普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 3–3

球面上的几何

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　张爱和　高存明　龙正武

责任编辑　　龙正武

美术编辑　　张　蓓　王　喆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数　学

选修 3－3　B版

球面上的几何

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

*

人民教育出版社 出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京天宇星印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：4　字数：90 000

2008 年 3 月第 1 版　2011 年 12 月第 6 次印刷

ISBN 978－7－107－20673－3
G·13763（课）　定价：4.25 元

本册导引

由于人们的视野很小，在很长的历史时期，人们总认为地球的表面是一个平面．随着人们活动范围的扩大和科学研究的进展，才逐渐发现我们生活在一个球面上．当人们进行大地（天体）测量、航海、飞机飞行、卫星定位时，如果再把地球表面看成平面，就不会得到正确的结果．这就需要研究球面上几何图形的性质．

球面几何的学习将使同学们扩大几何知识的视野．许多平面图形的几何性质，都可推广到球面上来．表面上看球面和平面是完全不同的两个几何图形，但换个角度去看，它们竟然有许多的相似之处．例如，大圆弧和直线段、平面三角形和球面三等形等．而且有许多球面图形的性质，会使你感到惊奇！例如，球面三角形的三内角和就不等于180度，球面角的两边会相交等．学习球面几何会促使我们对一些平面几何概念进行更深入的思考，例如“距离”“线段”等．

本册还简短介绍了非欧几何的另一种——双曲几何的庞加莱模型．当你进一步在几何世界里漫游时，你会感到惊奇、兴奋，学习球面几何，了解双曲几何，一定会激励你勇往直前地去探索几何世界里的奥秘．

本书还设置了计算机辅助学习的内容，相关的课件可从人教网（http：//www. pep. com. cn）中的高中数学B版栏目中下载．

目　　录

第一章 球面的基本性质

球面是大家非常熟悉的一个曲面，日常生活中几乎处处都有它的影子．例如，地球表面可近似地看成是一个球面，篮球、足球和乒乓球等的表面都是球面．

粗略地看来，球面好像是一个比较简单的几何对象．然而，事实真的如此吗？

如图 1-1 所示，假设位于篮球表面 A 处的小蚂蚁，发现篮球表面的 B 处有一小块食物．那么，这只小蚂蚁应该沿着怎样的路线爬行，才能使自己所走的路程最短呢？最短路程应该怎样计算呢？值得注意的是，这只蚂蚁是只能在篮球的表面爬行的．

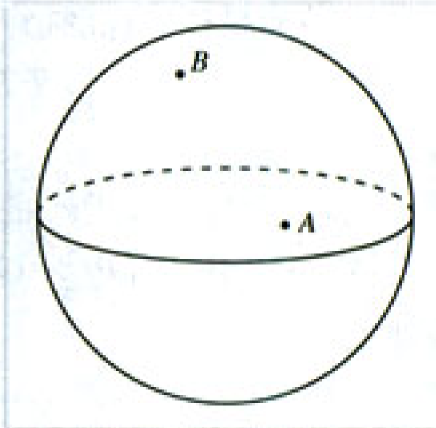


图 1-1

另外，从地球仪上可以看出，我国的北京（东经 116°，北纬 40°）和美国的纽约（西经 74°，北纬 40°）都在地球的北半球上，而且这两个城市在同一纬度圈上．那么，从北京飞往纽约的飞机，是沿着纬度圈飞行时的路程最短吗？如果不是，应该沿着什么样的路线飞行才能使经过的路程最短呢？最短路程的长约为多少呢？（飞行高度忽略不计）

这里我们所要回答的是，球面上两点之间的连线中，什么样的线最短，以及怎样计算最短的线的长度．

在学完本章的内容以后，我们将能给出类似问题的圆满答案．

1.1 球面的基本性质

如图 1-2 所示，一个半圆以通过直径的直线为旋转轴，旋转一周所形成的曲面，叫做球面．球面所围成的几何体叫做球．此时，半圆的圆心叫做球心，连接球心与球面上任意一点的线段叫做半径．

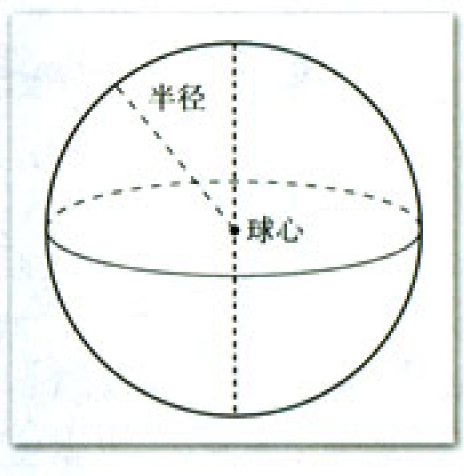


图 1-2

从解析几何中我们知道，圆可以看成是平面上到定点（圆心）的距离等于定长（半径）的点的集合．通过类比可知，球面可以看成是空间中到定点（球心）的距离等于定长（半径）的点的集合．

我们还知道，平面中的圆是中心对称图形，也是轴对称图形．同样地，作为空间中最完美的图形之一的球面也具有很强的对称性．

1. 球面是中心对称图形

事实上，对球面上任意一点 P，假设它关于球心的对称点为 P'（如图 1-3）. 则由 P 和 P' 到球心的距离相等可知，点 P' 到球心的距离等于半径，即点 P' 一定在这个球面上.

因此，球面是中心对称图形，球心是对称中心.

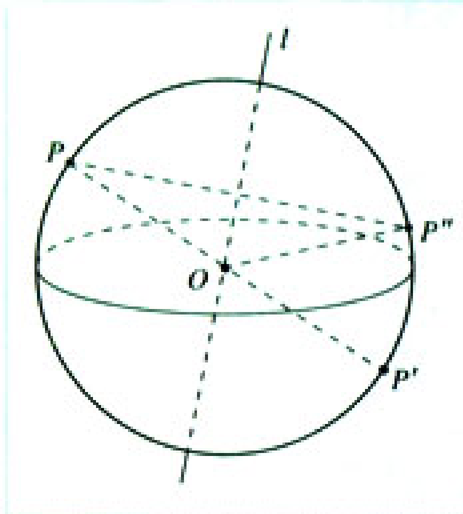


图 1-3

2. 球面是轴对称图形

如图 1-3 所示，设 l 是通过球心 O 的任意一条直线. 对球面上任意一点 P，设它关于直线 l 的对称点为 P''. 此时，l 是线段 PP'' 的垂直平分线. 又因为球心 O 在直线 l 上，因此 $OP''=OP$. 从而，点 P'' 一定在这个球面上.

即球面是轴对称图形，任意一条通过球心的直线都是对称轴.

3. 球面是镜面对称图形

如果一个图形关于某个平面对称，我们就称它是镜面对称图形，这个平面称为它的对称面.

利用类似的方法，我们能够证明球面是镜面对称图形，而且通过球心 O 的任意一个平面都是球面的对称面.

4. 球面是旋转对称图形

事实上，我们可以证明，如果 l 是通过球心 O 的任意一条直线，则球面绕 l 旋转任意角度后都会与自身重合.

球面的镜面对称性和旋转对称性的详细证明，留给同学们作为练习.

● **计算机辅助学习**

探索球的对称性

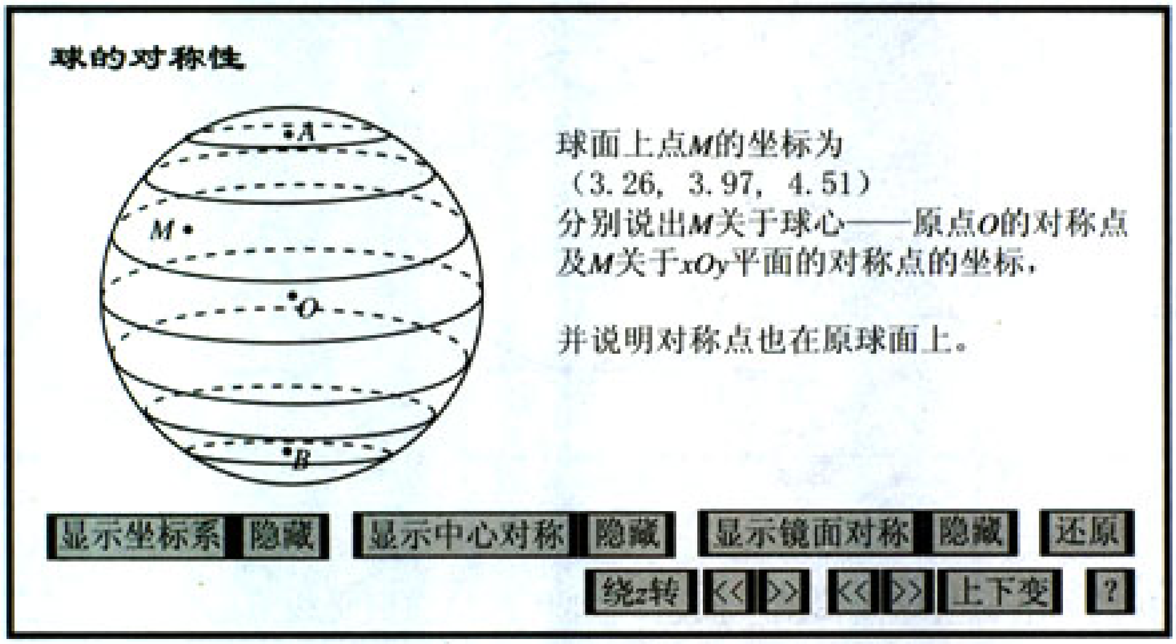
[操作说明]

打开几何画板文件 ZX—17，可进入第一页点 P 在球外的界面：

(1) 点击“显示中心对称”按钮，显示球面上的点 M 关于球心的对称点 M'，并通过闪动认识球面的中心对称性.

(2) 点击“显示镜面对称”按钮，显示球面上的点 M 关于球的一个大圆所在平面的对称点 M''，并通过闪动认识球面的镜面对称性，同时显示这两点的对称轴来说明球的轴对称性.

(3) 点击“绕 z 转”按钮，使点 M 绕竖直轴转动，观察球的旋转对称性. 后面是两个慢动按钮. 要上下改变点 M 的位置，用“上下变”和另两个慢动按钮.



（4）点击“显示坐标系”按钮，根据给出的点 M 的坐标练习求 M 的对称点的坐标并回答所提出的问题.

（5）各个“隐藏”按钮可以隐去相关的图形.

（6）“还原”按钮可使界面还原到初始状态.

练习

1. 证明球面既是镜面对称图形，又是旋转对称图形.
2. 已知某平面通过连接球面上任意两点的线段的中点，并且与这条线段垂直，证明这个平面一定通过球心.

1.2 平面、直线与球面的位置关系

在平面几何中，通过对圆心与直线的距离和半径的比较，我们已经知道，圆与直线的位置关系有 3 种，即相割、相切和相离（如图 1-4 所示）.

下面我们通过类比来探讨球面与平面的位置关系.

不难知道，球面与平面之间的位置关系，取决于球心到平面的距离和球面半径的大小.

已知平面 α 和球面 O，设球面的半径为 R，球心 O 到平面 α 的距离 $OO'=d$. 容易看出：

（1）如果 $d<R$，则平面与球面有一条交线（如图 1-5(1)）.

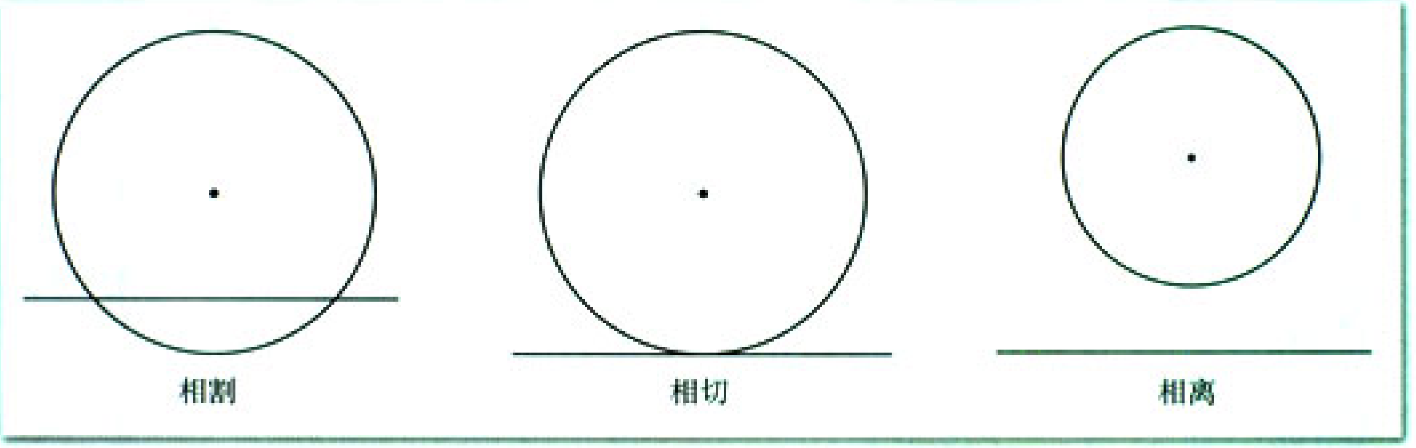


图 1-4

此时，我们称平面与球面相割．而且，如果 P 是它们交线上的任意一点，那么

$$r=\sqrt{OP^2-d^2}=\sqrt{R^2-d^2},$$

即 r 是一个定值．

这说明交线是平面 α 内到定点 O' 的距离等于定长 r 的点的集合，所以一个平面截一个球面所得的交线，是以球心在截面上的射影 O' 为圆心，r 为半径的一个圆．

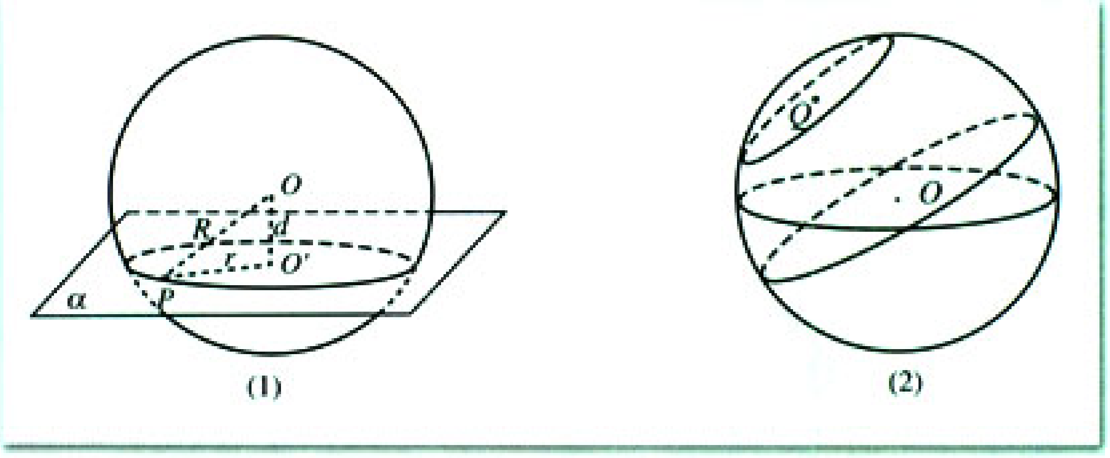


图 1-5

特别地，当 $d=0$ 时，平面 α 通过球心，$r=R$．显然，此时所截得的圆的半径最大．

球面被经过球心的平面所截得的圆，叫做这个球面的大圆；被不经过球心的平面所截得的圆，叫做这个球面的小圆（图 1-5(2)）．由定义可知，小圆的半径总是小于球面的半径．

(2) 如果 $d=R$，则平面与球面有且只有一个交点，并且平面垂直于过交点的半径．

此时称平面与球面相切（如图 1-6(1)），交点称为切点，平面称为球面在切点处的切平面．

(3) 如果 $d>R$，则平面与球面没有公共点．

此时称平面与球面相离（如图 1-6(2)）．

下面探讨球面与直线的位置关系．

如图 1-7 所示，已知球面 O 和直线 AB，则通过 AB 和球心 O 的平面与球面相交于一个大圆．因此，由大圆和直线 AB 的位置关系，可以探讨球面 O 与直线 AB 的位置关系．

如果球心到直线的距离大于球面的半径，则直线和球面没有公共点，此时称直线与球

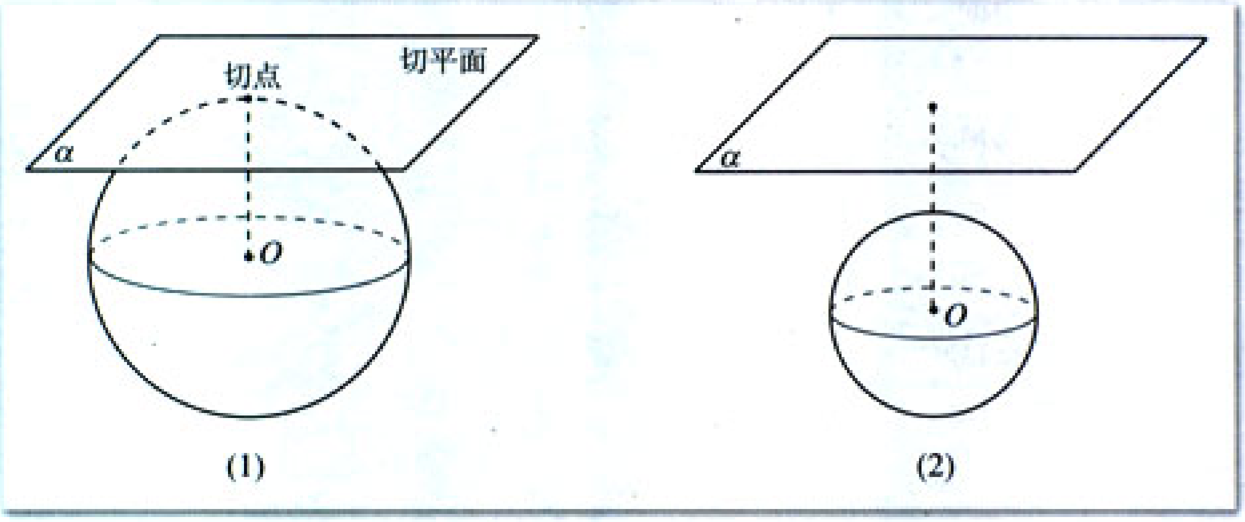


图 1-6

面相离.

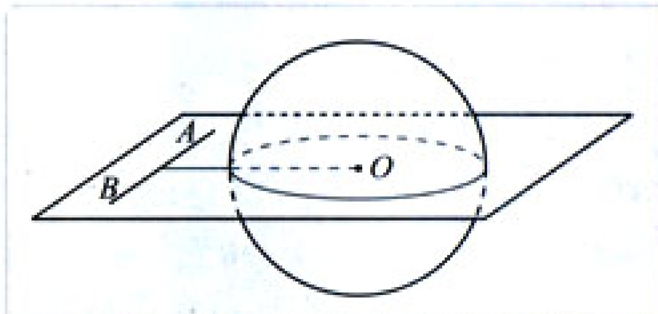


图 1-7

如果球心到直线的距离等于球面的半径，则容易证明直线与球面有且只有一个公共点，此时称直线与球面**相切**，直线为球面的**切线**，公共点为**切点**.

如果球心到直线的距离小于球面的半径，则直线和球面有两个公共点，此时称直线与球面**相割**.

请同学们自己证明下述有关球面切线的结论：

如果直线与球面相切，那么这条直线垂直于过切点的半径；如果直线垂直于球面的半径，而且垂足在球面上，那么该直线与球面相切.

思考与讨论

过球面上的一个定点的所有球面的切线的集合，构成什么样的图形？

[探索与研究] 从以上可以看出，有关圆的许多性质，都可通过类比，推广到球面上来. 请同学们自行探索与研究，看看有哪些圆的性质可推广到球面上来.

下面我们以圆幂定理为例，说明怎样把它推广为球幂定理.

圆幂定理 已知圆 O 的半径为 r，通过一定点 P 作圆 O 的任意一条割线交圆于 A，B 两点，则：

(1) 当点 P 在圆外时，$PA \cdot PB = PO^2 - r^2 > 0$；

(2) 当点 P 在圆内时，$PA \cdot PB = r^2 - PO^2 > 0$；

(3) 当点 P 在圆上时，$PA \cdot PB = 0$.

如图 1-8 即为 P 在圆外和 P 在圆内的情形.

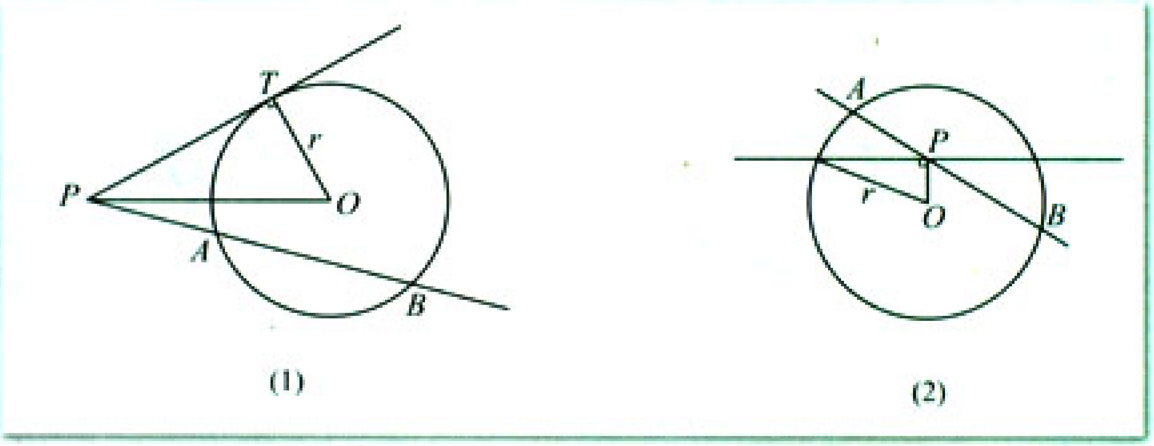


图 1-8

在图 1-8 (1) (2) 中，以 OP 所在的直线为旋转轴，将圆 O 旋转一周，则圆 O 可形成球面 O. 注意到此时 PT 是球面 O 的切线，直线 PAB 与球面 O 相割，而且各线段的长度保持不变. 因此我们可得到如下球幂定理.

