，同时收取一定的费用．

某同学要把自己的计算机接入因特网．现有两家 ISP 公司可供选择．公司 A 每小时收费 1.5 元；公司 B 的收费原则如图 3.2-1 所示，即在用户上网的第 1 小时内收费 1.7 元，第 2 小时内收费 1.6 元，以后每小时减少 0.1 元（若用户一次上网时间超过 17 小时，按 17 小时计算）．

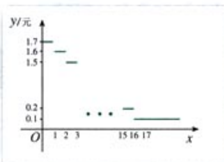


图 3.2-1

一般来说，一次上网时间不会超过 17 个小时，所以，不妨假设一次上网时间总小于 17 小时．那么，一次上网在多长时间以内能够保证选择公司 A 比选择公司 B 所需费用少？

假设一次上网 x 小时，则公司 A 收取的费用为

$$1.5x\ (\text{元}),$$

公司 B 收取的费用为

$$\frac{x(35-x)}{20}\ (\text{元}).$$

你知道 $\frac{x(35-x)}{20}$ 是怎样得来的吗？

如果能够保证选择公司 A 比选择公司 B 所需费用少，则

$$\frac{x(35-x)}{20}>1.5x\ (0<x<17),$$

整理得

$$x^2-5x<0. \qquad ①$$

这是一个关于 x 的一元二次不等式. 只要求得满足不等式①的解集，就得到了问题的答案.

我们把只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是2的不等式，称为一元二次不等式.

怎样求不等式①的解集呢?

我们先来考察它与二次函数 $y=x^2-5x$ 以及一元二次方程 $x^2-5x=0$ 的关系.

容易知道，方程 $x^2-5x=0$ 有两个实数根

$$x_1=0, \quad x_2=5.$$

由二次函数的零点与相应的一元二次方程根的关系，$x_1=0$，$x_2=5$ 是二次函数 $y=x^2-5x$ 的两个零点.

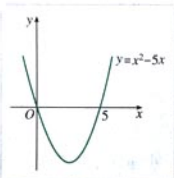


图 3.2-2

画出二次函数 $y=x^2-5x$ 的图象（图 3.2-2). 观察函数图象可知，当 $x<0$，或 $x>5$ 时，函数图象位于 x 轴上方，此时 $y>0$，即 $x^2-5x>0$；当 $0<x<5$ 时，函数图象位于 x 轴下方，此时 $y<0$，即 $x^2-5x<0$. 所以，一元二次不等式 $x^2-5x<0$ 的解集是

$$\{x \mid 0<x<5\}.$$

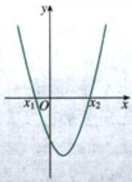
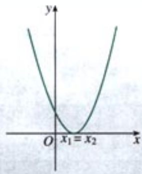
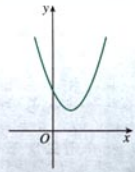
所以，当一次上网时间在 5 小时以内时，选择公司 A 的费用少；超过 5 小时，选择公司 B 的费用少.

在函数 $y=x^2-5x$ 的图象上任取一点 $P(x, y)$，观察当 P 点在抛物线上移动时，随着 P 的横坐标的变化，P 的纵坐标有什么变化.

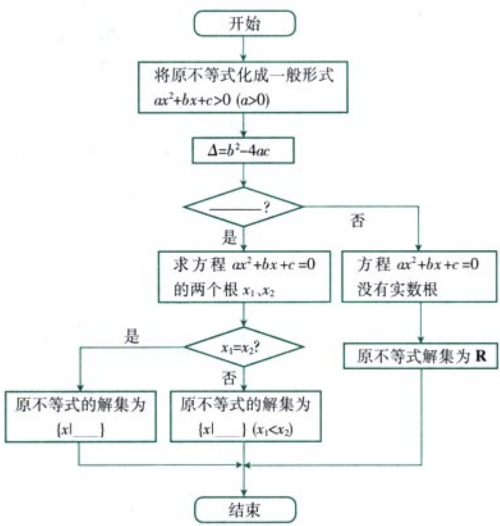
上述方法可以推广到求一般的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ 或 $ax^2+bx+c<0$ $(a>0)$ 的解集. 我们可以由函数的零点与相应一元二次方程根的关系，先求出一元二次方程的根，再根据函数图象与 x 轴的相关位置确定一元二次不等式的解集.

我们知道，对于一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ $(a>0)$，设 $\Delta=b^2-4ac$，它的解按照 $\Delta>0$，$\Delta=0$，$\Delta<0$ 可分为三种情况. 相应地，二次函数 $y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ 的图象与 x 轴的位置关系也分为三种情况. 因此，我们可分三种情况来讨论对应的一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ $(a>0)$ 的解集.

根据上述方法，请将下表填充完整.

$\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$
$y=ax^2+bx+c$ （$a>0$）的图象			
$ax^2+bx+c=0$ （$a>0$）的根			没有实数根
$ax^2+bx+c>0$ （$a>0$）的解集		$\{x \mid x\neq -\frac{b}{2a}\}$	
$ax^2+bx+c<0$ （$a>0$）的解集		$\varnothing$	

下面，我们用一个程序框图把求解一般一元二次不等式的过程表示出来，请同学们将判断框和处理框中的空格填充完整.



例 1　某种牌号的汽车在水泥路面上的刹车距离❶ s m 和汽车车速 x km/h 有如下关系：

$$s=\frac{1}{20}x+\frac{1}{180}x^2.$$

在一次交通事故中，测得这种车的刹车距离大于 39.5 m，那么这辆汽车刹车前的车速至少为多少？（精确到 0.01 km/h）

❶ 刹车距离是指汽车刹车后由于惯性往前滑行的距离.

解：设这辆汽车刹车前的车速至少为 x km/h，根据题意，我们得到

$$\frac{1}{20}x+\frac{1}{180}x^2>39.5.$$

移项整理，得

$$x^2+9x-7\ 110>0.$$

显然 $\Delta>0$，方程 $x^2+9x-7\ 110=0$ 有两个实数根，即

$$x_1\approx-88.94,\quad x_2\approx79.94.$$

然后，画出二次函数 $y=x^2+9x-7\ 110$ 的图象（图 3.2-3）. 由图象得不等式的解集为

$$\{x\mid x<-88.94，或\ x>79.94\}$$

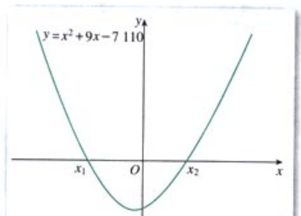


图 3.2-3

在这个实际问题中，$x>0$，所以这辆汽车刹车前的车速至少为79.94 km/h.

例 2　求不等式 $4x^2-4x+1>0$ 的解集.

解：注意到

$$4x^2-4x+1=(2x-1)^2\geqslant0,$$

所以原不等式的解集为

$$\left\{x \middle| x\neq\frac{1}{2}\right\}.$$

例 3 求不等式$-x^2+2x-3>0$的解集.

解：不等式可化为

$$x^2-2x+3<0.$$

因为$\Delta=-8<0$，方程$x^2-2x+3=0$无实数根，而$y=x^2-2x+3$的图象开口向上，所以原不等式的解集为$\varnothing$.

例 4 一个车辆制造厂引进了一条摩托车整车装配流水线，这条流水线生产的摩托车数量x(辆)与创造的价值y(元)之间有如下的关系：

$$y=-2x^2+220x.$$

若这家工厂希望在一个星期内利用这条流水线创收6 000元以上，那么它在一个星期内大约应该生产多少辆摩托车？

解：设在一个星期内大约应该生产x辆摩托车. 根据题意，我们得到

$$-2x^2+220x>6\ 000.$$

移项整理，得

$$x^2-110x+3\ 000<0.$$

因为$\Delta=100>0$，所以方程$x^2-110x+3\ 000=0$有两个实数根

$$x_1=50,\quad x_2=60.$$

由二次函数$y=x^2-110x+3\ 000$的图象（图 3.2-4），得不等式的解为

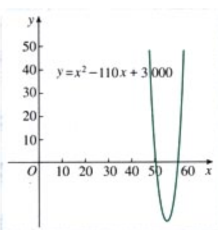


图 3.2-4

$$50<x<60.$$

因为 x 只能取整数值，所以，当这条摩托车整车装配流水线在一周内生产的摩托车数量在 51～59 辆之间时，这家工厂能够获得 6 000 元以上的收益．

练　习

1. 求下列不等式的解集：

(1) $4x^2-4x>15$；　(2) $3x^2-7x\leqslant 10$；

(3) $-2x^2+x-5<0$；　(4) $-x^2+4x-4<0$；

(5) $x^2-x+\frac{1}{4}>0$；　(6) $-2x^2+x<-3$；

(7) $12x^2-31x+20>0$；　(8) $3x^2+5x<0$．

2. 自变量 x 在什么范围取值时，下列函数的值等于 0？大于 0 呢？小于 0 呢？

(1) $y=3x^2-6x+2$；　(2) $y=25-x^2$；

(3) $y=x^2+6x+10$；　(4) $y=-3x^2+12x-12$．

习题 3.2

A 组

1. 求下列不等式的解集：

(1) $4x^2-4x>15$；　(2) $13-4x^2>0$；

(3) $x^2-3x-10>0$；　(4) $x(9-x)>0$．

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-4x+9}$；　(2) $y=\sqrt{-2x^2+12x-18}$．

3. 若关于 x 的一元二次方程 $x^2-(m+1)x-m=0$ 有两个不相等的实数根，求 m 的取值范围．

4. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-16<0\}$，$B=\{x \mid x^2-4x+3>0\}$，求 $A\cup B$．

5. 在一次体育课上，某同学以初速度 $v_0=12\ \mathrm{m/s}$ 竖直上抛一排球，该排球能够在地面 2 m 以上的位置最多停留多长时间？（注：若不计空气阻力，则竖直上抛的物体距离地面的高度 h 与时间 x 满足关系 $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$，其中 $g=9.8\ \mathrm{m/s^2}$.）

（第 5 题）

6. 某文具店购进一批新型台灯，若按每盏台灯 15 元的价格销售，每天能卖出 30 盏；若售价每提高 1 元，日销售量将减少 2 盏. 为了使这批台灯每天获得 400 元以上的销售收入，应怎样制定这批台灯的销售价格？

B 组

1. 求下列不等式的解集：

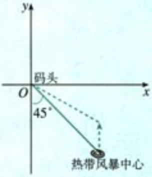
(1) $4x^2-20x<25$；　　(2) $(x-3)(x-7)<0$；

(3) $-3x^2+5x-4>0$；　　(4) $x(1-x)>x(2x-3)+1$.

2. m 是什么实数时，关于 x 的一元二次方程 $mx^2-(1-m)x+m=0$ 没有实数根？

3. 已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2-3x-\frac{3}{4}$，求使函数值大于 0 的 x 的取值范围.

4. 据气象部门预报，在距离某码头南偏东 45°方向 600 km 处的热带风暴中心正以 20 km/h 的速度向正北方向移动，距风暴中心 450 km 以内的地区都将受到影响. 从现在起多长时间后，该码头将受到热带风暴的影响，影响时间大约为多长？



（第 4 题）

3.3 二元一次不等式（组）与简单的线性规划问题

3.3.1 二元一次不等式（组）与平面区域

在现实生活和数学中，我们会遇到各种不同的不等关系，需要用不同的数学模型来刻画和研究它们. 前面我们学习了一元二次不等式及其解法，这里我们将学习另一种不等关系的模型.

先看一个实际例子.

一家银行的信贷部计划年初投入 25 000 000 元用于企业和个人贷款，希望这笔资金至少可带来 30 000 元的收益，其中从企业贷款中获益 12%，从个人贷款中获益 10%. 那么，信贷部应该如何分配资金呢？

这个问题中存在一些不等关系，我们应该用什么不等式模型来刻画它们呢？

> 我们把含有两个未知数，并且未知数的次数是 1 的不等式称为**二元一次不等式**.

设用于企业贷款的资金为 x 元，用于个人贷款的资金为 y 元. 由资金总数为 25 000 000 元，得到

$$x+y\leqslant 25\,000\,000. \quad ①$$

由于预计企业贷款创收 12%，个人贷款创收 10%，共创收 30 000 元以上，所以

$$(12\%)x+(10\%)y\geqslant 30\,000,$$

即

$$12x+10y\geqslant 3\,000\,000. \quad ②$$

最后考虑到用于企业贷款和个人贷款的资金数额都不能是负值，于是

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0. \quad ③$$

将①②③合在一起，得到分配资金应该满足的条件：

$$\begin{cases} x+y\leqslant 25\ 000\ 000, \\ 12x+10y\geqslant 3\ 000\ 000, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

我们把由几个二元一次不等式组成的不等式组称为二元一次不等式组.

满足二元一次不等式（组）的 x 和 y 的取值构成有序数对 $(x,\ y)$，所有这样的有序数对 $(x,\ y)$ 构成的集合称为**二元一次不等式（组）的解集**. 有序数对可以看成直角坐标平面内点的坐标. 于是，二元一次不等式（组）的解集就可以看成直角坐标系内的点构成的集合.

思考

我们知道，一元一次不等式（组）的解集可以表示为数轴上的区间，例如，$\begin{cases} x+3>0, \\ x-4<0 \end{cases}$ 的解集为数轴上的一个区间（图 3.3-1）. 那么，在直角坐标系内，二元一次不等式（组）的解集表示什么图形呢？

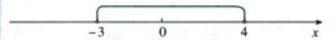


图 3.3-1

我们不妨先研究一个具体的二元一次不等式

$$x-y<6$$

的解集所表示的图形.

如图 3.3-2，在平面直角坐标系中，$x-y=6$ 表示一条直线. 平面内所有的点被直线 $x-y=6$ 分成三类：在直线 $x-y=6$ 上的点；在直线 $x-y=6$ 左上方的区域内的点；在

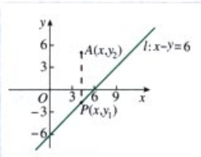


图 3.3-2

直线 $x-y=6$ 右下方的区域内的点.