球幂定理 已知球面 O 的半径为 R，通过一定点 P 作球面 O 的任意一条割线交球面于 A，B 两点，则：

(1) 当点 P 在球 O 外时，$PA \cdot PB = PO^2 - R^2 > 0$；

(2) 当点 P 在球 O 内时，$PA \cdot PB = R^2 - PO^2 > 0$；

(3) 当点 P 在球面上时，$PA \cdot PB = 0$.

作为练习，请同学们查阅有关资料，先证明圆幂定理，然后用类似的方法证明球幂定理.

下面，我们用向量的有关知识来证明球幂定理，以帮助大家提高用向量研究几何问题的能力.

证明：如图 1-9 所示，设 P 点在球外，PT 为是球面的切线，T 为切点，PAB 与球面相交于 A，B 两点. 假设 $\boldsymbol{u}$ 是与向量 $\overrightarrow{PB}$ 同方向的单位向量.

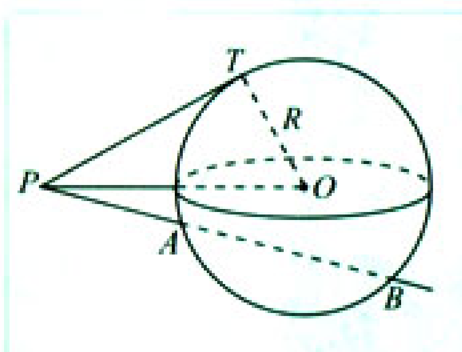


图 1-9

由向量 $\overrightarrow{PA}$ 和 $\overrightarrow{PB}$ 与 $\boldsymbol{u}$ 平行可知，存在有唯一的实数 x_1，x_2，使得

$$\overrightarrow{PA} = x_1\boldsymbol{u},\quad \overrightarrow{PB} = x_2\boldsymbol{u}.$$

注意到 $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OP} + x_1\boldsymbol{u}$，而且 $|\overrightarrow{OA}| = R$，因此有 $(\overrightarrow{OP} + x_1\boldsymbol{u}) \cdot (\overrightarrow{OP} + x_1\boldsymbol{u}) = R^2$. 整理，得

$$x_1^2 + 2(\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{u})x_1 + |\overrightarrow{OP}|^2 - R^2 = 0.$$

同理可知

$$x_2^2 + 2(\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{u})x_2 + |\overrightarrow{OP}|^2 - R^2 = 0.$$

因此，x_1，x_2 都是方程

$$x^2 + 2(\overrightarrow{OP} \cdot \boldsymbol{u})x + |\overrightarrow{OP}|^2 - R^2 = 0$$

的根．由一元二次方程的根与系数的关系可知

$$x_1x_2=|\overrightarrow{OP}|^2-R^2=|\overrightarrow{PT}|^2.$$

又因为$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=x_1x_2$，所以此时有$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=|\overrightarrow{PT}|^2>0$.

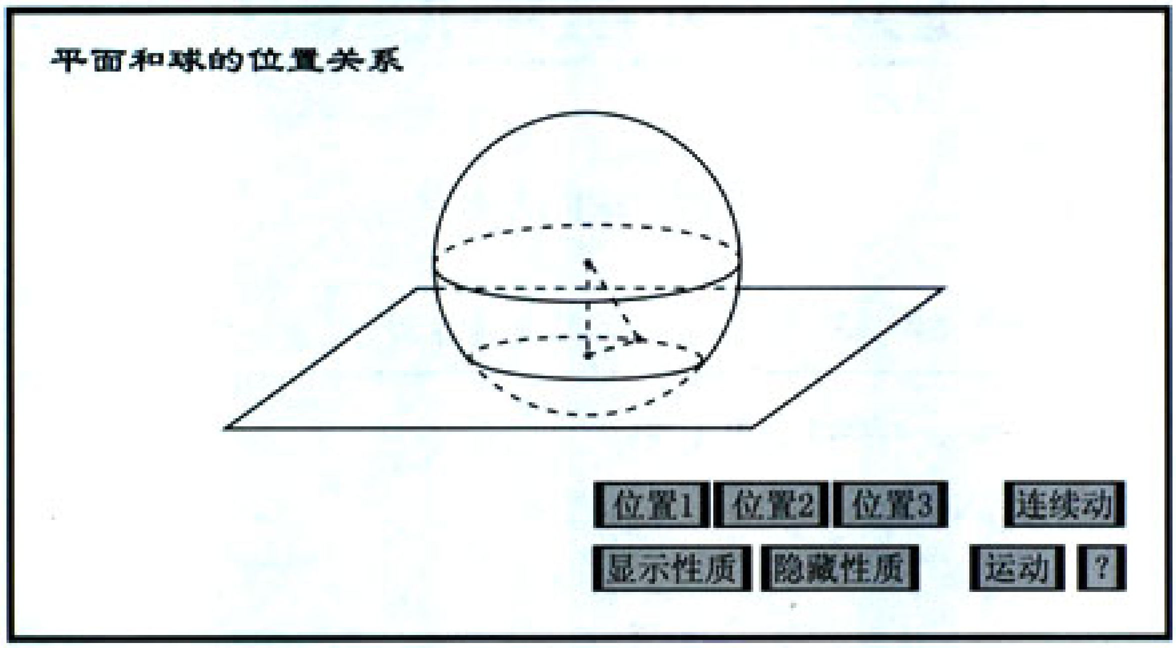
当 P 在球 O 内和球面上时的情形，请同学们自己证明．

● 计算机辅助学习

探索平面和球面的位置关系

［操作说明］

打开几何画板文件 ZX－18，可进入界面：



（1）点击“连续动”按钮，观察平面运动时与球面的不同位置关系，“位置1”“位置2”“位置3”三个按钮可以分别观察三个不同的特殊位置．

（2）点击“显示性质”按钮可以在平面截球面时显示截面的性质，必要时可以用“运动”按钮使图形运动．

● 计算机辅助学习

探索球面的基本性质

［操作说明］

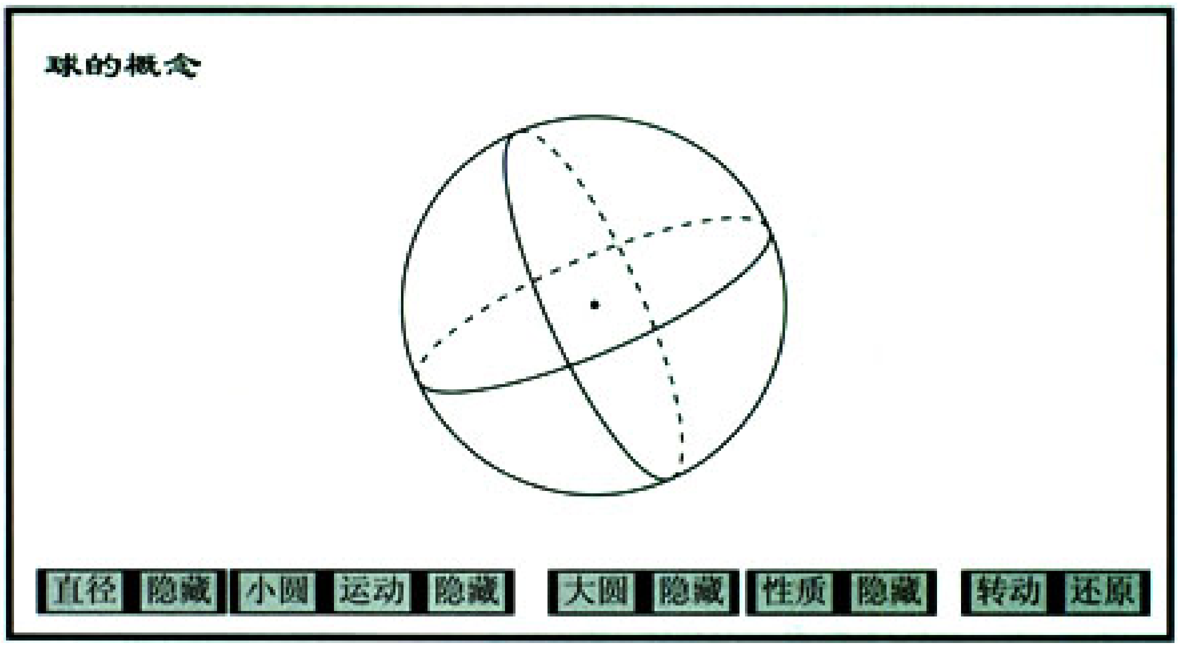
打开几何画板文件 ZX－16，可进入界面：

（1）点击“大圆”和“直径”按钮，观察和复习球的定义．

（2）点击“性质”按钮，复习以前学过的球的性质．

（3）点击“直径”和“小圆”按钮，分别显示球的直径和小圆，并可以使用“运动”按钮观察不同位置的小圆．

（4）点击“转动”按钮，观察运动中的球体，点击“还原”按钮可使界面还原到初始状态．

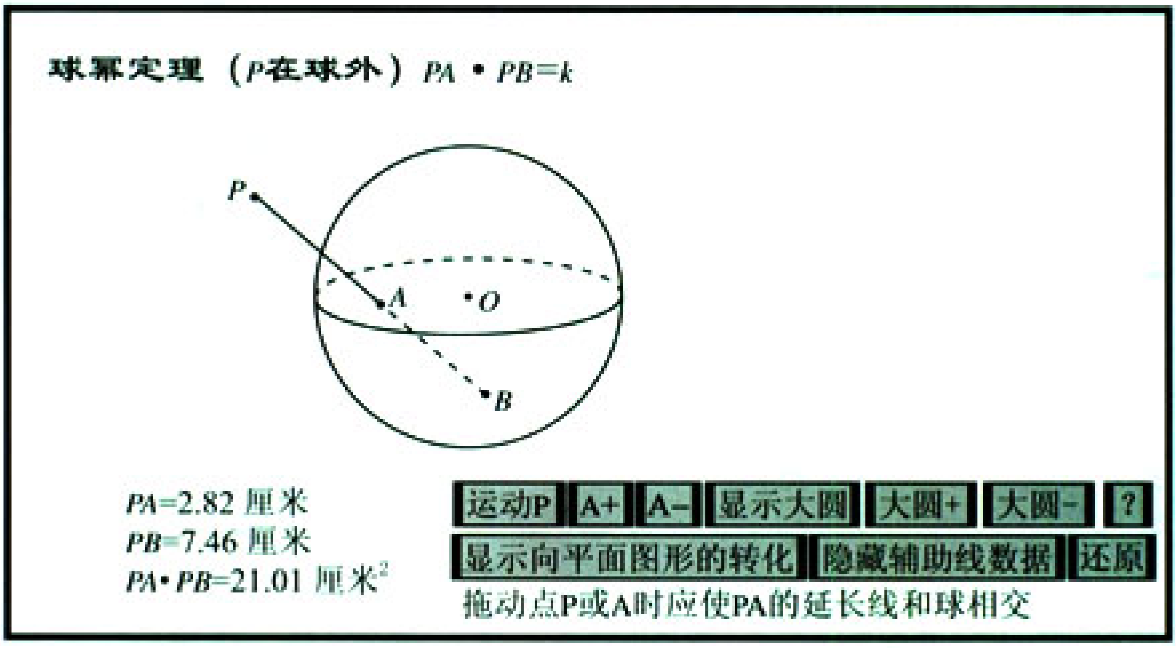


计算机辅助学习

探索球幂定理

[操作说明]

打开几何画板文件 ZX—19，可进入第一页界面：



(1) 点击"显示大圆"和后面的两个慢动按钮，分别显示经过或运动过 A，B 的大圆，使我们直观认识球的割线，为向平面问题转化打下基础.

(2) 点击"隐藏向平面图形的转化"和"隐藏辅助线数据"按钮，显示平面图形和辅助线，研讨证明定理的方法.

(3) 在点击"隐藏向平面图形的转化"后，点击"运动 P"、"$A+$"、"$A-$"按钮，改变点 P，A 的位置，还可以直接拖动这两点，使点 A 在线段 PB 上，拖动时图形将同步变化.

(4) 观察界面上的数据，思考为什么 PA，PB 变化时它们的乘积不变. 设这个乘积为 k 时，k 与图形中线段有什么关系. 由此，得出球幂定理的结论，再进一步思考点 P 在球面上或球内时的情况.

(5) "还原"按钮可使界面还原到初始状态.

(6) 第二页是点 P 在球面上或球内时的情况. 图形（略）及按钮的应用和第一页类似，只是要注意：拖动点 P 时不能拖到球面外，按钮“$P\to A$”是点 P 在球面上的情况，可以看到这时的 k 值为 0.

两种情况的结论可以统一为

$$k=|PO^2-R^2|.$$

练习

1. 证明一个球的球心在它的小圆截面内的射影是这个小圆的圆心.
2. 证明过一个球面的半径外端，并垂直于这条半径的平面与球面只有一个交点.
3. 用其他方法证明球幂定理.

1.3 球面上两点间的距离和球面直线

1. 球面上两点间的距离

首先，让我们回到本章一开始提出的问题上来. 如图 1-10 所示，处在 A 处的蚂蚁可以沿着路径 ACB，ADB，AEB 以及 AFB 等到达 B 处. 但是，直观上我们可以看出，大圆的劣弧 $\overset{\frown}{ACB}$ 应该是这些线中最短的.

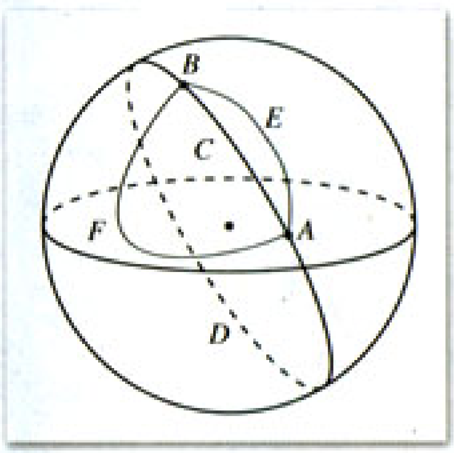


图 1-10

事实上，我们有以下结论：

球面上连接两点的所有曲线中，经过这两点的大圆在这两点间的那段劣弧的长度最短.

我们以后称这段劣弧的长度为这两点间的**球面距离**.

特别需要提醒的是，上述结论中所提到的曲线，其每一点都必须全部在球面上，这就好像蚂蚁如果在篮球表面上时，它只能沿着篮球表面爬行一样.

下面简要地说明一下上述结论的证明方法.

如图 1-11，设 $\overset{\frown}{ACB}$ 是连接球面上 A，B 两点的大圆的劣弧，$ADE\cdots GB$ 是球面上不同于 $\overset{\frown}{ACB}$ 的曲线，并且假设 D，E，…，G 各点把这条曲线分为 $\overset{\frown}{AD}$，$\overset{\frown}{DE}$，…，$\overset{\frown}{GB}$（只要分点足够多的话，这些曲线弧都可近似地看作是圆弧）.

把 A，D，E，…，G，B 各点与球心 O 连接起来，则有（详细的证明请参见本章的附

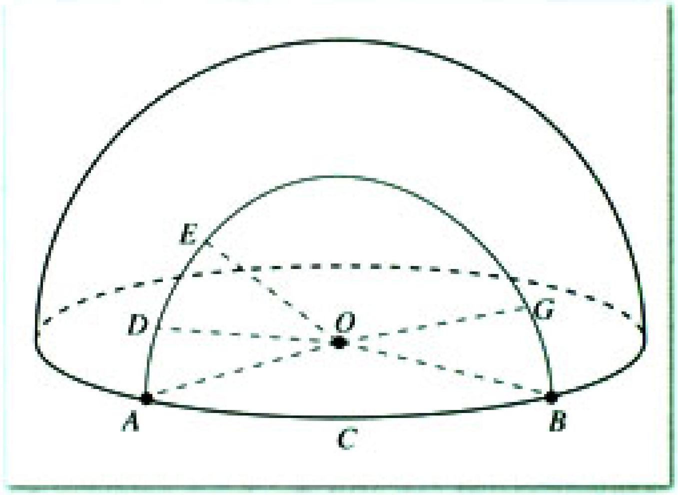


图 1-11

录）

$$\angle AOB<\angle AOD+\angle DOE+\cdots+\angle GOB.$$

假设球面的半径为 R，各个角的大小都以弧度为单位，则

$$\frac{\overset{\frown}{ACB}}{R}=\angle AOB,$$

且

$$\frac{\overset{\frown}{AD}}{R}=\angle AOD,\ \frac{\overset{\frown}{DE}}{R}=\angle DOE,\ \cdots,\ \frac{\overset{\frown}{GB}}{R}=\angle GOB,$$

将这些关系式代入上面的不等式并整理，可得

$$\overset{\frown}{ACB}<\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DE}+\cdots+\overset{\frown}{GB}.$$

又因为$\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DE}+\cdots+\overset{\frown}{GB}=ADE\cdots GB$，所以

$$\overset{\frown}{ACB}<ADE\cdots GB.$$

这就说明了，连接球面上两点的所有曲线中，经过这两点的大圆在这两点间的劣弧的长度最短.

2. 球面直线

我们知道，平面上两点之间的连线中，连接这两点的线段最短. 因此，从“最短连线”这个意义上看来，“球面上过两点的大圆在这两点间的劣弧”和“平面上连接两点的线段”具有相同的性质. 正因为如此，以后我们称球面上过两点的大圆在这两点间的劣弧为**球面线段**，这两点称为球面线段的端点.

我们不难证明，跟平面中的情形一样，球面上任意给定两点，都存在线段以这两点为端点（请同学们证明这个结论）. 但是，与平面中不一样的是，在球面上给定两点之后，连接这两点的线段有可能不止一条.

实际上，当给定的两点关于球心对称时（此时，其中一点叫做另外一点的**对径点**），连接这两点的球面线段有两条. 如图 1-12 所示，球面 O 上点 A 和点 B 关于球心 O 对称，

此时，$\overset{\frown}{ACB}$ 和 $\overset{\frown}{ADB}$ 都是球面上以 A 和 B 为端点的线段.

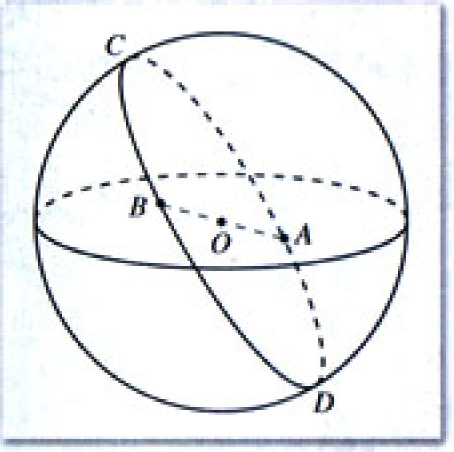


图 1-12

其次，我们来探讨，平面内的线，到底应该具有什么特征才能是直线的问题.

显然，如果 l 是平面中的一条直线，那么连接 l 上任意两点的线段一定在 l 上. 而且，直观上我们可以看出，对于平面中的一条线 l，如果连接 l 上任意两点的线段都在 l 上，那么 l 是直线.

由前面关于球面线段的讨论我们知道，如果 s 是球面上的一个大圆，那么连接 s 上任意两点的球面线段一定在 s 上. 反之，我们还可以看出，如果 s 是球面上的一条线，而且连接 s 上任意两点的球面线段都在 s 上，那么 s 是一个大圆.

由此我们知道，球面上的大圆相当于平面上的直线. 正因为这样，我们称球面上的大圆为**球面直线**. 类似地，我们可以定义球面射线.

与平面上的直线不同的是，球面直线具有以下性质：

（1）球面直线的长度是有限的.

事实上，这是因为球面上大圆的周长是有限的. 同理我们还可以知道，任意两条球面直线的长度都相等.

（2）任意两条球面直线都相交，而且有两个交点.

这个性质的证明留给同学们作为练习. 有意思的是，如果我们称没有公共点的两条球面直线互相平行的话. 那么根据这条性质可知，任意两条球面直线都不平行. 实际上，这个性质是球面几何与平面几何的本质区别之一.

例 将地球的表面看成一个球面，假设某电视塔的高度是 h（信号发射器在塔的顶端），求地面上能直接接收到该电视塔发出的信号的地方离塔底的球面距离的最大值.（设地球半径为 R）

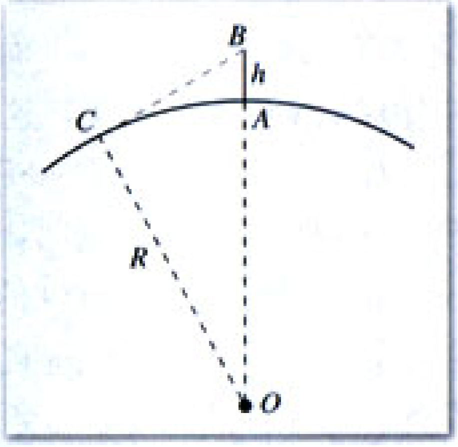


图 1-13

解 如图 1-13 所示，设 A 为塔底，B 为塔顶，O 为地心.

过 B 作球面 O 的切线交球面于 C. 显然，所求球面距离的最大值等于 $\overset{\frown}{AC}$ 的弧长.

显然，$\cos\angle COA=\dfrac{R}{R+h}$，因此 $\overset{\frown}{AC}$ 的弧长为

$$R\angle COA=R\arccos\frac{R}{R+h}\text{❶}.$$

即所求球面距离的最大值为 $R\arccos\dfrac{R}{R+h}$.

❶ 如果 $a=\cos\theta$ 且 $0\leqslant\theta\leqslant\pi$，则记 $\theta=\arccos a$. 例如，$\arccos\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{3}$，$\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{4}\pi$.