设点 $P(x, y_1)$ 是直线 l 上的点，选取点 $A(x, y_2)$，使它的坐标满足不等式 $x-y<6$，填表 3-1，并在图 3.3-2 中标出点 P 和点 A.

表 3-1

横坐标 x	-3	-2	-1	0	1	2	3
点 P 的纵坐标 y_1							
点 A 的纵坐标 y_2							

探究

当点 A 与点 P 有相同的横坐标时，它们的纵坐标有什么关系？据此说说，直线 l 左上方点的坐标与不等式 $x-y<6$ 有什么关系？直线 l 右下方点的坐标呢？

可以发现，在平面直角坐标系中，以二元一次不等式 $x-y<6$ 的解为坐标的点都在直线 l 的左上方；反过来，直线 l 左上方点的坐标都满足不等式 $x-y<6$. 因此，在平面直角坐标系中，不等式 $x-y<6$ 表示直线 $x-y=6$ 左上方的平面区域，如图 3.3-3. 类似地，二元一次不等式 $x-y>6$ 表示直线 $x-y=6$ 右下方的平面区域（图 3.3-4）. 直线 $x-y=6$ 叫做这两个区域的**边界** (boundary). 这里，我们把直线 $x-y=6$ 画成虚线，以表示区域不包括边界.

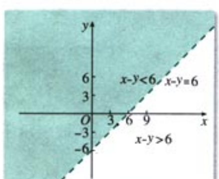


图 3.3-3

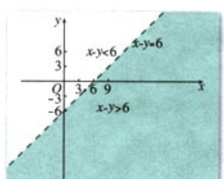


图 3.3-4

一般地，在平面直角坐标系中，二元一次不等式

$$Ax+By+C>0$$

表示直线 $Ax+By+C=0$ 某一侧所有点组成的平面区域，我们把直线画成虚线，以表示区域不包括边界.

不等式

$$Ax+By+C\geqslant 0$$

表示的平面区域包括边界，把边界画成实线.

对于直线 $Ax+By+C=0$ 同一侧的所有点，把它的坐标 (x, y) 代入 $Ax+By+C$，所得的符号都相同，因此只需在直线 $Ax+By+C=0$ 的同一侧取某个特殊点 (x_0, y_0) 作为测试点，由 Ax_0+By_0+C 的符号就可以断定 $Ax+By+C>0$ 表示的是直线 $Ax+By+C=0$ 哪一侧的平面区域. 下面我们看几个例子.

例 1 画出不等式 $x+4y<4$ 表示的平面区域.

当 $C\neq 0$ 时，常取原点 $(0, 0)$ 为测试点.

解：先作出边界 $x+4y=4$，因为这条线上的点都不满足 $x+4y<4$，所以画成虚线.

取原点 $(0, 0)$，代入 $x+4y-4=0$. 因为

$$0+4\times 0-4=-4<0,$$

所以原点 $(0, 0)$ 在 $x+4y-4<0$ 表示的平面区域内，不等式 $x+4y<4$ 表示的区域如图 3.3-5.

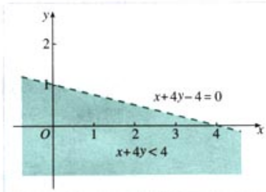


图 3.3-5

例 2 用平面区域表示不等式组

$$\begin{cases} y<-3x+12, \\ x<2y \end{cases}$$

的解集.

分析：由于所求平面区域的点的坐标要同时满足两个不等式，因此二元一次不等式组表示的平面区域是各个不等式

表示的平面区域的交集，即各个不等式表示的平面区域的公共部分.

解：不等式 $y<-3x+12$ 表示直线 $y=-3x+12$ 下方的区域；不等式 $x<2y$ 表示直线 $y=\frac{1}{2}x$ 上方的区域. 取两区域重叠的部分，图 3.3-6 中的阴影部分就表示原不等式组的解集.

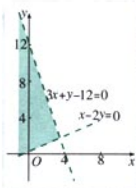


图 3.3-6

例 3　某人准备投资 1 200 万元兴办一所完全中学. 对教育市场进行调查后，他得到了下面的数据表格（以班级为单位）❶：

学段	班级学生数	配备教师数	硬件建设/万元	教师年薪/万元
初中	45	2	26/班	2/人
高中	40	3	54/班	2/人

❶ 初、高中的教育周期均为三年. 办学规模以 20～30 个班为宜，教师实行聘任制.

分别用数学关系式和图形表示上述限制条件.

解：设开设初中班 x 个，高中班 y 个. 根据题意，总共招生班数应限制在 20～30 之间，所以有

$$20\leqslant x+y\leqslant 30.$$

考虑到所投资金的限制，得到

$$26x+54y+2\times 2x+2\times 3y\leqslant 1\,200,$$

即

$$x+2y\leqslant 40.$$

另外，开设的班数不能为负，则

$$x\geqslant 0,\ y\geqslant 0.$$

把上面四个不等式合在一起，得到：

$$\begin{cases}20\leqslant x+y\leqslant 30,\\ x+2y\leqslant 40,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

用图形表示这个限制条件，得到图 3.3-7 中的平面区域（阴影部分）.

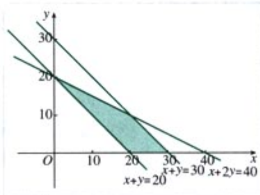


图 3.3-7

例 4 一个化肥厂生产甲、乙两种混合肥料，生产 1 车皮甲种肥料的主要原料是磷酸盐 4 t、硝酸盐 18 t；生产1 车皮乙种肥料需要的主要原料是磷酸盐 1 t、硝酸盐 15 t. 现库存磷酸盐 10 t、硝酸盐 66 t，在此基础上生产这两种混合肥料. 列出满足生产条件的数学关系式，并画出相应的平面区域.

解：设 x，y 分别为计划生产甲、乙两种混合肥料的车皮数，于是满足以下条件：

$$\begin{cases}4x+y\leqslant 10,\\ 18x+15y\leqslant 66,\\ x\geqslant 0,\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

在直角坐标系中可表示成图 3.3-8 中的平面区域（阴影部分）.

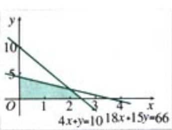


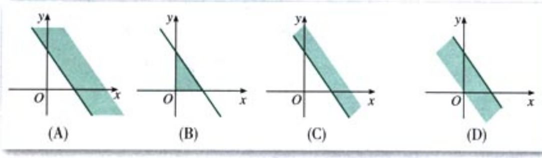
图 3.3-8

练 习

1. 不等式 $x-2y+6>0$ 表示的区域在直线 $x-2y+6=0$ 的（　　）

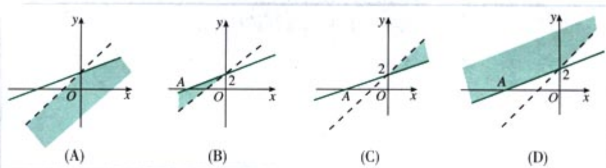
(A) 右上方.　(B) 右下方.　(C) 左上方.　(D) 左下方.