例如，上海的东方明珠电视塔的高度为 468 m．如果地球半径取为 6 378 100 m 的话，那么地面上能直接接收到东方明珠电视塔发出的信号的地方中，离塔底的球面距离的最大值为

$$
\begin{aligned}
R\arccos\frac{R}{R+h} &= 6\ 378\ 100\arccos\frac{6\ 378\ 100}{6\ 378\ 100+468} \\
&= 77\ 262.776\ 2\ \text{m}.
\end{aligned}
$$

练习

1. 什么是球面上两点的球面距离？与平面上两点的距离有什么不同？
2. 证明给定球面上任意两点，都存在球面线段以这两点为端点．
3. 证明任意两条球面直线都相交，而且有两个交点．

1.4　球面上圆的极、赤道与球面角

1．球面上圆的极

给定球面上的一个圆（大圆或小圆），如果球的一条直径垂直于这个圆所在的平面，则这条直径与球面的两个交点叫做球面上这个圆的极，这条直径称为这个圆的轴．

如图 1-14 所示，P 和 P' 是球面 O 上小圆 M 的极，直径 PP' 是小圆 M 的轴；同时，P 和 P' 也是球面 O 上大圆 O 的极，直径 PP' 也是大圆 O 的轴．

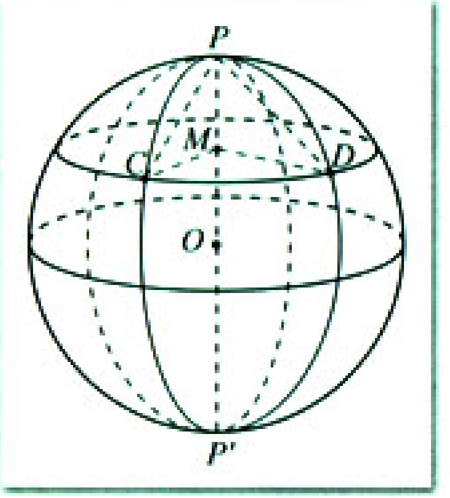


图 1-14

如果一个球的直径垂直于这个球面上的一个大圆所在的平面，这个大圆叫做以这条直径端点为极的赤道圆（简称赤道）．

这些定义是根据地球的北极、南极和赤道而得来的．因此不难看出，球面上一个圆的极有两个．而且，我们有以下结论：

球面上圆的一个极到圆上各点的球面距离相等．

证明　如图 1-14 所示，设 P 为球面上圆 M 的一个极，C 和 D 都是圆 M 上的点．则只需证明 P 和 C 的球面距离等于 P 和 D 的球面距离即可．

假设圆 PCP' 是经过 P 和 C 的大圆，圆 PDP' 是经过 P 和 D 的大圆．

由于 PM 是垂直于圆 M 所在的平面的，因此我们不难看出，直角三角形 PMC 和直角三角形 PMD 全等，从而$PC=PD$.

又因为等圆内相等的弦所对的弧相等，由此可知 P 和 C 的球面距离等于 P 和 D 的球面距离.

在图 1-14 中，类似地，我们还可以证明 P'和 C 的球面距离等于 P'和 D 的球面距离.

不难验证，球面上大圆的两个极到大圆上的点的球面距离相等. 而且，当球面的半径为 1 时，这个距离等于$\frac{\pi}{2}$.

作为练习，请同学们自己验证这个结论.

2. 球面角与月形

由于球面上的大圆“相当”于平面上的直线，因此，平面上两条直线相交形成的角的概念，就可推广到球面上来.

我们知道，平面内的具有公共端点的两条射线组成的图形叫做角. 类试地，如图 1-15 所示，假设球面上的射线 $\overset{\frown}{PCA}$ 与射线 $\overset{\frown}{PDB}$ 相交于点 P，那么我们称这两条射线所形成的图形为**球面角**（记作 APB），射线的公共端点叫做这个**球面角的顶点**，组成角的两条射线都叫做这个**球面角的边**.

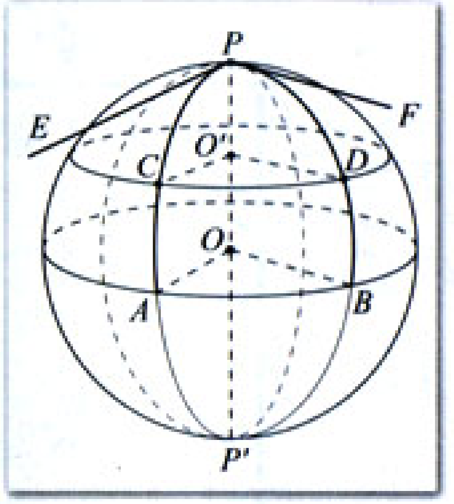


图 1-15

如图 1-15，球面角 APB 和 $AP'B$（也可简记作球面角 P 和 P'）的顶点分别是 P 和 P'，而$\overset{\frown}{PAP'}$，$\overset{\frown}{PBP'}$为它们的边.

显然，球面角与平面内的角相比，有自己的特点：

每个球面角除顶点外，它的两边还相交于另外一点. 而且，顶点与这一点的连线为球的直径.

由于球的直径的两个端点互为对径点，因此上述两个点互为对径点.

下面我们来讨论，如何来度量球面角的大小的问题.

如图 1-15，球面角 APB 的边$\overset{\frown}{PAP'}$确定了一个平面，我们称这个平面被 $PAP'OP$ 包围的那一部分称为由边$\overset{\frown}{PAP'}$确定的半圆面. 同理，边$\overset{\frown}{PBP'}$也确定了一个半圆面.

如果一个大圆所在的平面与 PP' 垂直，并与球面角的两个半圆面相交于半径 OA，OB，则$\angle AOB$ 是二面角 $A-PP'-B$ 的平面角，这个平面角被球面角 APB 所唯一确定.

我们规定$\angle AOB$ 的大小为球面角 APB 的大小.

另一方面，过球面角 APB 的顶点 P，分别作每一边的切线 PE，PF（如图1-15所示），则$\angle EPF$ 也被球面角 APB 所唯一确定，并且$\angle AOB=\angle EPF$（为什么?）.

由以上分析可知，一个球面角可转化为二面角或平面角来度量.

这就是说，**一个球面角的大小，等于这个球面角的两边的大圆面所成的二面角的大小，也等于其顶点处两边所在的大圆切线夹角的大小.**

而且，在图 1-15 中，假设圆 O' 是以 P 和 P' 为极的圆，它与球面角 APB 的边相交于点 C，D. 则不难看出，$\angle CO'D=\angle AOB$，从而它也等于球面角 APB 的大小.

特别地，如果球面的半径为 1，那么 $\angle AOB$ 的弧度数与 $\overset{\frown}{AB}$ 的长度相同. 所以我们有：**单位球面中，球面角的弧度数等于以其顶点为极的大圆夹在两边间的弧的弧长.**

由图 1-15 可以看出，任意两个不同的大圆把球面分为 4 部分，其中的任意一部分都叫做一个**月形**，又称为**球面二边形**.

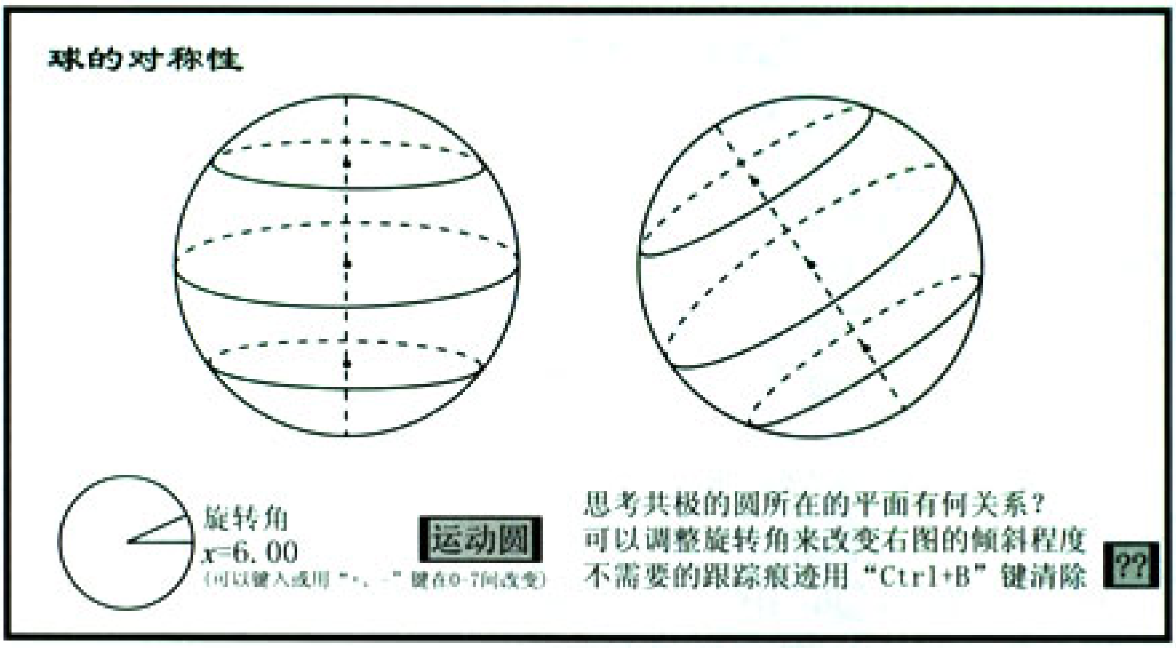
图 1-15 中，球面角 APB 和球面角 $AP'B$ 为球面二边形 $PAP'BP$ 的两个内角.

● 计算机辅助学习

探索球面上圆的极

[操作说明]

打开几何画板文件 ZX—20，可进入界面：



点击"运动圆"按钮，观察球面上一些具有相同的极的大圆或小圆. 结合图形思考共极的圆所在的平面有何关系.

可以调整旋转角来改变右图的倾斜程度，不需要的跟踪痕迹用"Ctrl+B"键清除.

第二页（图略）的"运动点"按钮可以变化点 M，N 在球上的位置，体会它们到同一个极的距离相等，理解有关球面上圆的极的性质.

● 计算机辅助学习

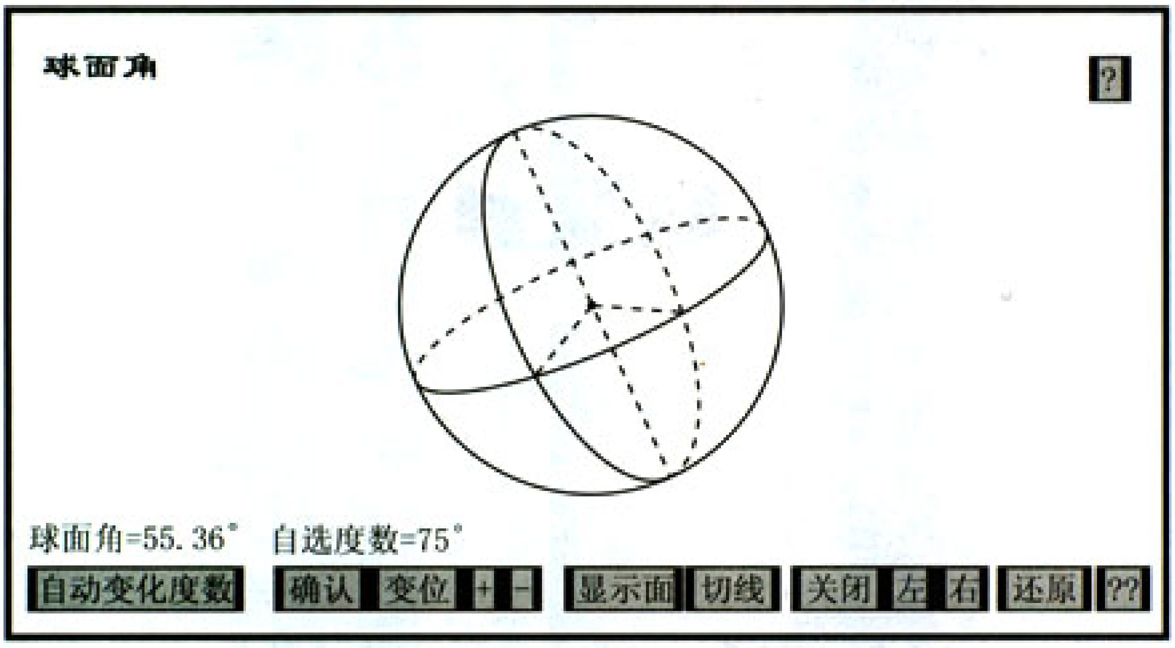
探索球面角

[操作说明]

打开几何画板文件 ZX—21，可进入界面：

(1) 点击"隐藏面""显示面"按钮，隐藏或显示球面角所在的二面角的面.

(2) 点击"切线"和"关闭"按钮，显示或隐藏球的大圆的切线，研究球面角的度量方法. 后面的两个按钮分别使闪动在不同位置定格.



(3) 点击“变位”和“+”“-”按钮，观察不同位置的球面角.

(4) 点击“连续变”按钮，改变球面角的度数，可以使用界面上的，也可以先键入自选的度数，再确认就可以达到变更度数的目的.

(5)“还原”按钮可使界面还原到初始状态.

练习

1. 假设地球表面是球面，北纬45°圈的两个极到这个圈上的点的球面距离分别等于多少（假设地球的半径为R）?

2. 单位球面上半径为多少的小圆，它的一个极到小圆上的点的球面距离等于$\frac{\pi}{3}$?

3. 证明月形的两个内角相等.

习题 1

1. 如何判定直线与球面的位置关系？平面与球面的位置关系？

2. 证明球的两个大圆面的交线是该球的直径.

3. 球面上到两点的球面距离相等的点的轨迹是什么样图形？试说明理由.

附 录

多面角

如图 1 所示，从一定点 V，顺次引出不共面的三条或三条以上的射线 VA，VB，VC……，由这些射线以及 $\angle AVB$，$\angle BVC$，$\angle CVD$……的内部所构成的空间图形，叫做**多面角**．其中定点 V 称为这个多面角的**顶点**，射线 VA，VB，VC……称为这个多面角的**棱**，相邻两条棱之间的角称为多面角的**面角**，相邻两个面形成的二面角称为这个多面角的**二面角**．

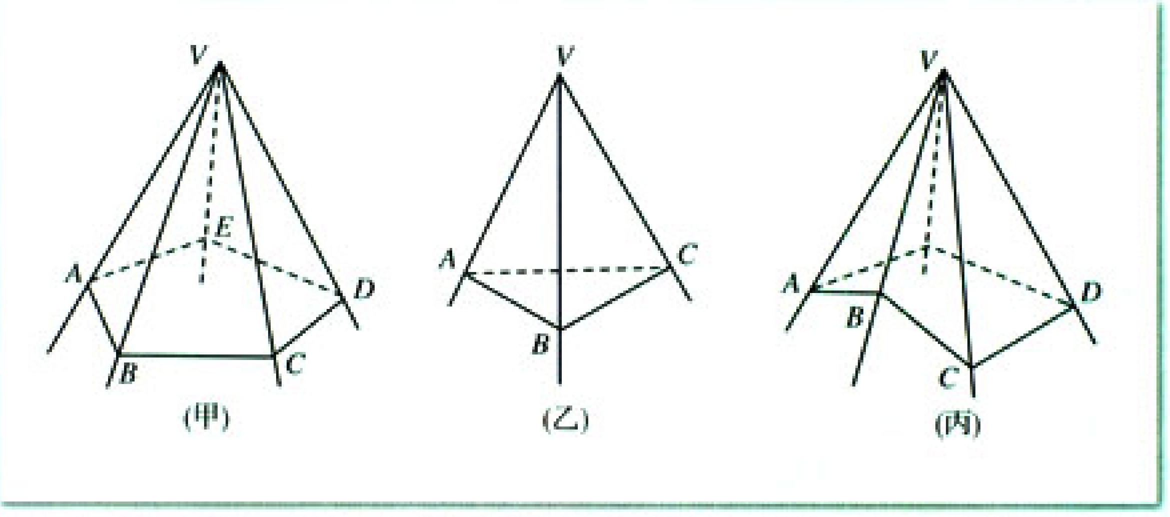


图 1

多面角可按它的面数分类：有三个面的多面角称为**三面角**，有四个面的多面角称为**四面角**等等．

以 V 为顶点，VA，VB，VC 为棱的三面角记作 $V-ABC$，其他多面角的记法类似．

如果一个多面角在其任意一面所在平面的同一侧，便称它为**凸多面角**；否则，称为**凹多面角**．应注意，三面角总是凸的．

如果两个多面角的各个面角和二面角依照相同的顺序对应相等，则称这两个多面角相等．

相等的多面角可以完全重合．

多面角具有如下一些重要性质：

1．三面角的任意一个面角小于其他两个面角之和而大于其差．

2．多面角各面角之和小于四个直角之和．

证明 1. 如图 2 所示，已知三面角 $V-XYZ$. 假设在其三个面角中，$\angle XVZ$ 最大.

在 $\angle XVZ$ 内作 $\angle XVW=\angle XVY$，在 VX 上任取一点 A，在 VY，VW 上分别取点 B，D 使 $VB=VD$. 平面 ABD 与棱 VZ 相交于点 C.

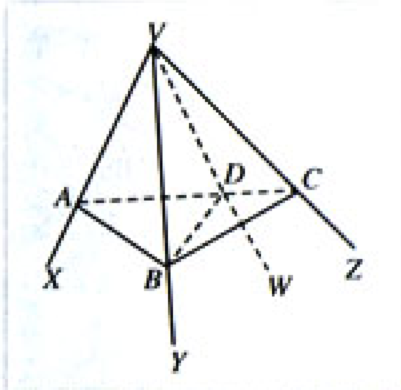


图 2

因为 $\angle XVW=\angle XVY$，$VA=VA$，$VB=VD$，所以

$$\triangle AVD\cong\triangle AVB.$$

从而 $AB=AD$.

又因为在 $\triangle ABC$ 中，$AB+BC>AC$，而且

$$AB=AD，AC=AD+DC，$$

所以 $BC>DC$.

在 $\triangle BVC$ 和 $\triangle DVC$ 中，$VC=VC$，$VB=VD$，而且 $BC>DC$，所以

$$\angle BVC>\angle DVC.$$

因此我们有

$$\angle AVB+\angle BVC>\angle AVD+\angle DVC.$$

从而 $\angle AVB+\angle BVC>\angle AVC$. 即

$$\angle XVY+\angle YVZ>\angle XVZ.$$

移项有 $\angle XVY>\angle XVZ-\angle YVZ$.

至此，性质 1 得证.

2. 如图 3 所示，假设一截平面 n 面角 $V-ABCDE\cdots$ 的各棱，得一多边形 $ABCDE\cdots$.

在三面角 $A-VEB$，$B-VAC$，$\cdots E-VDA$ 中，由性质 1，得

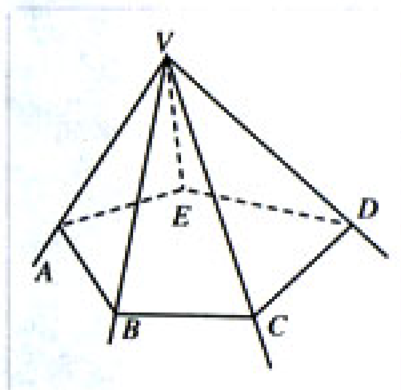


图 3

$$\angle EAB<\angle VAE+\angle VAB，$$
$$\angle ABC<\angle VBA+\angle VBC，$$
$$\cdots\cdots$$

设 n 面角所有面角之和等于 s，以上不等式左右两边相加，左边的和就是 n 边形 $ABCDE\cdots$ 所有的内角和，右边的和就是从 n 个三角形的内角和中减去所有面角和 s，于是得

$$(n-2)\pi<n\pi-s，$$

即 $s<2\pi$.

球面三角形的全等与内角和

像平面几何中一样，球面上也有三角形．但与平面三角形相比，球面三角形有很多看起来“奇怪”的性质，比如

“球面三角形的内角和大于 π.”

“如果两个双曲三角形三个内角分别相等，那么这两个双曲三角形全等.”

本章我们将学习球面三角形的全等与内角和等知识.

2.1　球面三角形及其极对称三角形

1. 球面三角形

我们知道，在平面上，顺次连接不共线的三点的线段所构成的图形，叫做三角形．下面，我们把平面中三角形的概念推广到球面上来.

由前面的知识我们已经知道，球面线段（即大圆的圆弧）是球面上两点之间球面距离最短的线，从“最短距离”这个意义去考虑的话，它相当于平面上的线段.

由此，我们给出球面三角形的定义如下：球面上，顺次连接不在同一个大圆上的三点的球面线段所构成的图形，叫做**球面三角形**.

这三条球面线段叫做**球面三角形的边**，这三个点叫做**球面三角形的顶点**，每两条球面线段所形成的球面角，叫做**球面三角形的内角**.

球面三角形的三条边和三个内角，称为球面三角形的六个基本元素.

如图 2-1 所示即为球面三角形 ABC（有时也记作球面 $\triangle ABC$）．球面三角形的边通常用小写字母 a，b，c 等表示，或用 $\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$，$\overset{\frown}{AB}$ 等表示，有时省去弧的记号，直接写作 BC，CA，AB 等；角通常用 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 或 $\angle CAB$，$\angle ABC$，$\angle BCA$ 等表示.

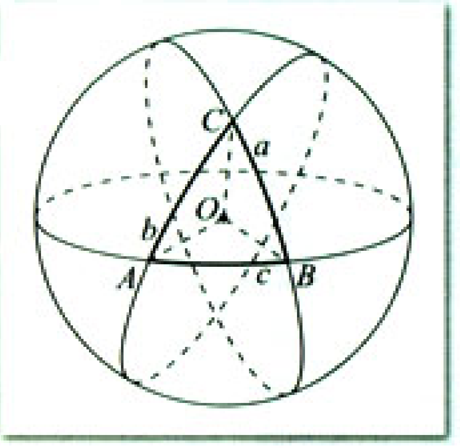


图 2-1

在图 2-1 所示的球面三角形 ABC 中，连接球心 O 与顶点 A，B，C．假设球面的半径为 R，则有

$$\frac{a}{R}=\angle BOC,$$

$$\frac{b}{R}=\angle AOC,$$

$$\frac{c}{R}=\angle AOB.$$

因此，我们有：

球面三角形的边长等于其所对的圆心角的弧度数乘以球面的半径.