2. 不等式 $3x+2y-6<0$ 表示的平面区域是（　　）.



（第 2 题）

3. 不等式组 $\begin{cases} x-3y+6\geqslant 0 \\ x-y+2<0 \end{cases}$ 表示的平面区域是（　　）.



（第 3 题）

4. 一个小型家具厂计划生产两种类型的桌子 A 和 B. 每类桌子都要经过打磨、着色、上漆三道工序. 桌子 A 需要 10 min 打磨，6 min 着色，6 min 上漆；桌子 B 需要 5 min 打磨，12 min着色，9 min 上漆. 如果一个工人每天打磨和上漆分别至多工作 450 min，着色每天至多工作480 min，请你列出满足生产条件的数学关系式，并在直角坐标系中画出相应的平面区域.

3.3.2 简单的线性规划问题

在现实生产、生活中，经常会遇到资源利用、人力调配、生产安排等问题.

例如，某工厂用A、B两种配件生产甲、乙两种产品，每生产一件甲产品使用4个A配件耗时1 h，每生产一件乙产品使用4个B配件耗时2 h，该厂每天最多可从配件厂获得16个A配件和12个B配件，按每天工作8 h计算，该厂所有可能的日生产安排是什么？

设甲、乙两种产品分别生产x、y件，由已知条件可得二元一次不等式组：

$$\begin{cases} x+2y\leqslant 8, \\ 4x\leqslant 16, \\ 4y\leqslant 12, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases} \qquad (1)$$

如图3.3-9，将上述不等式组表示成平面上的区域，图中的阴影部分中的整点（坐标为整数的点）就代表所有可能的日生产安排，即当点$P(x, y)$在上述平面区域中时，所安排的生产任务x，y才有意义.

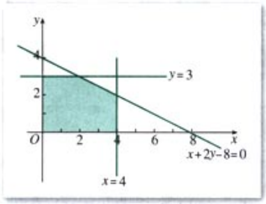


图3.3-9

进一步，若生产一件甲产品获利2万元，生产一件乙产品获利3万元，采用哪种生产安排利润最大？

设生产甲产品x件，乙产品y件时，工厂获得的利润为z，则$z=2x+3y$. 这样，上述问题就转化为：当x，y满足不等式组（1）并且为非负整数时，z的最大值是多少？

把$z=2x+3y$变形为$y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{z}{3}$，这是斜率为$-\dfrac{2}{3}$，在$y$轴上的截距为$\dfrac{z}{3}$的直线. 当$z$变化时，可以得到一族互相平行的直线（图3.3-10）. 由于这些直线的斜率是确定的，因此只要给定一个点（例如（1，2）），就能确定一条直线

$\left(y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}\right)$. 这说明，截距$\frac{z}{3}$可以由平面内的一个点的坐标唯一确定. 可以看到，直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$与表示不等式组（1）的区域的交点坐标满足不等式组（1），而且当截距$\frac{z}{3}$最大时，z 取最大值. 因此，问题可以转化为当直线$y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$与不等式组（1）确定的平面区域有公共点时，在区域内找一个点 P，使直线经过点 P 时截距$\frac{z}{3}$最大.

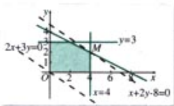


图 3.3-10

由图 3.3-10 可以看出，当直线 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{z}{3}$经过直线 $x=4$ 与直线 $x+2y-8=0$ 的交点 $M(4, 2)$ 时，截距$\frac{z}{3}$的值最大，最大值为$\frac{14}{3}$. 这时 $2x+3y=14$. 所以，每天生产甲产品 4 件、乙产品 2 件时，工厂可获最大利润 14 万元.

在上述问题中，不等式组（1）是一组对变量 x、y 的约束条件，这组约束条件都是关于 x、y 的一次不等式，所以又称为线性约束条件. 我们把要求最大值的函数 $z=2x+3y$ 称为**目标函数**（objective function），又因这里的 $z=2x+3y$ 是关于变量 x、y 的一次解析式，所以又称为**线性目标函数**（linear objectives）. 目标函数中的变量要满足的线性约束条件除了用一次不等式表示外，有时也用一次方程表示. 一般的，在线性约束条件下求线性目标函数的最大值或最小值问题，统称为**线性规划**（linear program）问题. 满足线性约束条件的解 (x, y) 叫做**可行解**（feasible solution），由所有可行解组成的集合叫做**可行域**（feasible region），其中，使目标函数取得最大值或最小值的可行解叫做这个问题的最优解. 上述问题的可行域就是图 3.3-10 的阴影部分，其中可行解（4，2）为最优解.

探究

(1) 在上述问题中，如果每生产一件甲产品获利 3 万元，每生产一件乙产品获利 2 万元，又应当如何安排生产才能获得最大利润？再换几组数据试试.

(2) 由上述过程，你能得出最优解与可行域之间的关系吗？

例 5 营养学家指出，成人良好的日常饮食应该至少提供 0.075 kg 的碳水化合物，0.06 kg 的蛋白质，0.06 kg 的脂肪. 1 kg 食物 A 含有 0.105 kg 碳水化合物，0.07 kg 蛋白质，0.14 kg 脂肪，花费 28 元；而 1 kg 食物 B 含有 0.105 kg 碳水化合物，0.14 kg 蛋白质，0.07 kg 脂肪，花费 21 元. 为了满足营养专家指出的日常饮食要求，同时使花费最低，需要同时食用食物 A 和食物 B 多少 kg？

分析：将已知数据列成下表：

食物/kg	碳水化合物/kg	蛋白质/kg	脂肪/kg
A	0.105	0.07	0.14
B	0.105	0.14	0.07

解：设每天食用 x kg 食物 A，y kg 食物 B，总成本为 z. 那么

$$\begin{cases} 0.105x+0.105y\geqslant 0.075, \\ 0.07x+0.14y\geqslant 0.06, \\ 0.14x+0.07y\geqslant 0.06, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0; \end{cases} \quad ①$$

目标函数为

$$z=28x+21y.$$

二元一次不等式组①等价于

$$\begin{cases} 7x+7y\geqslant 5, \\ 7x+14y\geqslant 6, \\ 14x+7y\geqslant 6, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases} \quad ②$$

作出二元一次不等式组②所表示的平面区域（图 3.3-11），即可行域.

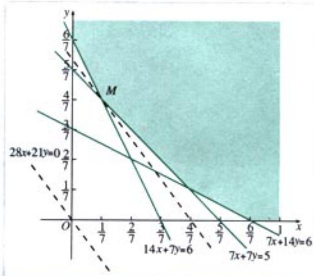


图 3.3-11

考虑 $z=28x+21y$，将它变形为 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{z}{28}$，这是斜率为 $-\frac{4}{3}$、随 z 变化的一族平行直线. $\frac{z}{28}$ 是直线在 y 轴上的截距，当 $\frac{z}{28}$ 取最小值时，z 的值最小. 当然直线要与可行域相交，即在满足约束条件时目标函数 $z=28x+21y$ 取得最小值.

由图 3.3-11 可见，当直线 $z=28x+21y$ 经过可行域上的点 M 时，截距 $\frac{z}{28}$ 最小，即 z 最小.

解方程组

$$\begin{cases}7x+7y=5,\\14x+7y=6,\end{cases}$$

得 M 的坐标为

$$x=\frac{1}{7},\ y=\frac{4}{7}.$$

所以 $z_{\min}$❶ $=28x+21y=16$.

由此可知，每天食用食物 A 约 143 g，食物 B 约 571 g，能够满足日常饮食要求，又使花费最低，最低成本为 16 元.

❶ min 是 minimum（最小值）的缩写.

例 6　在上一节例 3 中，若根据有关部门的规定，初中每人每年可收取学费 1 600 元，高中每人每年可收取学费 2 700元. 那么开设初中班和高中班各多少个，每年收取的学费总额最多？

解：设开设初中班 x 个，高中班 y 个，收取的学费总额为 z 万元.

此时，目标函数为 $z=0.16\times45x+0.27\times40y$，可行域如图 3.3-7.

把 $z=7.2x+10.8y$ 变形为 $y=-\frac{2}{3}x+\frac{5}{54}z$，得到斜率为 $-\frac{2}{3}$，在 y 轴上的截距为 $\frac{5}{54}z$，随 z 变化的一族平行直线.

由图 3.3-12 可以看出，当直线 $z=7.2x+10.8y$ 经过可行域上的点 M 时，截距 $\frac{5}{54}z$ 最大，即 z 最大.

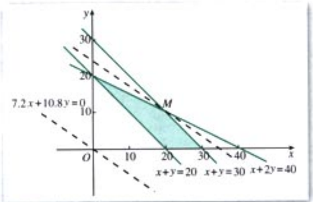


图 3.3-12

解方程组

$$\begin{cases}x+y=30,\\x+2y=40,\end{cases}$$

得 M 的坐标为

$$x=20,\ y=10.$$

所以 z_{max}❶ $=7.2x+10.8y=252$.

由此可知，开设 20 个初中班和 10 个高中班，收取的学费最多，为 252 万元.

❶ max 是 maximum（最大值）的缩写.

例 7 在上一节例 4 中，若生产 1 车皮甲种肥料，产生的利润为 10 000 元；生产 1 车皮乙种肥料，产生的利润为 5 000元. 那么分别生产甲、乙两种肥料各多少车皮，能够产生最大的利润?

解：设生产甲种肥料 x 车皮、乙种肥料 y 车皮，能够产生利润 z 万元. 目标函数为 $z=x+0.5y$，可行域如图 3.3-8.

把 $z=x+0.5y$ 变形为 $y=-2x+2z$，得到斜率为 -2，

在 y 轴上的截距为 $2z$，随 z 变化的一族平行直线.

由图 3.3-13 可以看出，当直线 $y=-2x+2z$ 经过可行域上的点 M 时，截距 $2z$ 最大，即 z 最大.

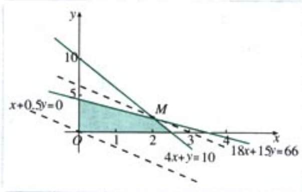


图 3.3-13

解方程组

$$\begin{cases}18x+15y=66,\\4x+y=10,\end{cases}$$

得 M 的坐标为

$$x=2,\ y=2.$$

所以 $z_{\max}=x+0.5y=3$.

由此可知，生产甲种、乙两种肥料各 2 车皮，能够产生最大利润，最大利润为 3 万元.

练　习

1. 解下列线性规划问题：

（1）求 $z=2x+y$ 的最大值，使 x、y 满足约束条件

$$\begin{cases}y\leqslant x,\\x+y\leqslant 1,\\y\geqslant -1.\end{cases}$$

（2）求 $z=3x+5y$ 的最大值和最小值，使 x、y 满足约束条件

$$\begin{cases}5x+3y\leqslant 15,\\y\leqslant x+1,\\x-5y\leqslant 3.\end{cases}$$

2. 某厂拟生产甲、乙两种适销产品，每件销售收入分别为 3 000 元、2 000 元．甲、乙产品都需要在 A、B 两种设备上加工，在每台 A、B 上加工 1 件甲所需工时分别为 1 h、2 h，加工 1 件乙所需工时分别为 2 h、1 h，A、B 两种设备每月有效使用台时数分别为 400 h 和 500 h．如何安排生产可使收入最大？

错在哪儿

在一节解不等式课上，刘老师给出了一道题，让同学们先求解，题目是这样的：

已知

$$\begin{cases}1\leqslant x+y\leqslant 3, & ①\\ -1\leqslant x-y\leqslant 1, & ②\end{cases}$$

求 $4x+2y$ 的值域.

题目给出后，同学们马上投入紧张的解答中，结果很快出来了. 可是，大家解出的结果却有两个，而且都觉得自己的没错，于是同学们分成了两派，展开了激烈的辩论，结果谁也说服不了谁. 于是刘老师让两边各派一名代表，把自己的解法写到黑板上.

第一种解法：联立①②这两个不等式，用类似于解二元一次方程组的方法分别求出 x 和 y 的范围，然后直接代入后面的式子求范围，即：

①+②，得

$$0\leqslant 2x\leqslant 4，即 0\leqslant 4x\leqslant 8. \qquad ③$$

②×(−1)，得

$$-1\leqslant y-x\leqslant 1. \qquad ④$$

①+④，得

$$0\leqslant 2y\leqslant 4. \qquad ⑤$$

代入 $4x+2y$，得

$$0\leqslant 4x+2y\leqslant 12.$$

第二种解法：因为

$$4x+2y=3(x+y)+(x-y),$$

且由已知条件有

$$3\leqslant 3(x+y)\leqslant 9, \qquad ⑥$$

$$-1\leqslant x-y\leqslant 1, \qquad ⑦$$

将⑥⑦二式相加，得

$$2\leqslant 4x+2y=3(x+y)+(x-y)\leqslant 10.$$

为什么两种解法的结果不一样呢？

学习了本节的内容，你应该能够解释出现这种情况的原因了吧？实际上，不等式①②确定了一个平面区域（图 1）. 由图 1 可以看出，x 和 y 并不是相互独立的关系，而是由不等式组决定的相互制约的关系. x 取得最大（小）值时，y 并不能同时取得最大（小）值；y 取得最大（小）值时，x 并不能同时取得最大（小）值. 第一种解法的问题正在于此，由于忽略了

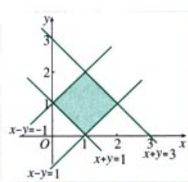


图 1

x 和 y 的相互制约关系，所得出的取值范围比实际的范围要大．第二种解法整体上保持了 x 和 y 的相互制约关系，因而得出的范围是准确的．

同学们现在明白了吗？

习题3.3

A 组

1．画出下列不等式表示的平面区域：

(1) $x+y\leqslant 2$；　(2) $2x-y>2$；　(3) $y\leqslant -2$；　(4) $x\geqslant 3$．

2．画出不等式组 $\begin{cases}-x+y-2\leqslant 0\\ x+y-4\leqslant 0\\ x-3y+3\leqslant 0\end{cases}$ 表示的平面区域．