特别地，当球面是单位球面（即球面的半径为 1）时，球面三角形的边长等于其所对的圆心角的弧度数.

在图 2-1 中，我们考察以 O 为端点的三条射线 OA，OB，OC，这三条射线显然不共面，由这三条射线两两确定的三个平面所围成的图形，叫做**三面角**，记作 $O\text{-}ABC$. 这三条射线分别都叫做这个三面角的**棱**，每两条棱间的夹角（即$\angle BOC$，$\angle AOC$ 和$\angle AOB$），叫做三面角的**面角**.

关于三面角的性质，请同学们参考第一章的附录.

当我们引进三面角的概念后，大家可以看出，三面角$O-ABC$与球面三角形 ABC 之间有着密切的联系. 事实上，我们不难得到：

球面三角形的三个内角分别与相应的三面角的两个面所成的角相等.

例如图 2-1 中，$\angle A$ 的大小等于二面角 $C-OA-B$ 的大小.

为了研究问题的方便，本书所讨论的球面三角形，规定其角和边所对的圆周角都小于 π. 特别地，单位球面上的三角形，规定其角和边长都小于 π.

2. 球面三角形的球极对称三角形

如图 2-2 所示，球面三角形 ABC 中，BC 边所在的平面将球面分成两部分，包含顶点 A 的那一部分中，有 BC 边所在的大圆的一个极，记其为 A'. 用同样的方法，记 CA 边所在的大圆的那个极为 B'，AB 边所在的大圆的那个极为 C'. 此时，A'，B'，C'三点所构成的球面$\triangle A'B'C'$，叫做原球面$\triangle ABC$ 的**球极对称三角形**，简称**球极三角形**.

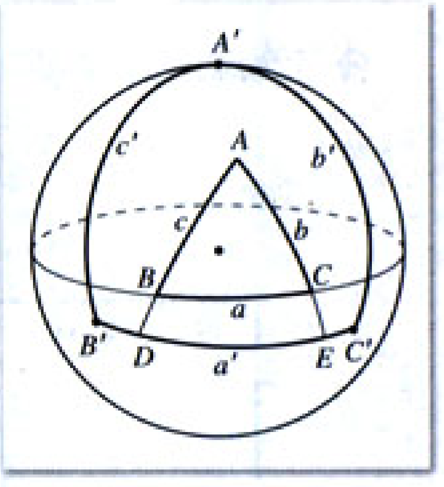


图 2-2

如果球面$\triangle A'B'C'$是球面$\triangle ABC$ 的球极三角形，那么连接 AB'的球面线段是四分之一个大圆的圆弧，连接 AC'的球面线段也是四分之一个大圆的圆弧. 从而可知，A 为边 $B'C'$所在的大圆的一个极. 由此可以证明，球面$\triangle ABC$ 是球面$\triangle A'B'C'$的球极三角形.

这就是说：

在两个球面三角形中，如果其中一个是另一个的球极三角形，则另一个也是这一个的球极三角形.

为了方便起见，如果没有加以特别说明，以后我们总假设所讨论的球面的半径为 1，而且角的度量总是使用弧度作为单位. 从而我们有，球面上大圆的圆弧长等于这段圆弧所对的圆心角的弧度数.

有了这个假设之后，我们可以得到如下定理：

定理 **球极三角形的边长与原三角形的对应角之和为 π.**

证明 如图 2-2 所示，设球面$\triangle A'B'C'$是球面$\triangle ABC$ 的球极三角形. 延长边$\overset{\frown}{AB}$和边$\overset{\frown}{AC}$，交$\overset{\frown}{B'C'}$于点 D 和 E. 则

$$\begin{aligned} a' + A &= \overset{\frown}{B'C'} + \overset{\frown}{DE} \\ &= \overset{\frown}{B'D} + \overset{\frown}{DE} + \overset{\frown}{EC'} + \overset{\frown}{DE} \\ &= \overset{\frown}{B'E} + \overset{\frown}{DC'}. \end{aligned}$$

由于 B' 是 AE 所在的大圆的极，因此$\overset{\frown}{B'E}$为四分之一个大圆，它的长为$\frac{\pi}{2}$. 同理可知，$\overset{\frown}{DC'}$的长也为$\frac{\pi}{2}$. 于是

$$a'+A=\pi.$$

同理 $b'+B=c'+C=\pi$.

这个定理表明了一个球面三角形与它的球极三角形的边和角之间的度量关系. 这是球面三角形所特有的性质.

思考与讨论

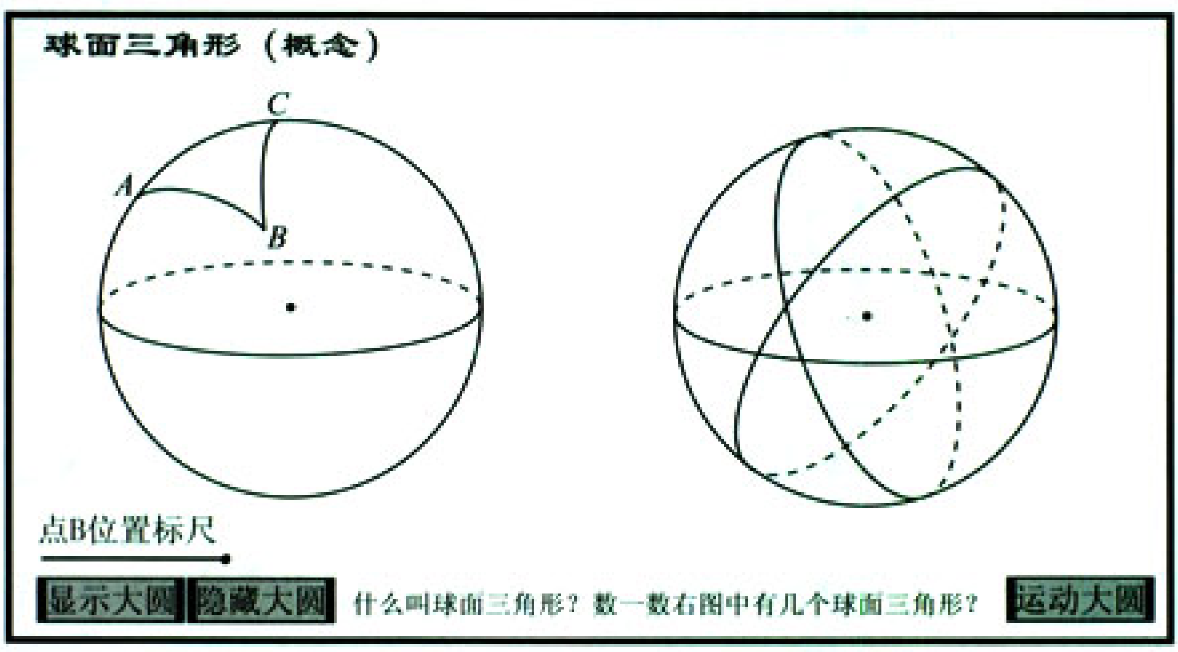
如果球面的半径为 R，本节定理中的结论应该是怎样的？

计算机辅助学习

探索球面三角形

[操作说明]

打开几何画板文件 ZX—22，可进入第一页界面：

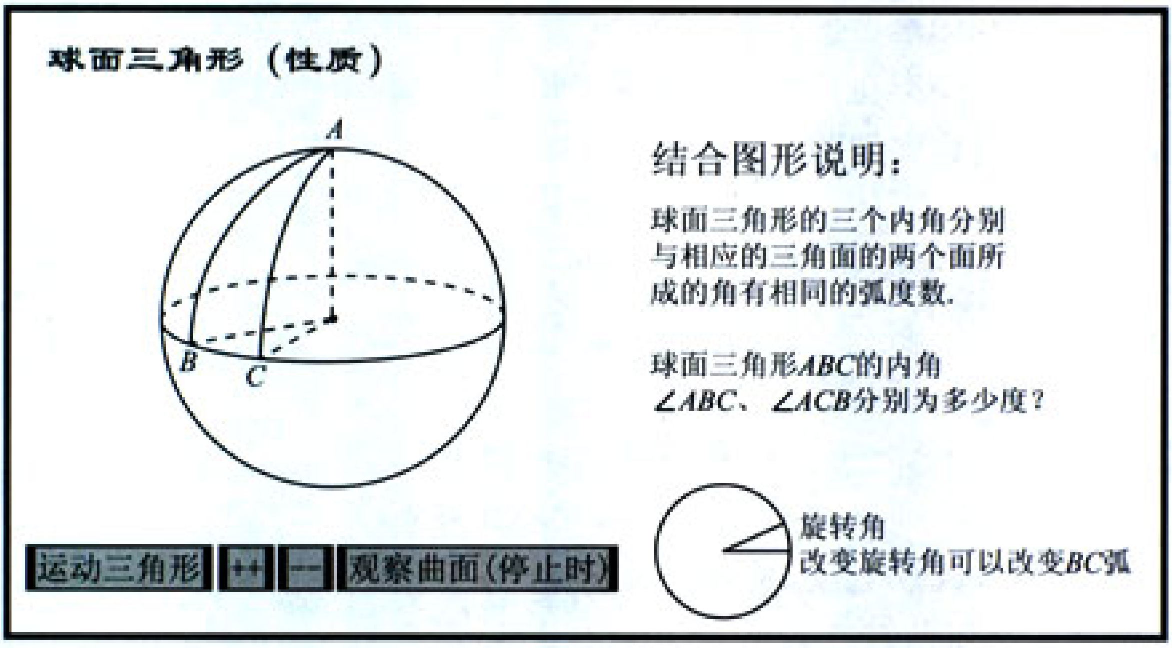


(1) 点击“运动大圆”按钮，左图说明球面三角形的概念，通过改变大圆的位置，理解球面三角形的定义. 通过数球面三角形的个数来加深对此概念的理解.

(2) 点击“显示大圆”“隐藏大圆”按钮，把球面三角形一边所在的大圆画在正对观察方向的位置. 通过这两个按钮还可显示或隐藏球面三角形另两边所在

的大圆，其中的点 B 可以拖动或用标尺改变位置.

（3）结合第二页的图形（如下图）可以理解和学习球面三角形内角的有关性质.



练习

1. 什么是球面三角形？
2. 什么叫三面角？
3. 比较平面三角形与球面三角形的异同.
4. 已知单位球面 O，其中 OA，OB，OC 为球面 O 的三条半径，并且 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，$\angle BOC=\frac{\pi}{4}$，$\angle COA=\frac{\pi}{6}$，求球面三角形 ABC 的三条边长和三个角的度数.
5. 什么是一个球面三角形的球极三角形？球面三角形与它的球极三角形的边角之间有什么关系？
6. 已知球面三角形 ABC，$\angle A=\frac{2\pi}{3}$，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，$\angle C=\frac{\pi}{3}$，求它的球极三角形 $A'B'C'$ 的三个内角.

2.2 球面三角形全等的条件

平面几何中，要判断两个三角形全等，我们有三种办法，即：

如果两个三角形的两边及其夹角分别相等，那么这两个三角形全等（记为 SAS）；

如果两个三角形的两角及一边分别相等，那么这两个三角形全等（记为 ASA）；

如果两个三角形的三边分别相等，那么这两个三角形全等（记为 SSS）.

一个非常自然的问题是，怎样来判断两个球面三角形是否全等呢？上面这三个结论对球面三角形也成立吗？还存在其他判断球面三角形全等的条件吗？

下面我们就来探讨这些问题.

先看判别法则 SAS.

如图 2-3 所示，设在两个球面$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，有两边及夹角相等，即

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'},\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{A'C'},\ \angle A=\angle A'.$$

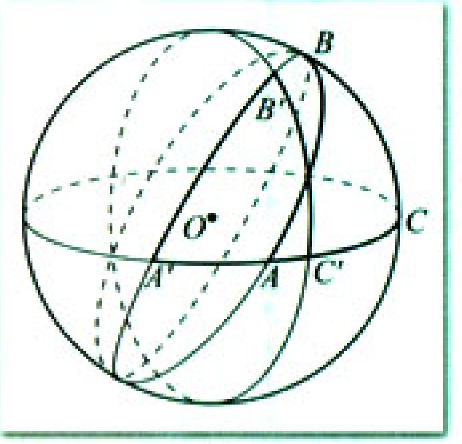


图 2-3

先假定 $A\to B\to C$ 与 $A'\to B'\to C'$ 的转向相同（即都是顺时针或都是逆时针方向），在球面上移动球面$\triangle A'B'C'$使$\angle A'$与$\angle A$叠合，于是$\overset{\frown}{A'B'}$与$\overset{\frown}{AB}$所在的大圆重合，又因为$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，因此可推知点 B' 与点 B 重合.

同理，点 C' 与点 C 重合．于是两个大圆弧$\overset{\frown}{BC}$与$\overset{\frown}{B'C'}$重合，这时球面$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$重合在一起，即这两个球面三角形全等.

如果 $A\to B\to C$ 与 $A'\to B'\to C'$ 的转向相反，则其中一个与另一个的镜面对称图形的转向相同，于是球面$\triangle A'B'C'$与球面$\triangle ABC$关于球心的对称图形全等，从而可知球面$\triangle A'B'C'$与球面$\triangle ABC$全等.

类似上面的论证，同样可推出判别法则 ASA，对球面三角形也成立．这留给同学们作为练习.

下面我们来说明判别法则 SSS 对球面三角形也仍然成立.

如图 2-4 所示，已知在两个球面三角形$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'},\ \overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{B'C'},\ \overset{\frown}{CA}=\overset{\frown}{C'A'}.$$

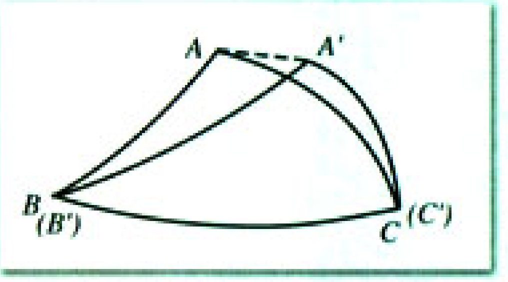


图 2-4

假设 $A\to B\to C$ 与 $A'\to B'\to C'$ 的转向相同．移动$\triangle A'B'C'$，使$\overset{\frown}{BC}$与$\overset{\frown}{B'C'}$重合，则点 A 与点 A' 相对于圆弧$\overset{\frown}{BC}$所在的大圆，将在同一半球面上．如果 A 和 A' 不重合，由于

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'},\ \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{A'C'},$$

则类似于平面中的到线段两端点的距离相等的点一定在线段的垂直平分线上，我们有两点 B 和 C 将位于垂直平分球面线段 AA' 的大圆上（图 2-4）．因此，这个大圆就是$\overset{\frown}{BC}$所在的大圆，从而 A 与 A' 应该分别在$\overset{\frown}{BC}$所在的大圆的两侧，但 A，A' 与 BC 在同一个半球面上，这是不可能的，所以 A 与 A' 重合，这时两个球面$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$重合，即全等.

如果两个三角形的转向不同，当 $B'C'$ 与 BC 重合时，球面$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$将关于$\overset{\frown}{BC}$所在的大圆面对称，同样可推知这两个三角形全等.

由以上分析，可以看到两个平面三角形全等的三个判别法则，对球面三角形同样适用.

我们知道，两个平面三角形，如果仅仅只是三个内角对应相等的话，它们是不一定全等的. 然而，让人惊奇的是，对于球面三角形的全等，我们还可推出以下判别法则：

如果两个球面三角形三个内角分别对应相等，则这两个球面三角形全等.

这个判别法则简记作 AAA.

由此，我们可再一次看出平面几何与球面几何的不同.

像往常一样，以后我们用符号“≌”代表全等，下面我们来证明球面三角形全等的第四个判别法则 AAA.

如图 2-5 所示，设在两个球面$\triangle ABC$和球面$\triangle DEF$中，

$$\angle A=\angle D,\ \angle B=\angle E,\ \angle C=\angle F.$$

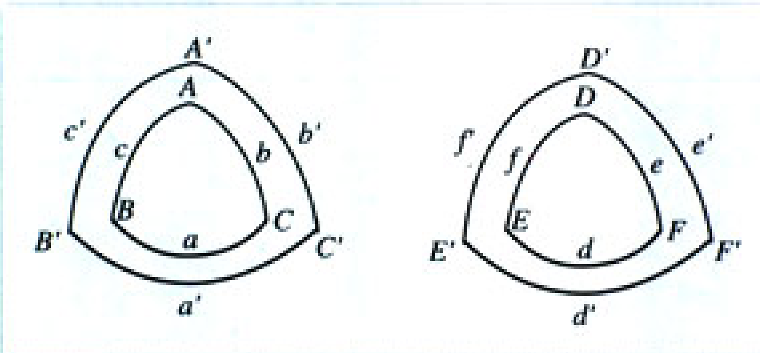


图 2-5

假设 $A\rightarrow B\rightarrow C$ 与 $D\rightarrow E\rightarrow F$ 的转向相同，分别作它们的球极$\triangle A'B'C'$和球极$\triangle D'E'F'$.

根据一个球面三角形与它的球极三角形的关系，有

$$A+a'=\pi=D+d',$$
$$B+b'=\pi=E+e',$$
$$C+c'=\pi=F+f',$$

因为$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$，所以

$$a'=d',\quad b'=e',\quad c'=f'.$$

由判别法则 SSS，得

$$\text{球面}\triangle A'B'C'\cong\text{球面}\triangle D'E'F'.$$

所以$\angle A'=\angle D'$，$\angle B'=\angle E'$，$\angle C'=\angle F'$. 再根据球极三角形的边与原三角形的对应角之和为 π，又可得

$$A'+a=\pi=D'+d,$$
$$B'+b=\pi=E'+e,$$
$$C'+c=\pi=F'+f,$$

所以

$$a=d,\quad b=e,\quad c=f.$$

根据 $d=e=f$ 和判别法则 SSS，可得

球面$\triangle ABC \cong$球面$\triangle DEF$.

思考与讨论

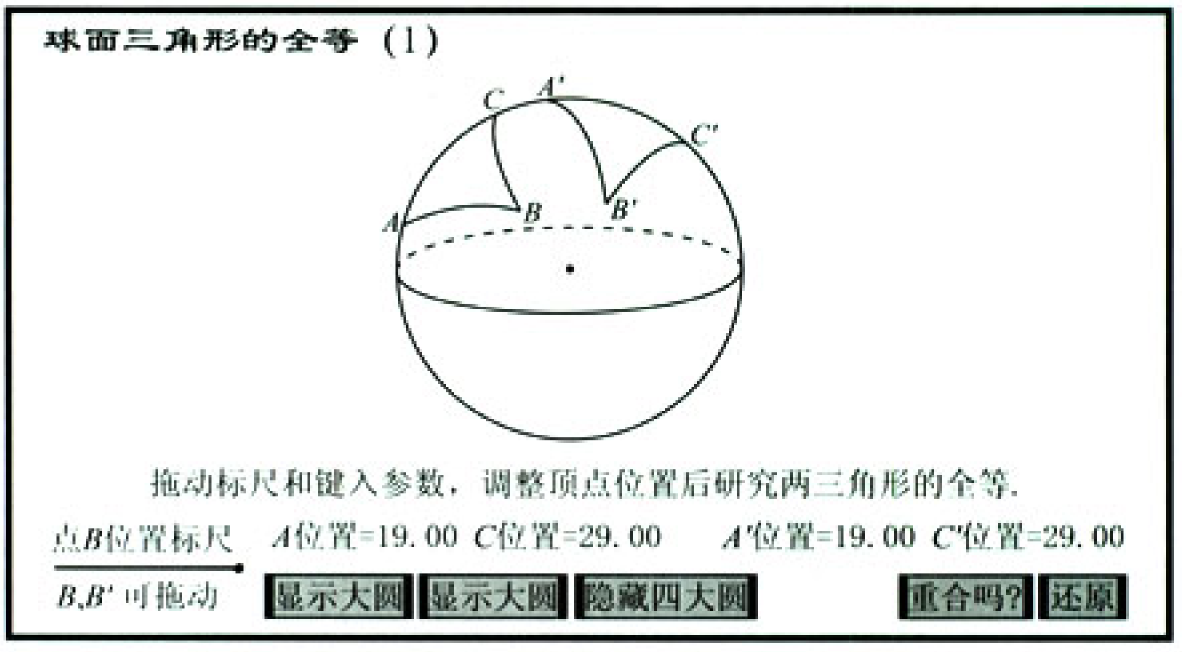
如果球面的半径为R，本节中的判断球面三角形全等的结论还成立吗?

● **计算机辅助学习**

探索球面三角形全等的条件

[操作说明]

打开几何画板文件ZX—23，可进入第一页界面：



(1) 点击两个“显示大圆”按钮，分别观察两个球面三角形的边所在的大圆. 这四个大圆可以用按钮隐去.

(2) 点击“重合吗?”按钮，观察经移动后，两个三角形是否重合?

点B，B'的位置是同步控制的，另外四个顶点的位置可以分别用界面上的参数进行控制，对应参数相同时对应边相等，两三角形拖动后可以重合.

(4) 第二页（图略）上给出了经对称变换后再拖动才能重合的两个球面三角形. 可以和平面几何中类似的情况对比，从而加深对球面三角形全等概念的理解.

(5) 点击“还原”按钮，可使界面还原到初始状态.

练习

1. 如果同一球面上的两个球面三角形关于球心成中心对称，求证这两个三角形全等.
2. 求证两个球面三角形全等的条件 ASA.
3. 在球面三角形中，如果有一个角是直角（等于$\frac{\pi}{2}$），则这个球面三角形叫做球面直角三角形. 平面直角三角形的全等条件有哪些可推广到球面上来？

2.3 球面三角形中边角的基本性质

我们知道，平面三角形中，边角关系具有如下性质：

两边之和大于第三边；

等角对等边，等边对等角；

大角对大边，大边对大角；

事实上，这些性质在球面三角形中也都成立.

基本性质 1 球面三角形的两边之和大于第三边.

证明 已知球面三角形 ABC（图 2-6），将它的三个顶点与球心 O 相连接，得三面角 $O\text{-}ABC$. 由三面角的性质（参看第一章的附录），可知三面角的两个面角之和大于第三个面角，即

$$\angle AOB+\angle BOC>\angle AOC.$$

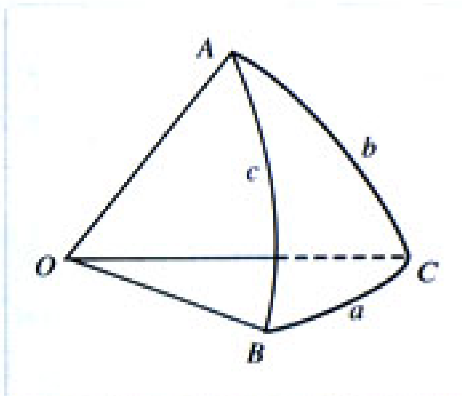


图 2-6

由于单位球面中，弧长与它对的圆心角的弧度数相等，所以

$$c+a>b.$$

同理可得 $a+b>c$，$b+c>a$.

请同学自己证明下面的推论：

推论 球面三角形的两边之差小于第三边.

类似于平面三角形中的等腰三角形的定义，我们称有两边相等的球面三角形为**等腰球面三角形**.

基本性质 2 球面三角形中，等边所对的角相等，等角所对的边相等.

从而我们有，如果一个球面三角形有两个角相等，那么它一定是等腰球面三角形.

证明 如图 2-7 所示，在球面$\triangle ABC$ 中，我们先由 $b=c$ 来推出$\angle B=\angle C$.

过顶点 A 作平面 OBC 的垂线交该平面于点 D，再过点 D 分别作 OB，OC 的垂线

DE，DF.

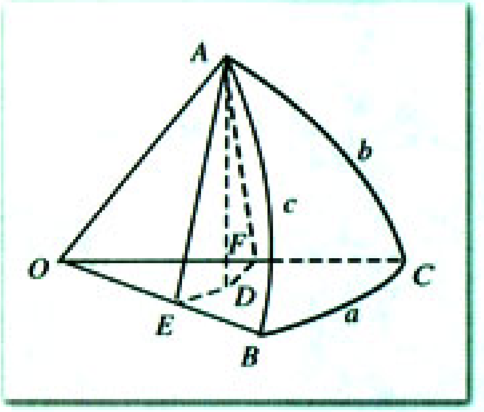


图 2-7

因为 $b=c$，所以

$$\angle AOE=\angle AOF.$$

又因为 $OA=OA$，所以

$$\mathrm{Rt}\triangle AEO\cong\mathrm{Rt}\triangle AFO.$$

因此 $AE=AF$. 又因为 $AD=AD$，所以

$$\mathrm{Rt}\triangle ADE\cong\mathrm{Rt}\triangle ADF.$$

所以$\angle AED=\angle AFD$. 又因为

$$\angle AED=\angle B,\quad \angle AFD=\angle C,$$

从而有$\angle B=\angle C$.

下面由$\angle B=\angle C$ 来推出 $b=c$.

考察球面$\triangle ABC$ 的球极三角形，由于球极三角形的边与原三角形的对应角之和为 π，所以 $b'=c'$.

又根据上面的证明，可得

$$\angle B'=\angle C'.$$

再由球极三角形的边与原三角形的对应角之和为 π，就可得

$$b=c.$$

基本性质 3 球面三角形中，大角对大边，大边对大角.

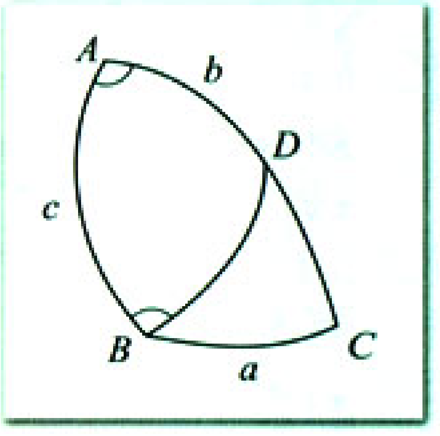


图 2-8

在球面$\triangle ABC$ 中，设

$$\angle ABC>\angle BAC\ (图 2-8),$$

作球面角$\angle ABD$，使其等于$\angle A$，则由基本性质 2，可推知

$$\overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{BD}.$$

根据基本性质 1，有

$$\begin{aligned} b&=\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{DC}\\ &=\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{DC}>a. \end{aligned}$$

用反证法可证明大边对大角. 证明过程留给同学们作为练习.

思考与讨论

如果球面的半径为 R，上述三个基本性质仍成立吗？

练习

1. 证明球面三角形中，如果三边相等，则三个内角也相等.
2. 证明球面三角形中的一边大于其他两边之差.
3. 证明在球面三角形中，大边对大角.

2.4 球面三角形的面积和内角和

再次强调一遍，为了方便起见，如果没有加以特别说明，以后我们总假设所讨论的球面的半径为 1，而且角的度量总是使用弧度作为单位. 从而球面上大圆的圆弧长等于这段圆弧所对的圆心角.

现在我们来研究如何计算球面三角形的面积.

首先，我们来讨论如何计算一个月形（即球面二边形）的面积.

显然，月形的面积与这个月形的内角成正比. 当球面二边形的内角等于 π 时，二边形变为半个球面，其面积为 2π（半径为 R 的球面的面积等于 $4\pi R^2$）.

因此，如图 2-9 所示，当二边形的内角为 α 时，有

$$\frac{S_{球}}{S_{月形}}=\frac{2\pi}{\alpha},$$

因此

$$S_{月形}=\frac{S_{球}\times\alpha}{2\pi}=\frac{4\pi\times\alpha}{2\pi}=2\alpha.$$

下面我们来讨论球面三角形的面积.

如图 2-9 所示，在球面上任作一个球面$\triangle ABC$，作出三条边所在的大圆.

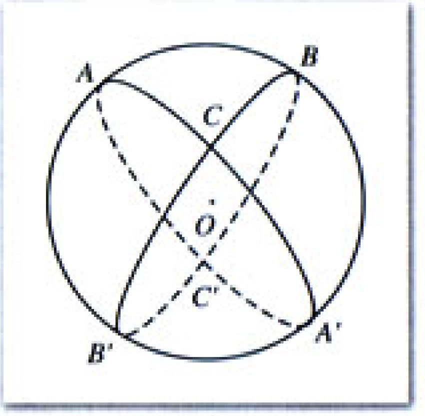


图 2-9

设球面$\triangle A'B'C'$为球面$\triangle ABC$关于球心的中心对称图形，则 AA'，BB'和CC'都是球的直径.

由月形的面积计算公式，得

$$S_{球面\triangle ABC}+S_{球面\triangle A'BC}=2\angle A,$$
$$S_{球面\triangle ABC}+S_{球面\triangle AB'C}=2\angle B,$$
$$S_{球面\triangle ABC}+S_{球面\triangle ABC'}=2\angle C.$$

将上面三个等式两边相加，得

$$3S_{球面\triangle ABC}+S_{球面\triangle A'BC}+S_{球面\triangle AB'C}+S_{球面\triangle ABC'}=2\angle A+2\angle B+2\angle C.$$

球面$\triangle ABC'$与球面$\triangle A'B'C$全等，因此它们的面积相等. 又因为球面$\triangle ABC$、球面$\triangle A'BC$、球面$\triangle AB'C$和球面$\triangle A'B'C$正好组成一个半球面，从而

$$S_{球面\triangle ABC}+S_{球面\triangle A'BC}+S_{球面\triangle AB'C}+S_{球面\triangle A'B'C}=2\pi,$$

所以 $2S_{球面\triangle ABC}+2\pi=2\angle A+2\angle B+2\angle C$，即

$$\boxed{S_{球面\triangle ABC}=\angle A+\angle B+\angle C-\pi.}$$

从球面三角形的面积公式我们有 $\angle A+\angle B+\angle C=\pi+S_{球面\triangle ABC}$. 因此，球面三角形的三个内角和大于 π. 这与平面三角形内角和等于 π 不同，并且内角和与 π 的差正好等于球面三角形的面积.

球面三角形的三个内角和大于 π 也可以从如下例子中看出. 假设由北极 N 出发的两条经线与赤道相交于 A，B 两点，由于每条经线都与赤道相交成直角，由此可以看到球面 $\triangle NAB$ 的三内角之和大于两个直角之和.

思考与讨论

如果球面的半径为 R，那么球面三角形的面积和内角和的关系应该是怎样的？

练习

1. 已知球面 $\triangle ABC$ 中，$A=90^\circ$，$B=60^\circ$，$C=45^\circ$，求球面 $\triangle ABC$ 的面积.
2. 求证球面三角形的三内角和大于 π，而且小于 3π.
3. 是否存在有球面 $\triangle ABC$，其中有两个角都是直角？如果有，请举例说明. 如果没有，请说明理由.

2.5 球面多边形的内角和与欧拉公式

1. 球面多边形及其内角和

我们知道，球面上顺次连接不在同一个大圆上的三点的球面线段所构成的图形是球面三角形. 由球面三角形的面积，很容易归纳出球面多边形的面积.

假设球面上有若干个点，而且没有三个点在同一个大圆上，那么顺次连接这些点的球面线段所构成的图形，叫做球面多边形. 这些球面线段叫做球面多边形的边，球面线段的端点，叫做球面多边形的顶点.

球面多边形像平面多边形一样，按边数分类，分别称为球面三角形、球面四边形、球面五边形……球面 $n(n\geqslant 3)$ 边形. 图2-10所示即为球面四边形 $ABCD$.

如果一个球面多边形位于它的每条边所在大圆的同一侧，则称它为**凸球面多边形**，否则称为凹球面多边形.

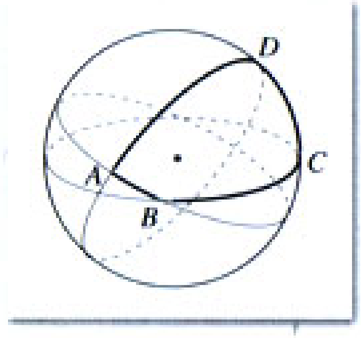


图 2-10

在平面上，假设 n 边形的内角分别用 α_1，α_2，…，α_n 来表示的话，由三角形的内角和等于 π，我们已经归纳出

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=(n-2)\pi.$$

可能有的同学还会用数学归纳法严格的证明这个公式.

那么，球面 n 边形的内角和公式是怎样的呢？我们假设球面 n 边形的内角也分别用 α_1，α_2，…，α_n 表示.

类似于平面的情形，我们可由球面三角形的内角和公式推出球面 n 边形的内角和公式.

我们已经知道球面三角形的内角和为

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\pi+S,$$

其中 S 为球面三角形的面积.

不难看出，任意一个球面 n 边形都可分割为 $n-2$ 个球面三角形. 如图 2-11 中的球面五边形 $ABCDE$，可以分割为球面三角形 ABC、球面三角形 ACD 和球面三角形 ADE. 因此

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=(n-2)\pi+S,$$

其中 S 表示球面 n 边形的面积.

感兴趣的同学不妨用数学归纳法给出这个结论的严格证明.

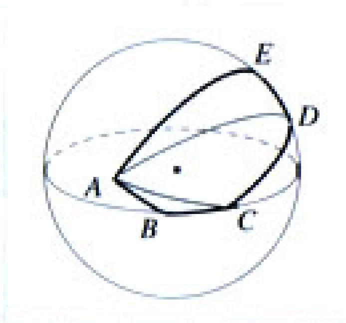


图 2-11

2. 欧拉公式的证明

在立体几何模块里，我们已经学习过了有关多面体的知识，并接触到了一些特殊的凸多面体. 比如长方体、三棱锥等等.

下面我们来讨论凸多面体的顶点数 v、棱数 e 和面数 f 之间的关系.

我们知道，对于长方体来讲，$v=8$，$e=12$，$f=6$，从而

$$v-e+f=8-12+6=2.$$

对于三棱锥来讲，$v=4$，$e=6$，$f=4$，从而

$$v-e+f=4-6+4=2.$$

事实上，伟大的数学家欧拉在 1750 年就发现上述规律，这个结果现在被称为欧拉公式.

欧拉公式 如果凸多面体有 v 个顶点，e 条棱，f 个面，则

$$v-e+f=2.$$

虽然上述结果早在 1750 年就被发现了. 然而，它的严格证明却是 50 多年后由柯西给出的. 由此可见证明欧拉公式的难度之大.

但是，非常有意思的是，借助于球面多边形内角和公式，我们可以给出欧拉公式的一个证明.

我们用 S 代表单位球面 O，如图 2-12 所示，给定 S 外的一个平面多边形 σ（假设 σ 所

在的平面与 S 相离)，对于 σ 内的任意一点 P，连接 OP，则 OP 必与球面相交，记交点为 P'. 我们称 P' 为 P 点在 S 上的**球心投影**，点 P' 叫做点 P 的**投影像**（或**像**），P 叫做 P' 的**原像**.

不难看出，平面多边形 σ 中的点在 S 上的投影所组成的图形，是一个球面多边形（记为 σ'，称为 σ 的球心投影)，而且 σ 和 σ' 的边数和顶点数分别相等（如图 2-12).

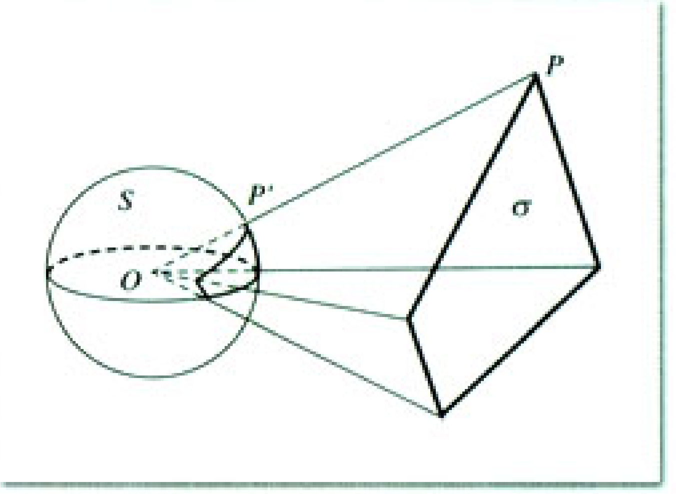


图 2-12

下面我们来证明欧拉公式.

设一个凸多面体有 v 个顶点，e 条棱，f 个面. 记它的 f 个面分别为 Σ_1，Σ_2，…，Σ_f. 选定合适的单位长度，在多面体的内部作单位球面 O（记为 S). 用上述方法作每一个面的球心投影，记 S 上对应的球面多边形分别为 S_1，S_2，…，S_f. 显然，这些球面多边形不重叠地盖满了球面 S. 而且，如果不重复计数的话，它们的顶点数之和为 v，边数之和为 e.

设这些球面多边形的边数分别为 e_1，e_2，…，e_f；内角和分别为 α_1，α_2，…，α_f；面积分别为 W_1，W_2，…，W_f. 由球面多边形的内角和公式有

$$\alpha_1=(e_1-2)\pi+W_1,$$
$$\alpha_2=(e_2-2)\pi+W_2,$$
$$\alpha_3=(e_3-2)\pi+W_3,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_f=(e_f-2)\pi+W_f.$$

由于这些球面多边形不重叠地盖满了球面 S. 因此它们的面积之和等于球面的面积，即

$$W_1+W_2+\cdots+W_f=4\pi.$$

从而

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_f=(e_1+e_2+\cdots+e_f-2f)\pi+4\pi. \qquad (*)$$

上式左端等于所有球面多边形内角的总和. 显然，它与所有球面多边形的顶点数 v 和边数 e 都有关系.

如图 2-13 所示，设 P 是球面多边形 S_1，S_2 和 S_3 的公共顶点. 则显然，S_1 以 P 为顶点的内角，S_2 以 P 为顶点的内角，S_3 以 P 为顶点的内角，它们三者之和为 2π.

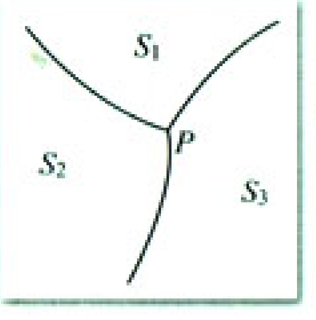


图 2-13

基于这个结论，又因为如果不重复计数的话，这些球面多边形的顶点数之和为 v，所以我们不难得到

$$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_f=2\pi v. \qquad ①$$

另一方面，如果不重复计数的话，这些球面多边形的边数之和为 e，因此

$$e_1 + e_2 + \cdots + e_f = 2e. \qquad ②$$

把①②代入（*）式，即有

$$2\pi v=(2e-2f)\pi+4\pi,$$

化简，得

$$v-e+f=2.$$

习题 2

1. 在球面$\triangle ABC$中，求证：

$$-\frac{\pi}{2}<\frac{1}{2}(\angle A+\angle B-\angle C)<\frac{\pi}{2}.$$

2. 在球面$\triangle ABC$中，如果$\angle C=\frac{\pi}{2}$，求证：

(1) $\frac{\pi}{2}<\angle A+\angle B<\frac{3\pi}{2}$；

(2) $-\frac{\pi}{2}<\angle A-\angle B<\frac{\pi}{2}$.

3. 求证：球面三角形的三边之和小于大圆的周长.

4. 一个球面三角形的每边的边长变为原来的两倍，它的三个内角的大小会改变吗？

5. 已知球面$\triangle ABC$中，$\angle D=\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)$，求证：

$$\cos(\angle D-\angle B)>0,\ \cos\angle D<0;$$

6. 已知球面$\triangle ABC$中，$d=\frac{1}{2}(a+b+c)$，求证：

$$\cos(d-a)>0,\ \sin d<0.$$

第三章 球面三角形的余弦定理和正弦定理

平面几何中，三角形的正弦定理和余弦定理完全揭示了它的边角关系．那么，球面三角形的边和角是否具有类似的关系呢？

本章我们首先将介绍空间向量的叉积运算，然后借助于这一有力工具，得出球面三角形的正弦定理和余弦定理．

作为对比，我们还将比较球面三角公式和平面三角公式的关系．

最后将举例说明球面几何知识在天文导航和全球定位系统中的应用．

3.1 向量的叉积及其性质

已知空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 和实数 λ，我们已经知道 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，$\lambda\boldsymbol{a}$ 的几何意义．而且，大家已经体会到向量是解决空间中平行、全等、长度和角度的度量等问题的锐利武器．在求解立体几何度量问题时，我们已感受到使用向量的优势．

但遇到平面之间的夹角、面积和体积问题时，已有的向量知识就显得有些不足了．实际上，向量还有一种运算与平面之间的夹角、面积和体积密切相关，这就是向量的叉积运算．

正因为如此，向量的叉积运算是解决球面几何问题的有效工具．所以下面我们先来介绍向量的叉积运算，并介绍向量叉积运算的性质．

两个向量的叉积，来源于物理学中的力矩的计算，有兴趣的同学可参考有关物理书籍．

下面我们直接给出这种运算的定义，并讨论它的基本性质．

给定空间中不共面的三个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$．假设它们的始点都是 O．如图 3-1 所示，如果此时 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的位置关系和右手的拇指，食指，中指的位置关系相同，我们就称 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 构成右手系．

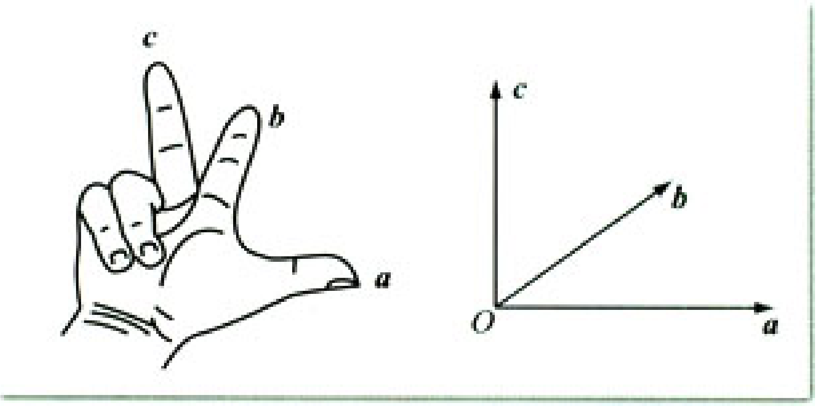


图 3-1

如图 3-2 所示，给定两个不共线的空间向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，它们的叉积（或外积）是满足下列条件的向量 $\boldsymbol{c}$：

（1）$\boldsymbol{c}$ 同时垂直于 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$；

（2）$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 构成右手系；

（3）$|\boldsymbol{c}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的叉积，记作 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$，读作“$\boldsymbol{a}$ 叉乘 $\boldsymbol{b}$”. 值得注意的是，$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 实际上就是以向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为邻边的平行四边形的面积（如图 3-2).

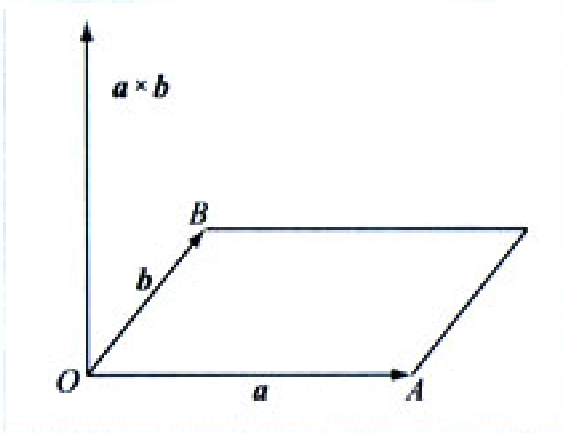


图 3-2

如果向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 共线，我们定义 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$. 因此，不难看出，对任意给定向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，都有

$$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}.$$

另外，由叉积的定义可知，如果单位向量 $\boldsymbol{n}_0$ 与 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都垂直，并且 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{n}_0$ 构成右手系，则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle)\boldsymbol{n}_0.$$

两个向量的叉积运算，满足以下运算律.