3．电视台应某企业之约播放两套连续剧．其中，连续剧甲每次播放时间为 80 min，广告时间为 1 min，收视观众为 60 万；连续剧乙每次播放时间为 40 min，广告时间为 1 min，收视观众为 20 万．已知此企业与电视台达成协议，要求电视台每周至少播放 6 min 广告，而电视台每周只能为该企业提供不多于 320 min 的节目时间．如果你是电视台的制片人，电视台每周应播映两套连续剧各多少次，才能获得最高的收视率？

4．某家电生产企业根据市场调查分析，决定调整产品生产方案，准备每周（按 40 个工时计算）生产空调器、彩电、冰箱共 120 台，且冰箱至少生产 20 台．已知生产这些家电产品每台所需工时和每台产值如下表：

家电名称	空调器	彩　电	冰　箱
工　时	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
产值/千元	4	3	2

问每周应生产空调器、彩电、冰箱各多少台，才能使产值最高？最高产值是多少？（以千元为单位）

B 组

1. 画出二元一次不等式组

$$\begin{cases}2x+3y\leqslant 12\\2x+3y>-6\\x\geqslant 0\\y\geqslant 0\end{cases}$$

所表示的平面区域.

2. 画出$(x+2y-1)(x-y+3)>0$表示的平面区域.

3. 甲、乙两个粮库要向 A、B 两镇运送大米，已知甲库可调出 100 t 大米，乙库可调出 80 t 大米，A 镇需 70 t 大米，B 镇需 110 t 大米. 两库到两镇的路程和运费如下表：

	路程/km		运费/(元 · t^{-1} · km^{-1})	
	甲库	乙库	甲库	乙库
A 镇	20	15	12	12
B 镇	25	20	10	8

(1) 这两个粮库各运往 A、B 两镇多少 t 大米，才能使总运费最省？此时总运费是多少？

(2) 最不合理的调运方案是什么？它使国家造成的损失是多少？

用 Excel 解线性规划问题举例

通过前面的学习，我们已经能利用平面区域来解决线性规划问题了. 事实上，许多计算机软件都提供了解线性规划问题简单而有效的工具. 下面我们就以 Excel 为例，用它的“规划求解”工具解第 3.3.2 节例 1 的线性规划问题. 具体操作步骤如下：

1. 打开 Excel 菜单栏中“工具”选项的菜单，单击其中的“加载宏”命令，就可以打开“加载宏”的窗口，选中其中的“规划求解”，单击“确定”按钮.

2. 在工作表中输入例 1 中的数据和限制条件，并将单元格 B2、C2、D3 分别作为变量 x、y 的解和最值 z 的输出区域，如图 1 所示.

	A	B	C	D	E	F
1		x	y	计算值	条件限制	
2	变元					
3	目标函数	28	21			
4	条件1	0.105	0.105		0.075	
5	条件2	0.07	0.14		0.06	
6	条件3	0.14	0.07		0.06	
7						

图 1

3. 在单元格 D3 中输入公式“=$B$2*B3+$C$2*C3”(该公式即为目标函数)，把这个公式分别复制到单元格 D4（双击 D4 可见公式变为“=$B$2*B4+$C$2*C4”，表示 $0.105x+0.105y$)、D5 和 D6.

4. 选中单元格 D3，打开“工具”菜单，单击“规划求解”命令，弹出“规划求解参数”对话框，如图 2 所示. 在“等于”栏中选择“最小值”，在“可变单元格”框中输入“$B$2:$C$2”.

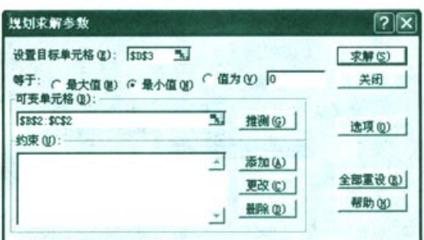


图 2

单击“约束”中的“添加”按钮，打开“添加约束”对话框，在“单元格引用位置”框中输入“$D$4”，在下拉式比较符列表中选择“>=”，在“约束值〔C〕:”框中输入“$E$4”(表示约束条件 $0.105x+0.105y\geqslant 0.075$)，如图 3 所示. 单击“添加”按钮，

类似地完成其他约束条件的输入，即“D5$E$5”、“$D$6>=$E$6”“$D$4>=$E$4”.

图 3

最后，输入变元非负条件“$B$2:$C$2>=0”(图 4).

图 4

单击“确定”按钮后，结果如图 5 所示.

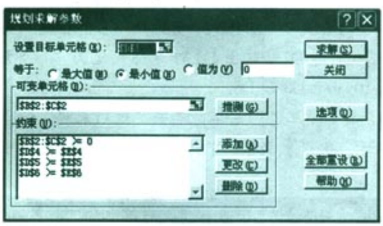


图 5

点击“求解”按钮完成求解(图 6):

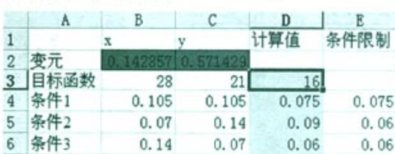


图 6

即当 $x=0.142\ 857$，$y=0.571\ 429$ 时，$z_{\min}=16$.

上面我们只举了一个简单的线性规划例子，使用 Excel 还可以解决多变量的线性规划问题和非线性规划问题，有兴趣的同学可以参考 Excel 中的“规划求解”帮助菜单.

3.4 基本不等式：$\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$

探究

图 3.4-1 是在北京召开的第 24 届国际数学家大会的会标，会标是根据中国古代数学家赵爽的弦图设计的，颜色的明暗使它看上去像一个风车，代表中国人民热情好客. 你能在这个图中找出一些相等关系或不等关系吗？

图 3.4-1

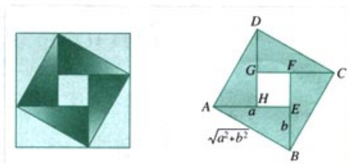


图 3.4-2

将图 3.4-1 中的“风车”抽象成图 3.4-2. 在正方形 $ABCD$ 中有 4 个全等的直角三角形. 设直角三角形的两条直角边的长为 a、b，那么正方形的边长为 $\sqrt{a^2+b^2}$. 这样，4 个直角三角形的面积和为 $2ab$，正方形的面积为 a^2+b^2. 由于 4 个直角三角形的面积和小于正方形 $ABCD$ 的面积，我们就得到了一个不等式

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab.$$

当直角三角形变为等腰直角三角形，即 $a=b$ 时，正方形 $EFGH$ 缩为一个点，这时有

$$a^2+b^2=2ab.$$

一般地，对于任意实数 a，b，我们有

$$a^2+b^2\geqslant 2ab,$$

当且仅当 $a=b$ 时，等号成立.