对任意三个非零向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 和实数 λ，有

（1）$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$；

（2）$(\lambda\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$；

（3）$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$.

证明　（1）由叉积的定义，不难看出 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ 的长度相等，但方向相反，因此

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}.$$

（2）由定义可直接推出，留给同学们自己完成.

（3）如果 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 中有一个为 $\boldsymbol{0}$，则结论显然成立. 因此我们假设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 都不为 $\boldsymbol{0}$. 设 $\boldsymbol{c}_0$ 是与 $\boldsymbol{c}$ 同向的单位向量，下面我们先来证明

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}_0.$$

如图 3-3 所示，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC_0}=\boldsymbol{c}_0$，过点 O，作平面 $\sigma\perp OC_0$. 设向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 在平面 σ 内的射影分别为 $\overrightarrow{OA_1}$，$\overrightarrow{A_1B_1}$. 显然，

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b},$$

$$\overrightarrow{OB_1}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{A_1B_1},$$

且 $\overrightarrow{OB_1}$ 为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 在平面 σ 内的射影.

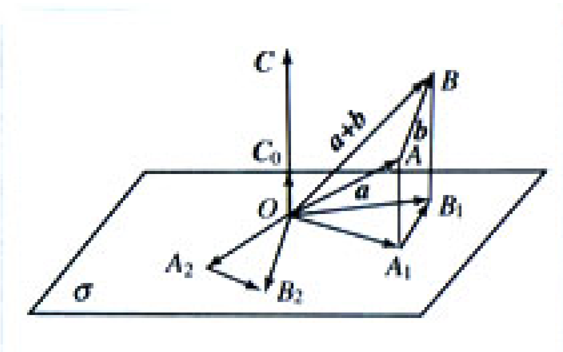


图 3-3

在平面 σ 内将三角形 OA_1B_1 绕 O 点顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$，得到三角形 OA_2B_2.

因为此时 $\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OA_1}$，$\boldsymbol{c}_0$ 在同一个平面内，而且 $\langle\boldsymbol{a},\overrightarrow{OA_1}\rangle+\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}_0\rangle=\frac{\pi}{2}$，因此

$$|\overrightarrow{OA_2}|=|\overrightarrow{OA_1}|=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\overrightarrow{OA_1}\rangle=|\boldsymbol{a}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}_0\rangle,$$

又显然 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{c}_0$，$\overrightarrow{OA_2}$ 构成右手系，所以

$$\overrightarrow{OA_2}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}_0.$$

同理可证 $\overrightarrow{A_2B_2}=\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}_0$，$\overrightarrow{OB_2}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}_0$. 因为 $\overrightarrow{OB_2}=\overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{A_2B_2}$，所以

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}_0=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}_0+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}_0.$$

上式两边同乘以 $|\boldsymbol{c}|$，就得到

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}.$$

下面来探讨，如何在空间直角坐标系中，用向量的坐标来进行向量的叉积运算.

如果 a，b，c，d 都是实数，我们规定，$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$.

设 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 为单位正交基底，而且它们构成右手系. 则显然

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{0},$$

$$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2.$$

因此，如果 $\boldsymbol{a}=(a_1, a_2, a_3)$，$\boldsymbol{b}=(b_1, b_2, b_3)$. 则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=(a_1\boldsymbol{e}_1+a_2\boldsymbol{e}_2+a_3\boldsymbol{e}_3)\times(b_1\boldsymbol{e}_1+b_2\boldsymbol{e}_2+b_3\boldsymbol{e}_3)\\&=(a_2b_3-a_3b_2)\boldsymbol{e}_1+(a_3b_1-a_1b_3)\boldsymbol{e}_2+(a_1b_2-a_2b_1)\boldsymbol{e}_3\\&=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_1+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{e}_3.\end{aligned}$$

即

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right).$$

根据上面这个公式可知，如果已知两个向量的坐标，那么它们的叉积的坐标也是不难得到的.

给定任意的四个向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，我们知道，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ 都是向量. 因此，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$ 是有意义的，即为两个向量的内积.

定理 对任意向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$，有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d} \end{vmatrix}.$$

由向量的内积和外积的定义可知，上式的左右两边都只与向量的长度和夹角有关，而长度和夹角显然与我们建立坐标系的方式无关.

因此，在证明这个结论时，我们总可选择适当的坐标系，使参与计算的向量的坐标具有最简单的形式，以简化证明过程.

证明 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，则容易验证结论成立. 因此，下面假设 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线.

此时，显然 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$. 作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，以 OA 所在的直线为 x 轴，OA 和 OB 所在的平面为 xOy 平面，O 为坐标原点，建立如图 3-4 所示的空间直角坐标系.

因此，可设

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\ 0,\ 0),\ \boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ 0),$$
$$\boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3),\ \boldsymbol{d}=(d_1,\ d_2,\ d_3).$$

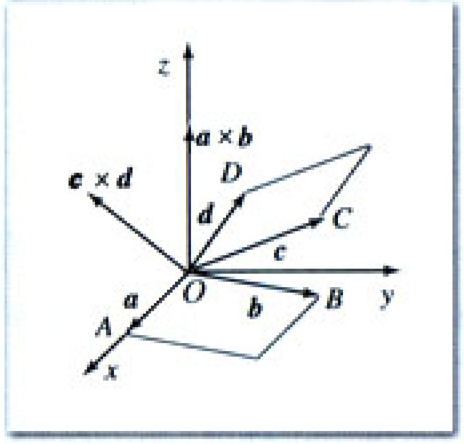


图 3-4

从而

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\left(\begin{vmatrix}0&0\\b_2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&a_1\\0&b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1&0\\b_1&b_2\end{vmatrix}\right)$$
$$=(0,0,a_1b_2),$$
$$\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}=\left(\begin{vmatrix}c_2&c_3\\d_2&d_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_3&c_1\\d_3&d_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}c_1&c_2\\d_1&d_2\end{vmatrix}\right).$$

因此，由向量内积的定义可知

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=0\cdot\begin{vmatrix}c_2&c_3\\d_2&d_3\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}c_3&c_1\\d_3&d_1\end{vmatrix}+a_1b_2\cdot\begin{vmatrix}c_1&c_2\\d_1&d_2\end{vmatrix}\\&=a_1b_2\cdot\begin{vmatrix}c_1&c_2\\d_1&d_2\end{vmatrix}\\&=a_1b_2(c_1d_2-c_2d_1)\\&=(a_1c_1)(b_2d_2)-(a_1d_1)(b_2c_2)\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

下面，我们来分析表达式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})$$

的几何意义.

如图 3-4 所示，向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 都在平面 OAB 内，向量 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{d}$ 都在平面 OCD 内.

显然，向量 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 为平面 OAB 的法向量，向量 $\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}$ 为平面 OCD 的法向量. 因此，这两个法向量的夹角与这两个平面所成的角相等或互补. 设两个基面的夹角为 θ，则

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}|\cos\theta.$$

于是

$$\cos\theta=\frac{(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d}|}.$$

因此，借助于上式，我们可由平面的法向量计算平面之间的夹角.

下面我们来讨论向量的叉积与立体图形的体积之间的关系.

任意给定三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$. 如图 3-5 所示，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$，我们称平行六面体 $OADB-CEFG$ 为向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 所张成的平行六面体.

定理　三个不共面的向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 所张成的平行六面体的体积

$$V=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|.$$

证明　如图 3-5 所示，设 $\boldsymbol{e}$ 是与 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 同方向的单位向量，S 为 $\square OADB$ 的面积，即 $S=|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle$. 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}\rangle)\boldsymbol{e}=S\boldsymbol{e}.$$

因此

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=(S\boldsymbol{e})\cdot\boldsymbol{c}=S(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}).$$

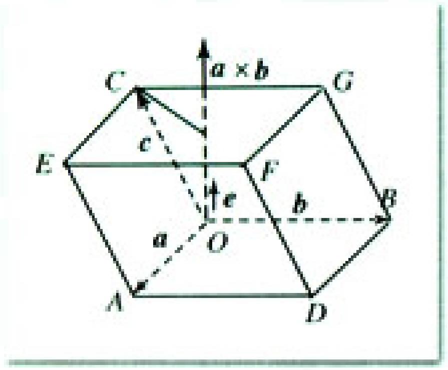


图 3-5

从图上可以看出，当$\langle\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{c}\rangle<\frac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}$是个正数，并且它等于平行六面体 $OADB-CEFG$ 的高 h；当$\langle\boldsymbol{e},\ \boldsymbol{c}\rangle>\frac{\pi}{2}$时，$\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}$ 是个负数，而且 $h=-\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}$. 因此，有

$$h=|\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}|.$$

综上，有

$$\begin{aligned}V&=Sh\\&=S|\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c}|\\&=|S(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{c})|\\&=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|.\end{aligned}$$

因此，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 是一个数，它的绝对值等于一个平行六面体的体积.

由此，我们可以定义一种新的运算.

定义　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ 叫做 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 的**混合积**，记作 $(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})$. 即

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}.$$

由混合积的定义和它的几何意义，我们可以证明

$$(\boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c})=(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a})=(\boldsymbol{c},\ \boldsymbol{a},\ \boldsymbol{b}),$$

感兴趣的同学请自己验证.

例 1　求证：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=-2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$.

证明　$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})&=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{b}\\&=-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\\&=-2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

例 2　求证：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

证明　如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$，即 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，此时容易验证等式成立.

如果 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$，则可建立空间直角坐标系 $O-xyz$，使向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 在 xOy 平面内，并且使向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于 x 轴（如图 3-6）. 于是可设

$$\boldsymbol{a}=(a_1,\ 0,\ 0),\ \boldsymbol{b}=(b_1,\ b_2,\ 0),\ \boldsymbol{c}=(c_1,\ c_2,\ c_3).$$

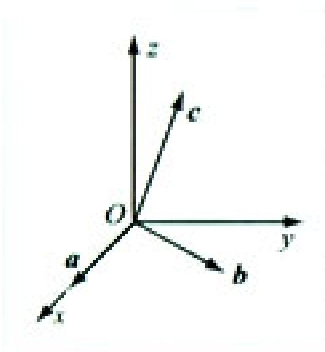


图 3-6

因此

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}&=(0,\ 0,\ a_1b_2)\times(c_1,\ c_2,\ c_3)\\&=\left(\begin{vmatrix}0&a_1b_2\\c_2&c_3\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}a_1b_2&0\\c_3&c_1\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}0&0\\c_1&c_2\end{vmatrix}\right)\\&=(-a_1b_2c_2,\ a_1b_2c_1,\ 0).\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}&=a_1c_1(b_1,\ b_2,\ 0)-(b_1c_1+b_2c_2)(a_1,\ 0,\ 0)\\&=(-a_1b_2c_2,\ a_1b_2c_1,\ 0).\end{aligned}$$

所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

练习

1. 已知 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是构成右手系的单位向量，且 $\boldsymbol{a}=3\boldsymbol{e}_1+\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{c}=\boldsymbol{e}_1-2\boldsymbol{e}_2$. 求：
   (1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；　　(2) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$；
   (3) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；　　(4) $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}$.
2. 求证：$[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]\cdot(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})=2(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$.
3. 用向量的叉积运算，证明平面三角形中的正弦定理.

3.2 球面上的余弦定理

如图 3-7 所示，已知单位球面 O 上的一个球面三角形 ABC，我们记 $\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的大小分别为 A，B，C，它们所对的边的长度分别记为 a，b，c.

连接 OA，OB，OC，则可构成三面角 $O-ABC$. 容易看出，如果角度以弧度制来度量的话，我们有

$$a=\angle BOC,\quad b=\angle AOC,\quad c=\angle AOB.$$

可以看出，球面三角形 ABC 中的边角关系，能够转化为三面角 $O-ABC$ 中的面角和面与面的夹角之间的关系来研究.

因为线与线、面与面之间的夹角可分别用向量的数量积和叉积进行计算，因此我们可用向量的数量积和叉积来探讨球面三角形的边角关系.

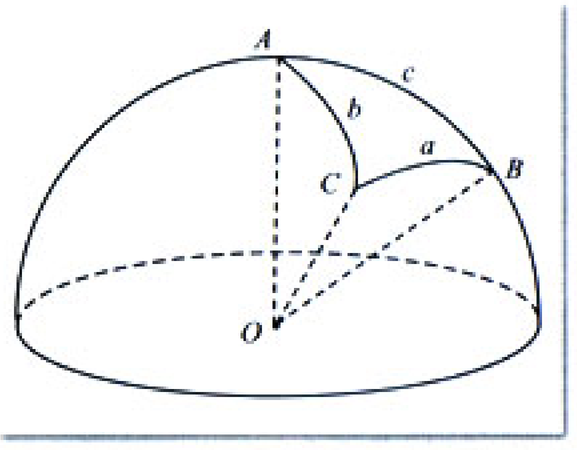


图 3-7

事实上，上一节得到的公式

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix},$$

表达了向量的叉积与向量数量积之间的关系，同样也表达了面与面的夹角与两个向量的夹角之间的关系.

如图 3-7 所示，设 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$. 由上面的公式可知

$$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}\end{vmatrix}.$$

注意到向量 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{a}$ 在平面 OAC 中，向量 $\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{a}$ 在平面 OAB 中，而且球面三角形中的 $\angle A$ 与平面 OAC 与平面 OAB 所成的角相等. 因此，由上一节的知识可知

$$\cos A=\frac{(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})}{|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|}.$$

又因为$\angle BOC=a$，所以

$$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{b}|\cos\angle BOC=\cos a.$$

同理，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\cos c$，$\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=\cos c$.

因此，得

$$|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|\cos A=\begin{vmatrix}\cos a & \cos c\\ \cos b & 1\end{vmatrix}=\cos a-\cos b\cos c.$$

另一方面，由于$\angle AOC=b$，因此

$$|\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}||\boldsymbol{a}|\sin\angle AOC=\sin b.$$

同理，$|\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}|=\sin c$. 所以

$$\sin b\sin c\cos A=\cos a-\cos b\cos c.$$

同理，可得到以下两式

$$\sin c\sin a\cos B=\cos b-\cos c\cos a.$$

$$\sin a\sin b\cos C=\cos c-\cos a\cos b.$$

以上三个关系式，可分别变形为

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c};$$

$$\cos B=\frac{\cos b-\cos c\cos a}{\sin c\sin a};$$

$$\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}.$$

也可以写成

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A;$$

$$\cos b=\cos c\cos a+\sin c\sin a\cos B;$$

$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C.$$

这几个关系式即为球面三角形的**余弦定理**（或**余弦公式**）.

由余弦定理可知，如果我们知道球面三角形中的三条边，或两边及其夹角，就可通过余弦定理计算出这个球面三角形的其他元素.

像平面几何中一样，由球面三角形的已知元素，求未知元素的过程，叫做**解球面三角形**. 在大地测量、航海、飞机航行、卫星定位等过程中，都会碰到解球面三角形的问题.

为了让大家了解余弦定理的应用，下面举一些简单的例子.

例1 已知球面三角形$\triangle ABC$中，$a=80°30'21''$，$b=50°24'8''$，$c=40°36'15$. 求这个球面$\triangle ABC$的三个角和面积$S_{球面\triangle ABC}$（精确到小数点后4位）.

注

在使用计算器或计算机计算时，可充分利用数学软件能够达到的精确度进行计算，最后按要求的精确度取值.

解 首先把角化为以弧度为单位，有

$$a=80°30'21''=1.405\ 092,$$

$$b=50°24'8''=0.879\ 685,$$

$$c=40°36'15''=0.708\ 676.$$

代入余弦公式，可得

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$$
$$=\frac{\cos 1.405\ 092-\cos 0.879\ 685\cos 0.708\ 076}{\sin 0.879\ 685\sin 0.708\ 076}$$
$$=-0.636\ 061\ 479,$$

因此 $A=2.260\ 18=129.457\ 5^\circ=129^\circ27'27''$.

同理

$$\cos B=\frac{\cos b-\cos c\cos a}{\sin c\sin a}$$
$$=\frac{\cos 0.879\ 685-\cos 0.708\ 076\cos 1.405\ 09}{\sin 0.708\ 076\sin 1.405\ 09}$$
$$=0.797\ 867.$$

因此 $B=0.647\ 048=37.061\ 35^\circ=37^\circ3'40''$.

$$\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\sin a\sin b}$$
$$=\frac{\cos 0.708\ 076-\cos 1.405\ 09\cos 0.879\ 685}{\sin 1.405\ 09\sin 0.879\ 685}$$
$$=0.800\ 66,$$

因此 $C=0.534\ 231=30.599\ 45^\circ=35^\circ58'2''$.

从而

$$S_{\triangle ABC}=A+B+C-\pi$$
$$=2.260\ 18+0.647\ 048+0.534\ 231-3.141\ 59265$$
$$\approx 0.299\ 7.$$

练习

1. 求证球面三角形中角的余弦公式：

$$\cos A=-\cos B\cos C+\sin B\sin C\cos a;$$
$$\cos B=-\cos C\cos A+\sin C\sin A\cos b;$$
$$\cos C=-\cos A\cos B+\sin A\sin B\cos c.$$

2. 在球面 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，$a=\frac{2\pi}{3}$，$b=\frac{\pi}{4}$，求 c.

3.3 球面上的正弦定理

类似于平面三角形的正弦定理，我们有球面三角形的正弦定理为

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

下面我们仍借助于向量的知识给出证明.

证明 如图 3-8 所示，过点 O 作平面 σ 垂直于 $\overrightarrow{OA}$. 设 $\overrightarrow{OB}$ 与 $\overrightarrow{OC}$ 在平面 σ 上的垂直投影分别为 $\overrightarrow{OB_1}$ 与 $\overrightarrow{OC_1}$.

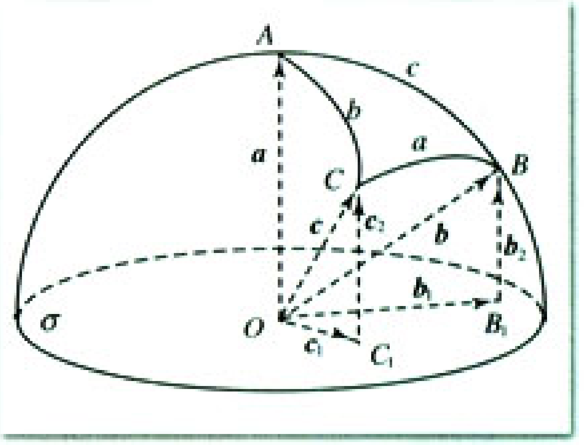


图 3-8

令 $\overrightarrow{OB_1}=\boldsymbol{b}_1$，$\overrightarrow{B_1B}=\boldsymbol{b}_2$，$\overrightarrow{OC_1}=\boldsymbol{c}_1$，$\overrightarrow{C_1C}=\boldsymbol{c}_2$，则

$$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2,\quad \boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2.$$

以 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 为邻边张成的平行六面体的体积记为 D.

由内积和叉积的分配律，得

$$\begin{aligned}D&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\\&=\boldsymbol{a}\cdot[(\boldsymbol{b}_1+\boldsymbol{b}_2)\times(\boldsymbol{c}_1+\boldsymbol{c}_2)]\\&=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}_1)\\&=|\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}_1|\\&=|\boldsymbol{b}_1||\boldsymbol{c}_1|\sin A\\&=\sin c\sin b\sin A.\end{aligned}$$

即 $D=\sin c\sin b\sin A$.

等式两边同时除以 $\sin a\sin b\sin c$，得

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{D}{\sin a\sin b\sin c}.$$

同理可证

$$\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{D}{\sin a\sin b\sin c},\qquad \frac{\sin C}{\sin c}=\frac{D}{\sin a\sin b\sin c},$$

所以

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

如果球面三角形中有一个角为直角，则称这个球面三角形为**球面直角三角形**.

推论 如果球面直角三角形 ABC 中，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，则有

$$\cos c=\cos a\cos b;\qquad ①$$

$$\sin A=\frac{\sin a}{\sin c},\quad \sin B=\frac{\sin b}{\sin c};\qquad ②$$

$$\cos A=\frac{\tan b}{\tan c},\quad \cos B=\frac{\tan a}{\tan c};\qquad ③$$

$$\tan A=\frac{\tan a}{\sin b},\quad \tan B=\frac{\tan b}{\sin a}.\qquad ④$$

证明 因为 $\angle C=\frac{\pi}{2}$，所以 $\cos C=0$，$\sin C=1$，分别代入球面三角形的余弦公式和

正弦公式，就可直接推出公式①和②.

又由球面三角形的余弦定理以及①式，有

$$\begin{aligned}\sin b\sin c\cos A&=\cos a-\cos b\cos c\\&=\cos a-\cos^2 b\cos a\\&=(1-\cos^2 b)\cos a\\&=\sin^2 b\cos a,\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\cos A&=\frac{\sin^2 b\cos a}{\sin b\sin c}\\&=\frac{\sin b\cos a}{\sin c}\\&=\frac{\tan b\cos b\cos a}{\sin c}\\&=\frac{\tan b\cos c}{\sin c}\\&=\frac{\tan b}{\tan c}.\end{aligned}$$

因此③的第一个式子成立.

其他各式的证明，留给同学们作为练习.

思考与讨论

推论表达了球面直角三角形中的边角关系. 请同学把这些关系与平面直角三角形中的边角关系相比较，看看哪一条性质相当于勾股定理，哪些相当于锐角三角函数表达的角与边的关系，从中体会两者的异同.

例 1 由球面三角形的余弦定理证明正弦定理.

证明 由余弦定理，得

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

因此

$$\begin{aligned}\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}&=\frac{1-\cos^2 A}{\sin^2 a}\\&=\frac{\sin^2 b\sin^2 c-(\cos a-\cos b\cos c)^2}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}\\&=\frac{1-(\cos^2 a+\cos^2 b+\cos^2 c)+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}.\end{aligned}$$

用同样的方法计算$\frac{\sin^2 B}{\sin^2 b}$和$\frac{\sin^2 C}{\sin^2 c}$的值，从而可知

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

例 2 求证球面三角形中的半角公式.

在球面△ABC 中，如果令 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则：

(1) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$；

(2) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}$；

(3) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s\sin(s-a)}}$.

> **注** 球面三角形在实际应用时，除用到正弦公式和余弦公式外，还要用到其他球面三角公式. 这里作为例子，我们证明了部分半角公式. 同学们可以查阅有关书籍去学习其他一些重要的球面三角公式.

证明 (1) 由余弦公式

$$\sin b\sin c\cos A=\cos a-\cos b\cos c,$$

可得

$$\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}.$$

把公式 $\cos A=2\cos^2\frac{A}{2}-1$ 代入上式，得

$$2\cos^2\frac{A}{2}-1=\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c},$$

因此

$$\begin{aligned}\cos^2\frac{A}{2}&=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin b\sin c+\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}\right)\\&=\frac{1}{2}\,\frac{-\cos(b+c)+\cos a}{\sin b\sin c}\\&=\frac{\sin\frac{1}{2}(a+b+c)\sin\frac{1}{2}(b+c-a)}{\sin b\sin c}\end{aligned}$$

(分子变形时，应用了和差化积公式)

$$=\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}.$$

从而 $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin s\sin(s-a)}{\sin b\sin c}}$.

(2) 把平面三角公式 $\cos A=1+2\sin^2\frac{A}{2}$代入余弦公式，就可证明 $\sin\frac{A}{2}$的表达式. 详细的证明留给同学们作为练习.

(3) 把(2)和(1)中得到的 $\sin\frac{A}{2}$和 $\cos\frac{A}{2}$的表达式两边相除，即可得到(3)的结论.

练习

1. 已知在球面直角三角形 ABC 中，$\angle C=\frac{\pi}{2}$，求证：

(1) $\sin B=\frac{\sin b}{\sin c}$；　(2) $\cos B=\frac{\tan a}{\tan c}$；　(3) $\tan B=\frac{\tan b}{\sin a}$.

2. 在球面$\triangle ABC$ 中，已知 $A=126°18'14''$，$B=63°42'14''$，$c=106°43'37''$，求 a.

提示：先使用球面三角形中角的余弦公式（上节练习），再用球面三角形的正弦定理求解.

3.4 平面三角公式与球面三角公式的比较

1. 正弦定理与余弦定理的比较

大家知道，我们所观察到的火车轨道往往都是笔直地向前延伸的. 但是，另一方面，由于地球表面可以近似地看作是球面，因此火车轨道实际上应该是圆弧形的. 这究竟是怎么回事呢？

如图 3-9 所示，假设 AB 是地球表面上一条球面线段，显然它是一个弧形. 但是，如果我们只观察其中的一小段 CD 的话，我们就可以发现 CD 差不多就是直的.

这就是说，当球面线段很短时，球面线段可以近似地看作是平面上的线段.

于是，当球面三角形 ABC 的三边 a，b，c 为定值，球面半径愈来愈大时，球面三角形也就愈来愈近似于平面三角形（如图 3-10 所示）.

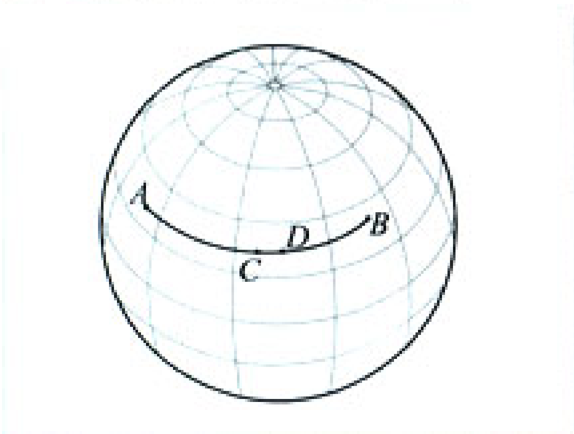


图 3-9

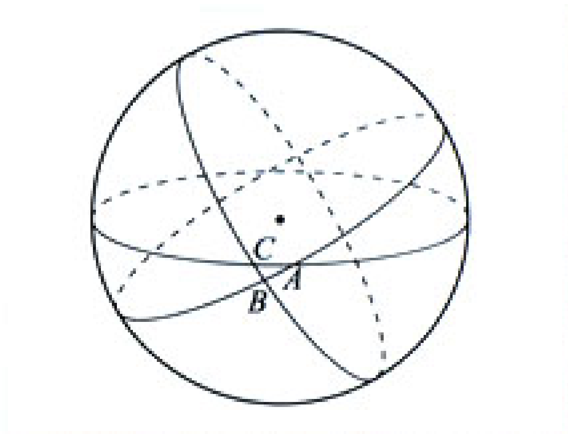


图 3-10

从这些观点出发，下面我们来比较平面三角形和球面三角形的正弦定理与余弦定理.

平面三角形的正弦定理为

$$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c},$$

而球面三角形的正弦定理为

$$\frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}.$$

可以看出，它们的不同点是，一个是内角的正弦与所对边的比值，一个是内角的正弦与所对边的正弦的比值.

我们知道边与边的正弦值是不同的，但是，当边长 a 越来越小时，a 和 $\sin a$ 将越来越接近. 这个事实可以从单位圆中看出来.

如图 3-11 所示，假设 $\angle AOB=a$，则

$$AC=\sin a,\quad \overset{\frown}{AB}=a.$$

不难看出，当 a 很小时，$\sin a\approx a$.

这就是说，当球面三角形中的 a，b，c 都相对很小时，它们可分别作为 $\sin a$，$\sin b$，$\sin c$ 的近似值，即

$$\sin a\approx a,\quad \sin b\approx b,\quad \sin c\approx c.$$

此时，球面三角形的正弦定理就变成了平面三角形的正弦定理.

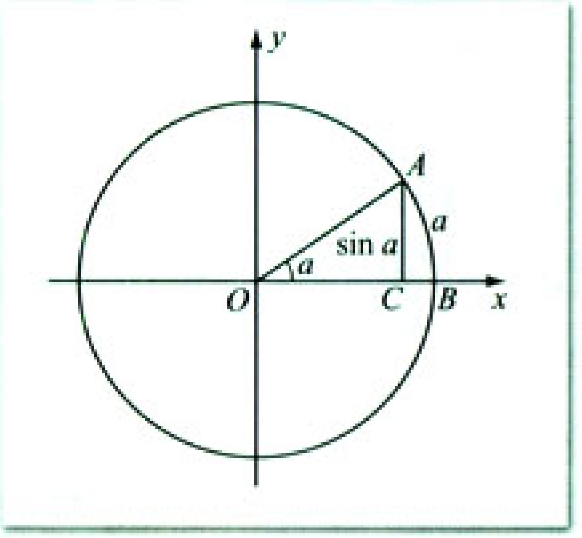


图 3-11

下面来比较余弦定理.

平面三角形的余弦定理是

$$a^2=b^2+c^2-2ab\cos A,$$

球面三角形的余弦定理是

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A.$$

从形式上看，看不出这两个公式之间有什么联系. 但是同上面一样，我们来考虑边长很小的球面三角形. 事实上，当 a 很小时，有

$$\cos a=1-2\sin^2\frac{a}{2}\approx 1-\frac{a^2}{2}.$$

同理，当 b 和 c 也都很小时，可得

$$\cos b\approx 1-\frac{b^2}{2},\quad \cos c\approx 1-\frac{c^2}{2}.$$

把它们代入球面三角形的余弦定理，有

$$1-\frac{a^2}{2}=\left(1-\frac{b^2}{2}\right)\left(1-\frac{c^2}{2}\right)+bc\cos A.$$

化简可知

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A-\frac{b^2c^2}{2}.$$

由这个式子就可看出，当球面三角形的各边长越来越小时，球面三角形的余弦公式就越来越接近平面三角形的余弦公式.

2. 一般球面上的正弦定理和余弦定理

前面我们已经讨论了单位球面上的正弦定理和余弦定理，但是在实际应用中，我们所遇到的球面不一定是单位球面，因此我们有必要讨论半径为 R 的球面的情形.

我们知道，单位球面中，球面线段的长度和它所对的圆心角的弧度数是相等的. 显然，在半径为 R 的球面上，这个结论不再成立. 事实上，如果半径为 R 的球面上的球面线段长为 x，它所对的圆心角为 α，则

$$\frac{x}{R}=\alpha.$$

而且，按照球面上的角的定义不难看出，当球面的半径变大或变小时，球面三角形的内角大小是不变的.

如图 3-12 所示，(1) 是单位球面，(2) 将单位球面放大 R 倍后的球面. 显然

$$\angle AOB=\angle A'O'B',\ \angle BOC=\angle B'O'C',\ \angle AOC=\angle A'O'C'.$$

而且

$$a=\frac{a'}{R},\ b=\frac{b'}{R},\ c=\frac{c'}{R}.$$

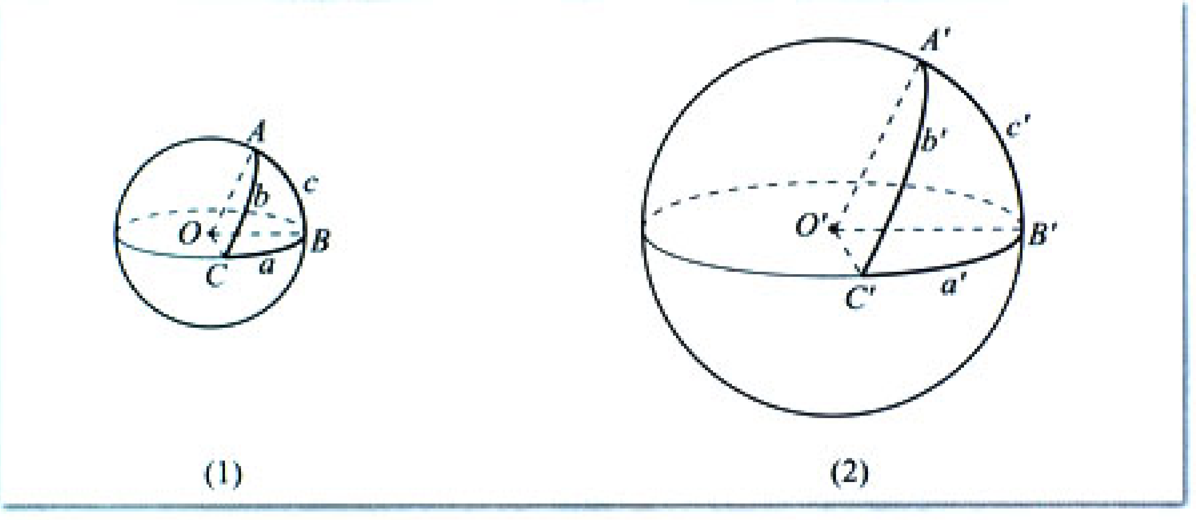


图 3-12

由此我们不难得到，如果球面的半径为 R，那么球面三角形的正弦定理应为

$$\frac{\sin A}{\sin \frac{a}{R}}=\frac{\sin B}{\sin \frac{b}{R}}=\frac{\sin C}{\sin \frac{c}{R}},$$

球面三角形的余弦定理应为

$$\cos \frac{a}{R}=\cos \frac{b}{R}\cos \frac{c}{R}+\sin \frac{b}{R}\sin \frac{c}{R}\cos A.$$

例 1 已知地球的半径为 R，地球表面上点 A 的经度和纬度分别为 α_1 和 θ_1，点 B 的经度和纬度分别为 α_2 和 θ_2，求 A，B 两点间的球面距离.

（注：这里我们将地球近似地看成球体，而且经度值和纬度值都用正负数表示，东经度值和北纬度值用正数表示，西经度值和南纬度值用负数表示）

解 如图 3-13 所示，设北极为点 N，$\overset{\frown}{NA}$和$\overset{\frown}{NB}$所在的经线与赤道分别相交于点 C 和点 D，而且

$$\angle AOC=\theta_1,\quad \angle BOD=\theta_2,$$
$$\angle N=\angle COD=\alpha_2-\alpha_1.$$

于是有

$$\frac{\overset{\frown}{NA}}{R}=\angle AON=\frac{\pi}{2}-\theta_1,$$
$$\frac{\overset{\frown}{NB}}{R}=\angle BON=\frac{\pi}{2}-\theta_2.$$

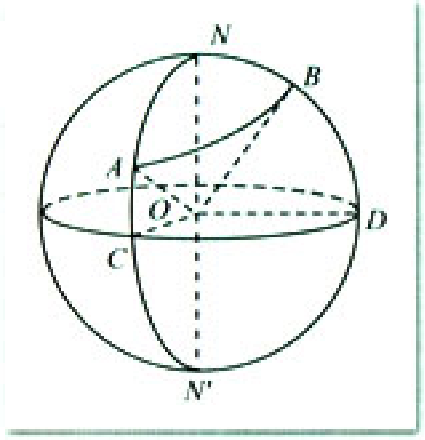


图 3-13

在球面△ANB 中，由余弦公式得

$$\cos\frac{\overset{\frown}{AB}}{R}=\cos\frac{\overset{\frown}{NB}}{R}\cos\frac{\overset{\frown}{NA}}{R}+\sin\frac{\overset{\frown}{NB}}{R}\sin\frac{\overset{\frown}{NA}}{R}\cos\angle N,$$

即

$$\cos\frac{\overset{\frown}{AB}}{R}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_2\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta_1\right)\cos(\alpha_2-\alpha_1).$$

化简可得

$$\cos\frac{\overset{\frown}{AB}}{R}=\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2\cos(\alpha_2-\alpha_1).$$

根据这个式子，我们就可以根据地面上 A，B 两点的经度值和纬度值求出它们之间的球面距离.

3.5 球面几何知识的应用

1. 天文导航

轮船在远离陆地的茫茫大海中航行时，除了大海之外，只能见到天上的日、月、星辰. 如何在航行中不致迷失方向？现在有卫星导航，在船上配备一部卫星导航接收机，就可随时知道自己所处的位置了. 但是，在卫星出现以前的很长时期内，舰船在大海中航行时，主要依靠的是天上的日、月、星辰，通过对它们的测量而知道自己所在的位置，这就是天文导航.

日、月、星辰都不是固定不动的，即使是恒星，也是移动的. 此外，由于地球的自转，各个星辰在地球上看来，也是每天绕地球转动一周. 即使是北极星，它也不是在北极上空不动，而是在一个小的圆周上每天转动一周.

为了能利用星辰进行导航，首先要确定星辰的星下点，即星辰和地心的连线与地球表面的交点（如图 3-14 所示）.

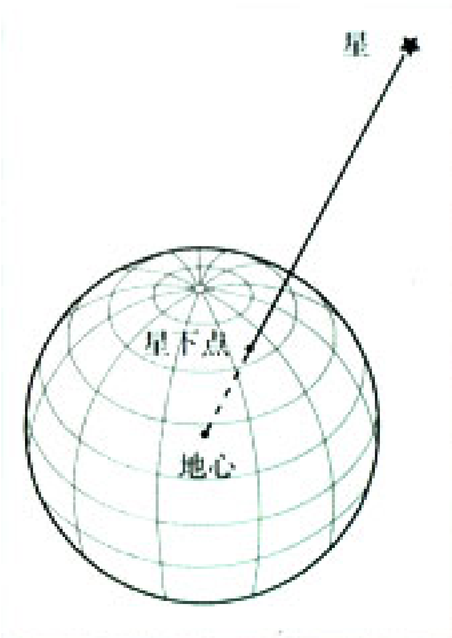


图 3-14

由于地球在不停地自转，各个星辰的星下点也是在移动的，但在固定的时刻各个星辰的星下点在地球上的位置是固定的. 为了便于航海，天文工作者为航海人员编制了一本《航海天文历》. 其中记载了太阳、月亮、各种行星和许多恒星在各个时刻的星下点的位置.

为了能进行导航，知道了各个星下点的位置之外，还需要知道自己的舰船到各个星下点的距离. 但是舰船与星下点的距离可通过仪器用如下方式测量出来.

如图 3-15 所示，假设舰船位于点 C 处，某星辰位于 T 处. 由于 T 离地球很远，T 与地心 O 的连线 TO，T 与船 C 的连线 TC，可以看成是平行线，即 $TO /\!/ TC$. 通过仪器可以测量出 TC 与水天线的夹角 h，从而可知连接星下点 D 与舰船 C 的大圆弧所对的球心角 $\angle COD=\frac{\pi}{2}-h$. 因此舰船与星下点 D 之间的距离为 $\left(\frac{\pi}{2}-h\right)R$，其中 R 为地球的半径.

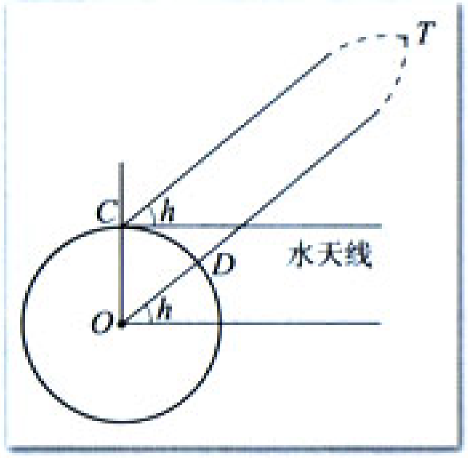


图 3-15

用同样的方法可测得舰船与另外一颗恒星 T' 的星下点 D' 的距离为 $\left(\frac{\pi}{2}-h'\right)R$.

有了这些数据，利用球面几何的相关知识，我们就可以确定舰船的具体位置了.

我们知道，地球表面上任意一点 C 的位置可以用它的经度值 x 和纬度值 y 来表示，记作 $C(x, y)$，称为 C 点的地理坐标. 因此，要确定舰船的位置，我们只需确定舰船的经度值和纬度值即可. 为了计算方便起见，这里经度值和纬度值都用正负数表示，东经度值和北纬度值用正数表示，西经度值和南纬度值用负数表示.

如图 3-16 所示，假设两个星下点的地理坐标分别为 $D(\alpha_1, \beta_1)$ 和 $D'(\alpha_2, \beta_2)$. 测得舰船 C 与 D，D' 的球面距离分别为 a_1，a_2. 下面来计算 C 的地理坐标，即它的经度值 x 和纬度值 y.

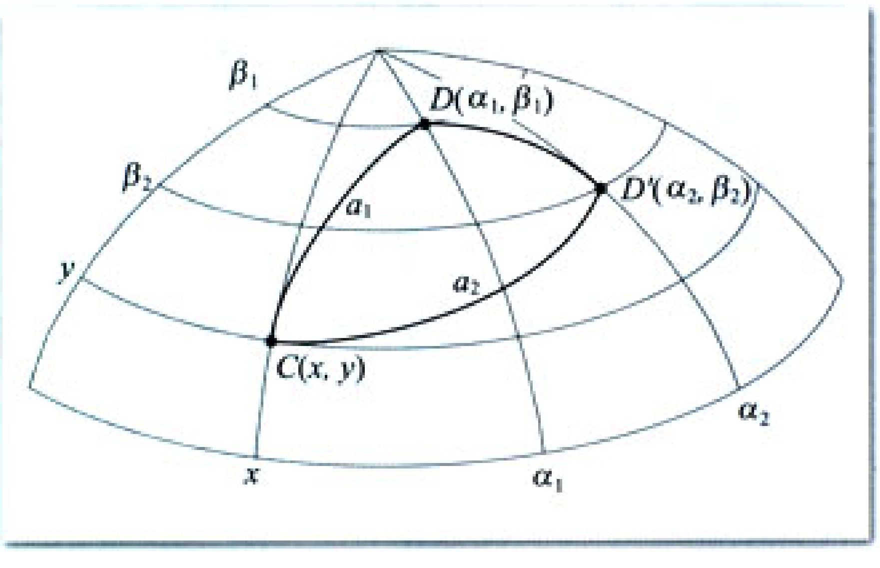


图 3-16

由上一节的例 1 的结论，我们有

$$\begin{cases} \cos\dfrac{a_1}{R}=\sin\beta_1\sin y+\cos\beta_1\cos y\cos(x-\alpha_1) \\ \cos\dfrac{a_2}{R}=\sin\beta_2\sin y+\cos\beta_2\cos y\cos(x-\alpha_2) \end{cases}$$

理论上来讲，我们只需将 α_1，α_2，β_1，β_2，a_1，a_2，R 的具体数据代入上述方程组中，然后解出 x，y 的值即可.