你能给出它的证明吗？

特别地，如果 $a>0$，$b>0$，我们用 $\sqrt{a}$、$\sqrt{b}$ 分别代替 a、b，可得

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}.$$

通常我们把上式写作

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\ (a>0,\ b>0).\qquad (*)$$

以上我们从几何图形中的面积关系获得了不等式（*）. 能否利用不等式的性质，直接推导出这个不等式呢？我们一起来分析一下.

要证

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},\qquad ①$$

只要证

$$a+b\geqslant\underline{\qquad},\qquad ②$$

要证②，只要证

$$a+b-\underline{\qquad}\geqslant 0.\qquad ③$$

要证③，只要证

$$(\underline{\quad}-\underline{\quad})^2\geqslant 0.\qquad ④$$

显然，④是成立的. 当且仅当 $a=b$ 时，④中的等号成立.

这样就又一次得到了基本不等式（*）.

探究

在图 3.4-3 中，AB 是圆的直径，点 C 是 AB 上一点，$AC=a$，$BC=b$. 过点 C 作垂直于 AB 的弦 DE，连接 AD、BD. 你能利用这个图形，得出不等式（*）的几何解释吗？

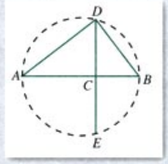


图 3.4-3

如图 3.4-3，可证 $\Delta ACD\backsim\Delta BCD$，因而 $CD=\sqrt{ab}$. 由于 CD 小于或等于圆的半径，用不等式表示为

$$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}.$$

我们常把$\frac{a+b}{2}$叫做正数 a，b 的算术平均数，把$\sqrt{ab}$叫做正数a，b的几何平均数.

显然，上述不等式当且仅当点 C 与圆心重合，即当 $a=b$ 时，等号成立.

不等式（*）是一个基本不等式，它在解决实际问题中有广泛的应用，是解决最大（小）值问题的有力工具.

我们来看两个例子.

例 1 （1）用篱笆围一个面积为 100 m^2 的矩形菜园，问这个矩形的长、宽各为多少时，所用篱笆最短. 最短的篱笆是多少？

（2）一段长为 36 m 的篱笆围成一个矩形菜园，问这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大. 最大面积是多少？

分析：对于（1），矩形菜园的面积是确定的，长和宽没有确定. 如果长和宽确定了，篱笆的长也就确定了，因此我们要解决的问题是：当面积确定时，长和宽取什么值时篱笆的长最短？

对于（2），矩形菜园的周长是确定的，长和宽没有确定. 如果长和宽确定了，矩形菜园的面积也就确定了. 因此我们要解决的问题是：当周长确定时，长和宽取什么值时篱笆围成的面积最大？

解：（1）设矩形菜园的长为 x m，宽为 y m，则 $xy=100$，篱笆的长为 $2(x+y)$ m.

由

$$\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy},$$

可得

$$x+y\geqslant 2\sqrt{100},$$
$$2(x+y)\geqslant 40.$$

等号当且仅当 $x=y$ 时成立，此时 $x=y=10$.

因此，这个矩形的长、宽都为 10 m 时，所用篱笆最短，最短篱笆是 40 m.

（2）设矩形菜园的长为 x m，宽为 y m，则 $2(x+y)=36$，$x+y=18$，矩形菜园的面积为 xy m^2.

由

$$\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}=\frac{18}{2}=9,$$

可得

$$xy\leqslant 81,$$

当且仅当 $x=y$，即 $x=y=9$ 时，等号成立.

因此，这个矩形的长、宽都为 9 m 时，菜园的面积最大，最大面积是 81 m^2.

例 2 某工厂要建造一个长方体形无盖贮水池，其容积为 4 800 m^3，深为 3 m. 如果池底每平方米的造价为 150 元，池壁每平方米的造价为 120 元，怎样设计水池能使总造价最低？最低总造价是多少？

分析：水池呈长方体形，它的高是 3 m，底面的长与宽没有确定. 如果底面的长与宽确定了，水池总造价也就确定了. 因此应当考察底面的长与宽取什么值时水池总造价最低.

解：设底面的长为 x m，宽为 y m，水池总造价为 z 元. 根据题意，有

$$\begin{aligned} z &= 150\times\frac{4\ 800}{3}+120(2\times 3x+2\times 3y) \\ &= 240\ 000+720(x+y). \end{aligned}$$

由容积为 4 800m^3，可得

$$3xy=4\ 800,$$

因此

$$xy=1\ 600.$$

由基本不等式与不等式的性质，可得

$$240\ 000+720(x+y)\geqslant 240\ 000+720\times 2\sqrt{xy},$$

即

$$z\geqslant 240\ 000+720\times 2\sqrt{1\ 600},$$

$$z\geqslant 297\ 600.$$

当 $x=y$，即 $x=y=40$ 时，等号成立.

所以，将水池的地面设计成边长为 40 m 的正方形时总造价最低，最低总造价是 297 600 元.

练　习

1. $x>0$，当 x 取什么值，$x+\frac{1}{x}$ 的值最小？最小值是多少？
2. 已知直角三角形的面积等于 50，两条直角边各为多少时，两条直角边的和最小，最小值是多少？
3. 用 20 cm 长的铁丝折成一个面积最大的矩形，应当怎样折？
4. 做一个体积为 32 m^3，高为 2 m 的长方体纸盒，底面的长与宽取什么值时用纸最少？

习题 3.4

A 组

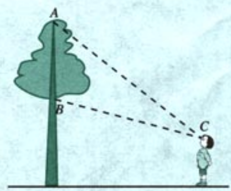
1. (1) 把 36 写成两个正数的积，当这两个正数取什么值时，它们的和最小？
   (2) 把 18 写成两个正数的和，当这两个正数取什么值时，它们的积最大？
2. 一段长 30 m 为的篱笆围成一个一边靠墙的矩形菜园，墙长 18 m，问这个矩形的长、宽各为多少时，菜园的面积最大．最大面积是多少？

（第 2 题）

3. 已知矩形的周长为 36，矩形绕它的一条边旋转形成一个圆柱，矩形的长、宽各为多少时，旋转形成的圆柱的侧面积最大？
4. 某单位建造一间背面靠墙的小房，地面面积为 12 m^2，房屋正面每平方米的造价为1 200元，房屋侧面每平方米的造价为 800 元，屋顶的造价为 5 800 元．如果墙高为 3 m，且不计房屋背面和地面的费用，问怎样设计房屋能使总造价最低？最低总造价是多少？

B 组

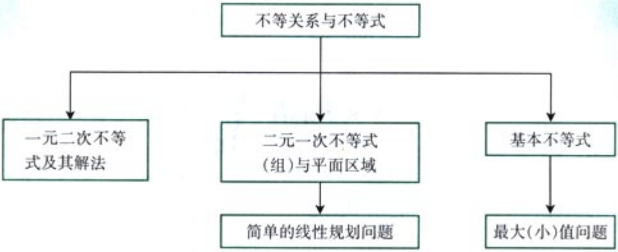
1. 设矩形 $ABCD$（$AB>AD$）的周长为 24，把它关于 AC 折起来，AB 折过去后，交 DC 于点 P．设 $AB=x$，求△ADP 的最大面积及相应的 x 值．
2. 如图，树顶 A 离地面 a m，树上另一点 B 离地面 b m，在离地面c m的 C 处看此树，离此树多远时视角最大？



（第 2 题）

小　结

一、本章知识结构



二、回顾与思考

1. 在现实世界和日常生活中存在着大量的不等关系，你能举出一两个例子，并用不等式描述这些不等关系吗?

2. 在事物的变化过程中，相等与不等是可以相互转化的，这种转化在一元二次方程、一元二次函数和一元二次不等式的联系中可以得到很好的反映. 正是这种相互转化，使我们可以利用方程的解和函数的图象来解不等式. 你能从变化的角度说说三者之间的关系吗?

3. 二元线性规划问题指的是什么样的问题? 为什么通过解二元一次不等式组可以解决这样的问题?

4. 在基本不等式的推导过程中，我们不但看到了它的代数背景，同时还看到了它的几何背景，数与形的结合开拓了我们的研究思路. 你能结合基本不等式的学习谈谈对数形结合思想的认识吗?

复习参考题

A 组

1. 比较$\sqrt{\frac{5}{12}}+\sqrt{\frac{1}{5}}$与$\sqrt{\frac{1}{3}}+\sqrt{\frac{2}{7}}$的大小.
2. 已知集合 $A=\{x \mid x^2-x-6<0\}$，$B=\{x \mid x^2+2x-8>0\}$，求 $A\cap B$.
3. 当 k 取什么值时，一元二次不等式 $2kx^2+kx-\frac{3}{8}<0$ 对一切实数 x 都成立？画出求解的程序框图.
4. 不等式组

$$\begin{cases}4x+3y+8>0,\\ x<0,\\ y<0\end{cases}$$

表示的平面区域内的整点坐标是______.

5. 某运输公司有 7 辆可载 6 t 的 A 型卡车与 4 辆可载 10 t 的 B 型卡车，有 9 名驾驶员，建筑某段高速公路中，此公司承包了每天至少搬运 360 t 沥青的任务，已知每辆卡车每天往返的次数为 A 型车 8 次，B 型车 6 次，每辆卡车每天往返的成本费为 A 型车 160 元，B 型车 252 元，每天派出 A 型车和 B 型车各多少辆，公司所花的成本费最低？
6. 在面积为定值 S 的扇形中，半径是多少时扇形的周长最小？
7. 在周长为定值 P 的扇形中，半径是多少时扇形的面积最大？
8. 甲、乙两地相距 s km，汽车从甲地匀速行驶到乙地，速度不得超过 c km/h. 已知汽车每小时的运输成本（以元为单位）由可变部分和固定部分组成：可变部分与速度 v（单位：km/h）的平方成正比，且比例系数为 b；固定部分为 a 元（$a<bc^2$）. 为了使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶？

B 组

1. 求证：$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.
2. 二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集是全体实数的条件是（　　）

(A) $\begin{cases}a>0,\\ \Delta>0.\end{cases}$　(B) $\begin{cases}a>0,\\ \Delta<0.\end{cases}$　(C) $\begin{cases}a<0,\\ \Delta>0.\end{cases}$　(D) $\begin{cases}a<0,\\ \Delta<0.\end{cases}$

3. 解下列不等式组：

(1) $\begin{cases}4x^2-27x+18>0,\\ x^2+4x+4>0;\end{cases}$　(2) $\begin{cases}3x^2+x-2\geqslant 0,\\ 4x^2-15x+9>0.\end{cases}$

4. 若关于 x 的不等式 $-\frac{1}{2}x^2+2x>mx$ 的解集为 $\{x \mid 0<x<2\}$，求 m 的值.

5. 某服装制造商现有 10 m^2 的棉布料，10 m^2 的羊毛料，和 6 m^2 的丝绸料. 做一条裤子需要 1 m^2 的棉布料，2 m^2 的羊毛料，1 m^2 的丝绸料. 一条裙子需要 1 m^2 的棉布料，1 m^2 的羊毛料，1 m^2 的丝绸料. 一条裤子的纯收益是 20 元，一条裙子的纯收益是 40 元. 为了使收益达到最大，需要同时生产这两种服装，请你列出生产这两种服装件数所要满足的数学关系式，并画出图形.

6. 已知

$$\begin{cases} 2x+y-2\geqslant 0, \\ x-2y+4\geqslant 0, \\ 3x-y-3\leqslant 0. \end{cases}$$

当 x，y 取何值时，x^2+y^2 取得最大值、最小值？最大值、最小值各是多少？

7. 要制造一个无盖的盒子，形状为长方体，底宽为 2 m. 现有制盒材料 60 m^2，当盒子的长、高各为多少时，盒子的体积最大？

8. 两次购买同一种物品，可以用两种不同的策略，第一种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品的数量一定；第二种是不考虑物品价格的升降，每次购买这种物品所花的钱数一定. 哪种购物方式比较经济？能把所得结论作一些推广吗？

后　　记

为了全面贯彻党的教育方针，适应时代发展的需要，为学生的终身发展奠定基础，根据教育部制订的普通高中各学科课程标准（实验），人民教育出版社课程教材研究所编写的各学科普通高中课程标准实验教科书，得到了诸多教育界前辈和各学科专家学者的热情帮助和大力支持．在各学科教科书终于同课程改革实验区的师生见面时，我们特别感谢担任教科书总顾问的丁石孙、许嘉璐、叶至善、顾明远、吕型伟、王梓坤、梁衡、金冲及、白春礼、陶西平同志，感谢担任教科书编写指导委员会主任委员的柳斌同志和编写指导委员会委员的江蓝生、李吉林、杨焕明、顾泠沅、袁行霈等同志．

根据教育部制订的《普通高中数学课程标准（实验）》，我们聘请北京师范大学刘绍学教授为主编，与高中数学课程标准研制组的部分成员、大学数学教师、数学教育理论工作者、中学数学教研员和数学教师共同组成编写委员会，编写了这套数学实验教科书．这里特别要感谢北京师范大学数学科学学院领导对本套教科书编写工作的高度重视和大力支持，同时还要感谢所有对本套教科书提出修改意见，提供过帮助与支持的专家、学者和教师，以及社会各界朋友．

本册教科书是编委会全体成员集体智慧的成果．除已列出的主要编写者外，参加本册教科书讨论的还有：刘意竹、蒋佩锦、任子朝、张劲松、王嵘、张淑梅、李勇、王申怀、徐勇、吕伟泉、鲁彬、白涛、谷丹等．

我们还要感谢使用本套教材的实验区的师生们．希望你们在使用本套教材的过程中，能够及时把意见和建议反馈给我们，对此，我们将深表谢意．让我们携起手来，共同完成教材建设工作．我们的联系方式如下：

电话：(010)64019734

E-mail：jcfk@pep.com.cn，yuqs@pep.com.cn

人民教育出版社　课程教材研究所

中学数学课程教材研究开发中心