但是，我们不难看出，上述方程实际上是很难解的．虽然现在我们可以使用计算机来求出 x 和 y 的近似值，但是当时的人们并没有计算机可以借助．

那么，实际上人们到底是怎样来确定舰船的位置的呢？有兴趣的同学可以参见本章的阅读材料了解有关知识．

2．全球定位系统

我们知道，通过利用全球定位系统，我们可以准确地确定地球上物体的方位．但是，你知道全球定位系统中应用了有关球面几何的知识吗？

下面我们就来介绍这一方面的内容．

如果一个球面被平面所截，那么球面将被平面分成两部分，其中每一部分都称为一个球冠，此时该平面称为截平面．球冠上的点到截平面的最大距离称为球冠的高．如果一个球冠的半径为 R，高为 h 的话，我们可以证明球冠的面积公式为

$$S=2\pi Rh.$$

例 假设地球的一颗卫星离地面的高度 l 为 2 020 km，求地面上能直接接收到卫星发出的信号的面积．（地球半径 R 取为 6 378 km）

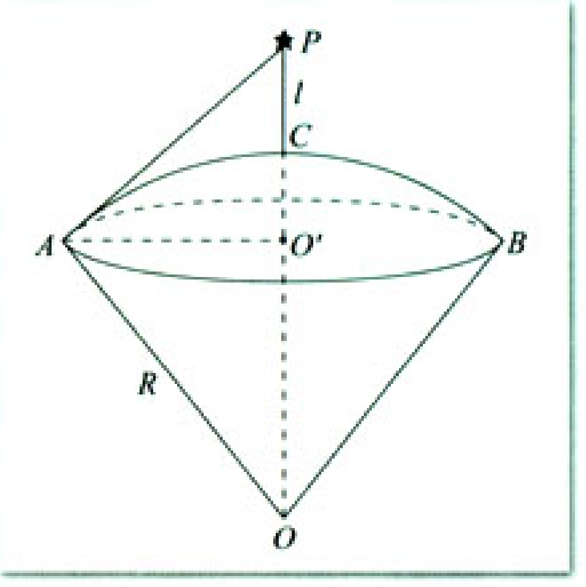


图 3-17

解 如图 3-17 所示，O 为地心，过卫星 P 作地球表面的切线 PA，然后过 A 点作垂直于 OP 的平面，截地球表面得球冠 ACB．不难看出，所要求的就是球冠 ACB 的面积．

在直角三角形 OAP 中，由 $OA^2=OP\cdot OO'$ 可知

$$OO'=\frac{OA^2}{OP}=\frac{R^2}{R+l},$$

因此，这个球冠的高度 h 为

$$h=R-OO'=R-\frac{R^2}{R+l}=\frac{Rl}{R+l}.$$

从而，所求的面积

$$S=2\pi Rh=\frac{2\pi R^2 l}{R+l}.$$

将 $R=6\ 378$，$l=2\ 020$ 代入上式可得

$$S\approx 61\ 478\ 608.7.$$

即地面上能直接接收到卫星发出的信号的面积为 61 478 608.7 km^2．

从这个例子可以看出，一颗卫星所能覆盖的地球面积是有限的，因此，在全球定位系

统中，我们需要用到多颗卫星.

事实上，如图 3-18 所示，现在的全球定位系统是由 24 颗卫星组成的，它们分布在 6 个独立的轨道上，每个轨道有 4 颗卫星，卫星的高度都是2 020 km. 而且，在地球表面的任何地方任何时刻都可观测到至少 4 颗卫星，平均可观测到 6 颗，最多的时候可以观测到 11 颗.

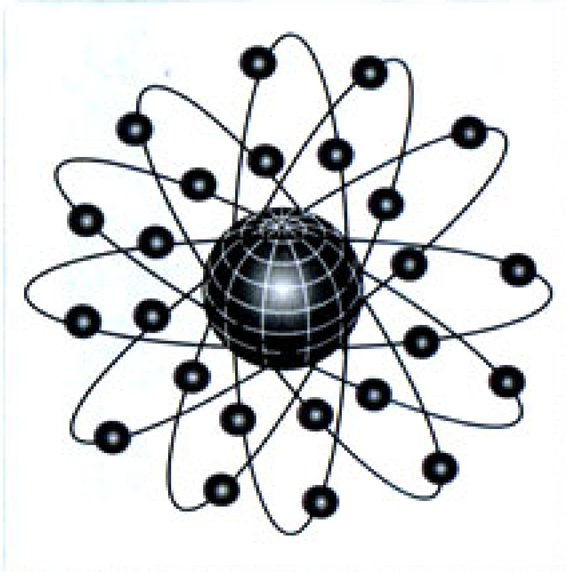


图 3-18

下面我们来看全球定位系统的几何原理.

如图 3-19 所示，假设处在 A 处的卫星接收器能接收到卫星 T_1 的信号，并且知道 A 和卫星 T_1 的距离 d_1（卫星接收器能够自动识别距离但不能识别方向）. 那么我们知道，A 必定在以 T_1 为球心，d_1 为半径的球面 S_1 上.

同理，A 必定在以 T_2 为球心，d_2 为半径的球面 S_2 上. 从而 A 一定处在球面 S_1 与球面 S_2 的交线 C 上，不难证明 C 为一个圆.

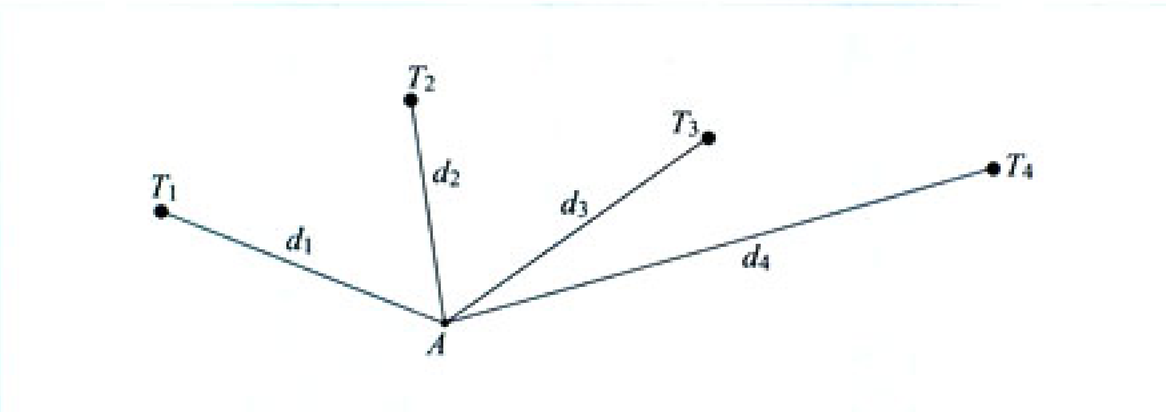


图 3-19

又 A 在以 T_3 为球心，d_3 为半径的球面 S_3 上，因此 A 一定在圆 C 与球面 S_3 的公共点集 P 上，显然 P 中只有两个点.

再根据 A 到卫星 T_4 的距离为 d_4，就可确定 A 的方位了.

由于在地球表面的任何地方任何时刻都可观测到至少 4 颗卫星，因此我们只要有了信号接收器，就可随时随地确定自己的方位了.

以上就是全球定位系统的简单介绍，有兴趣的同学可参考有关书籍.

习题 3

1. 在单位球面中，设 D 为球面三角形 ABC 的边 AB 上的中点，求证：

$$\cos b+\cos a=2\cos\frac{c}{2}\cos\overset{\frown}{CD}.$$

2. 在两个球面$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$，$\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{A'C'}$，并且$A>A'$. 求证：

$$a>a'.$$

3. 已知单位球面上球面$\triangle ABC$，求证：

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin b\sin c}}.$$

4. 已知单位球面上球面$\triangle ABC$，设$P=\frac{1}{2}(A+B+C)$，求证：

(1) $\cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cos(P-C)}{\sin B\sin C}}$；

(2) $\sin\frac{a}{2}=\sqrt{-\frac{\cos P\cos(P-A)}{\sin B\sin C}}$.

5. 证明在单位球面上的等边球面三角形（即三条边相等）内：

(1) $2\cos\frac{a}{2}\sin\frac{A}{2}=1$；

(2) $\cos a=\frac{\cos A}{\cos A-1}$.

6. 北京的地理位置是东经116°，北纬40°，纽约的地理位置为西经74°，北纬40°. 那么，从北京飞往纽约的飞机，飞行的最短路程约为多少？（飞行高度忽略不计）

数学文化

阅读与欣赏

距离差作图法确定舰船位置

在本章的3.5节中我们已经看到，虽然通过球面几何的知识能够列出有关舰船地理方位的方程组，在当时，由于计算工具不够先进，很难及时把方程组解出，因此实际上人们并不是通过解方程组来确定舰船方位的．

下面我们简单介绍一下人们利用球面几何知识确定舰船方位的方法．

用本章3.5节中使用的方法，我们可以知道舰船与恒星T的星下点D的球面距离d_1，和它与另外一颗恒星T'的星下点D'的球面距离d_2．由于星下点D和D'的位置是已知的，因此，理论上来讲，我们可以分别以D，D'为圆心，以d_1，d_2为半径（这里指球面距离）在地球表面作圆（这样的圆称为船位线）．则舰船处于这两个圆的一个交点处（如图1所示）．虽然此时有两个交点，但舰船可以利用自己位于星下点的方向来判断出自己所在的位置．

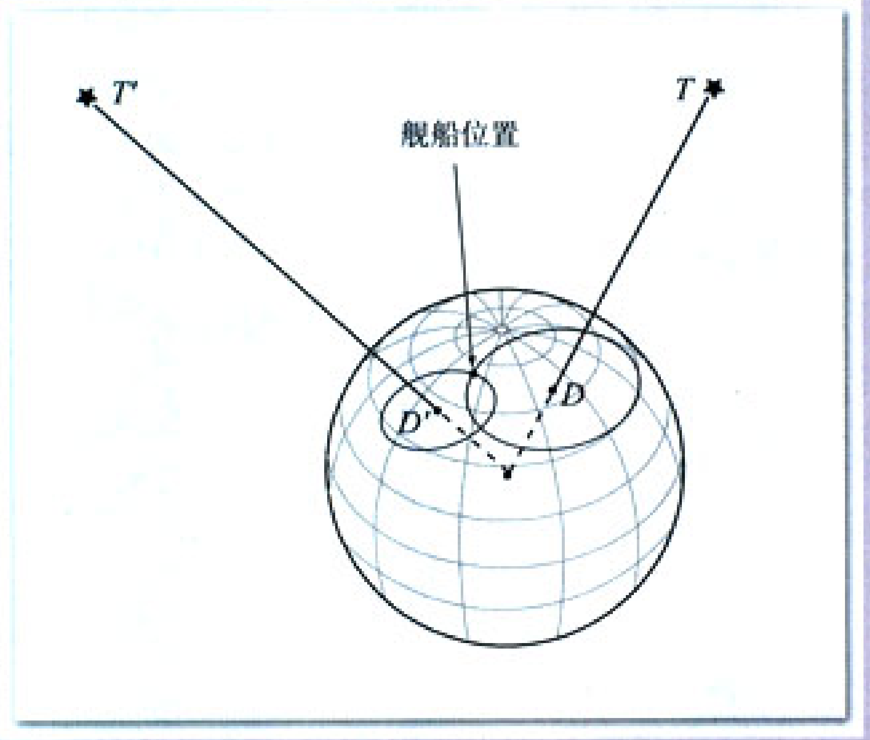


图1

当然，实际上人们是不可能在地球表面上作圆的．于是，人们想出了以下办法．

首先，人们把地球表面按照某种给定的方式展开成平面图形，然后依照一定的比例将展开图画出来（我们现在的世界地图也是这样画出来的），这种图称为海图．而且，所有的球面上两点之间的球面距离，都可以按照某种已知的方式转化为海图上的直线距离．由于在平面上作圆是非常简单的，因此，用上面的方法我们就可以在海图上画出舰船的位置，从而读出它的方位．

然而，这种作船位线的方法也是不实用

的．这是因为我们测量出来的 d_1，d_2 往往会很大，因此，为了较精确地画出舰船的位置，就不得不需要很大的海图．例如，在海图上如果以 1 厘米的长度来表示球面距离 1 海里，而且 $d_1=2\ 400$ 海里的话，在海图上就要作以 24 米为半径的圆，这当然是不切实际的．

因此，人们实际上是在海图上用以下的“距离差作图法”来确定舰船位置的．

如图 2 所示，人们首先根据航向和船速估计一个舰船的大致位置 P．由于星下点 D 的地理位置已知，因此可以算出 P 与 D 的球面距离 l_1．

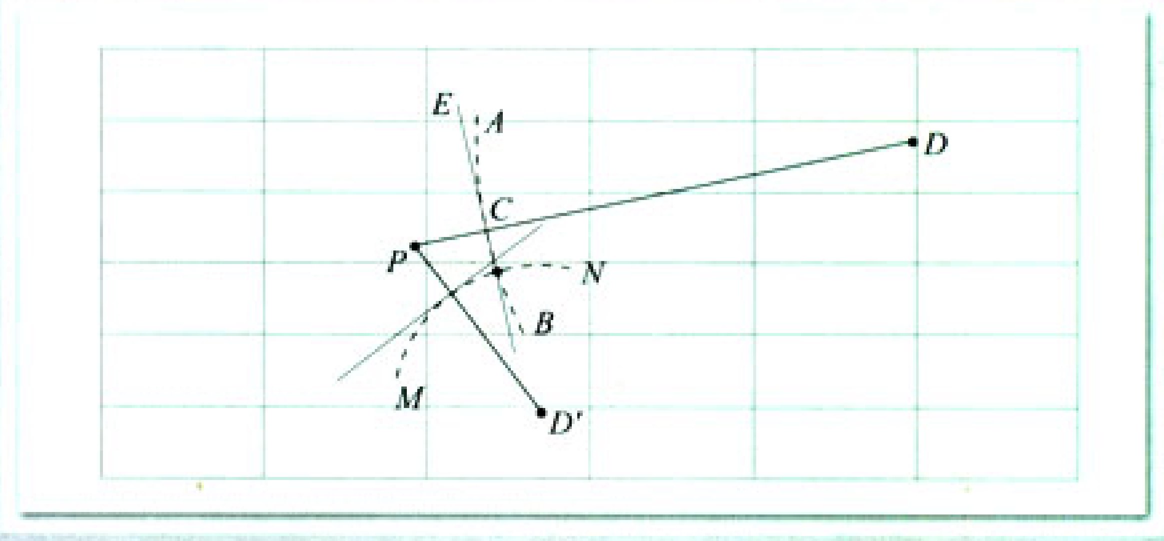


图 2

假设$\overset{\frown}{AB}$是想要作出来的船位线，它上面每一点到星下点 D 的球面距离都是 d_1．因此，P 到$\overset{\frown}{AB}$的球面距离是 l_1-d_1．

于是，我们只要在 PD 找一点 C，使得 $PC=l_1-d_1$．然后过 C 作 PC 的垂线 CE，从而可知 CE 必为$\overset{\frown}{AB}$的切线，由此我们就可以画出$\overset{\frown}{AB}$．

然后用同样的方法，根据星下点 D' 的有关数据，画出$\overset{\frown}{MN}$．

由于估计位置往往离实际的位置不远，因此我们所要作的线段都不会很长，而且船舰位置就在$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{MN}$的交点处．

这就是“距离差作图法”，感兴趣的同学可参考有关书籍作进一步的了解．

双曲几何的庞加莱模型

像在平面几何中一样，球面几何中也有三角形、正弦定理和余弦定理等几何对象和结论．但是，在平面几何中，我们有

“过已知直线外一点能且只能作一条直线与已知直线平行．”

“三角形的内角和等于 π．”

而在球面几何中，我们却有

“任意两条球面直线都相交（即不平行）．”

“三角形的内角和大于 π．”

本章我们将要介绍另外一种几何（称为双曲几何）的模型，其中的“直线”称为双曲直线．而且，其中也有三角形、正弦定理和余弦定理等几何对象和结论．但与平面几何和球面几何都不同的是，我们将得到

“过已知双曲直线外一点有无数条双曲直线与已知双曲直线平行．”

“三角形的内角和小于 π．”

事实上，双曲几何是爱因斯坦等物理学家研究相对论的主要工具之一．

4.1　基础知识

如图 4-1(1)所示，假设 A 是平面上圆 O_1 与圆 O_2 的一个交点，如果 $AO_1 \perp AO_2$，我们就称这两个圆正交．显然，由定义可知，圆 O_1 与圆 O_2 正交的充要条件是

$$|AO_1|^2+|AO_2|^2=|O_1O_2|^2.$$

即两圆正交的充分必要条件是两圆半径的平方和等于圆心距的平方．

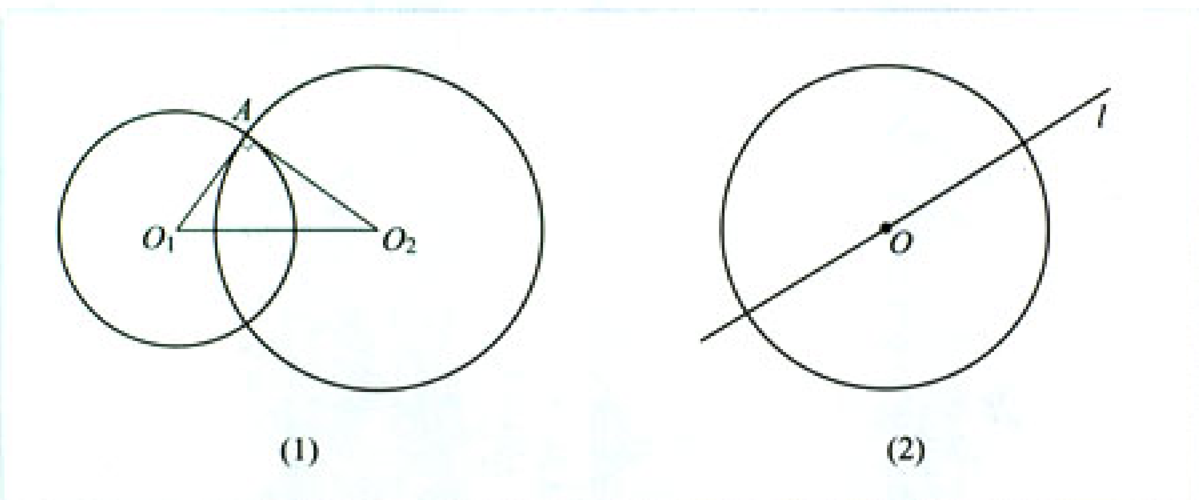


图 4-1

另外，平面内如果一条直线通过一个圆的圆心，我们也称这条直线与圆正交．例如，

图 4-1(2)中的直线 l 和圆 O 是正交的.

以下是我们将要用到的欧氏平面上的一些结论.

命题 1 给定圆内任意一点和圆周上任意一点，通过这两个点可作一个圆（或一条直线）与原来的圆正交.

事实上，设圆的圆心为 O，点 P 在圆内，点 Q 在圆周上.

连接 OQ. 如果 P 点在直线 OQ 上，则显然直线 OQ 过了 P 点和 Q 点，而且它与圆 O 正交.

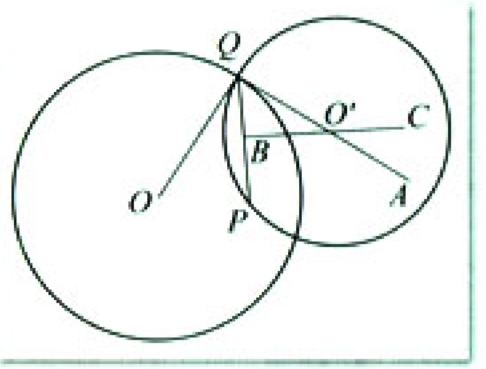


图 4-2

如果 P 点不在直线 OQ 上，如图 4-2 所示，过 Q 点作半径 OQ 的垂线 QA；连接 QP，作 QP 的中垂线 BC. 设 QA 与 BC 交于 O'. 以 O' 为圆心，$O'Q$ 为半径作圆 O'. 则不难看出，圆 O' 与圆 O 正交，并且圆 O' 过 P，Q 两点.

命题 2 过圆内任意两点，可作一个圆（或一条直线）与原来的圆正交.

事实上，设原来的圆的半径为 r，给定的任意两点为 A，B.

连接 AB，如果直线 AB 通过给定圆的圆心，则显然直线 AB 与原来的圆正交.

如果直线 AB 不通过给定圆的圆心，如图 4-3 所示，以给定圆的圆心 O 为坐标原点，线段 AB 的垂直平分线为 x 轴，建立直角坐标系. 设 A 的坐标为 (a, b)，则 B 的坐标为 $(a, -b)$. 显然 $a\neq0$，$b\neq0$.

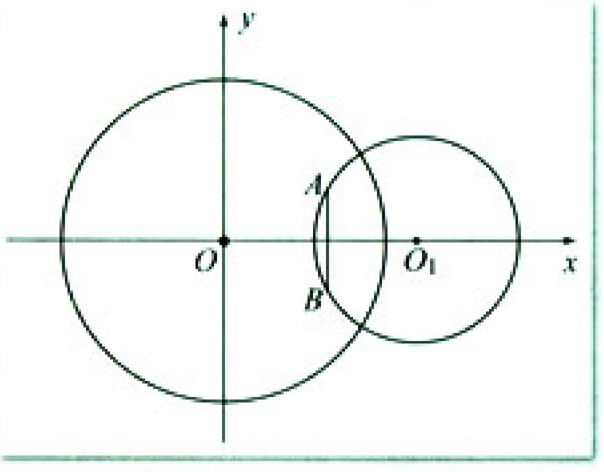


图 4-3

假设圆心在 $O_1(x_1, y_1)$，半径为 R 的圆过 A，B 两点，且与圆 O 正交，其中 x_1，y_1，R 为待定系数. 此时必有

$$\begin{cases}(x_1-a)^2+(y_1-b)^2=R^2\\(x_1-a)^2+(y_1+b)^2=R^2\\r^2+R^2=x_1{}^2+y_1{}^2\end{cases}$$

由 $a\neq0$ 易知这个方程组有唯一的一组解

$$\begin{cases}x_1=\dfrac{a^2+b^2+r^2}{2a}\\y_1=0\\R=\sqrt{x_1{}^2+y_1{}^2-r^2}\end{cases}$$

由此可知，此时有且只有一个圆与原来的圆正交.

练习

建立适当的平面直角坐标系，用解析几何的方法证明命题 1，并说明满足条件的圆（或直线）是唯一的.

4.2 双曲几何的庞加莱单位圆盘模型

记 S 是平面上半径为 1 的圆，S 所包围的平面区域记为 D（不包括 S，称为单位圆盘）.

就像在球面几何中我们只考虑球面上的点一样，以下我们所讨论的对象只是单位圆盘 D 中的点，为此，我们称 D 为**双曲平面**.

进一步的，我们规定双曲平面 D 中的“直线”是与圆 S 正交的圆或直线在双曲平面 D 中的部分. 为了区别起见，我们称这样的“直线”为**双曲直线**. 如图 4-4 所示，弧 ABC、线段 $E'E$ 以及弧FGH都是双曲直线. 值得注意的是，由于只考虑 D 中的点，因此这里的弧和线段都是不包括端点的.

跟平面几何与球面几何相同的是，我们有以下结论.

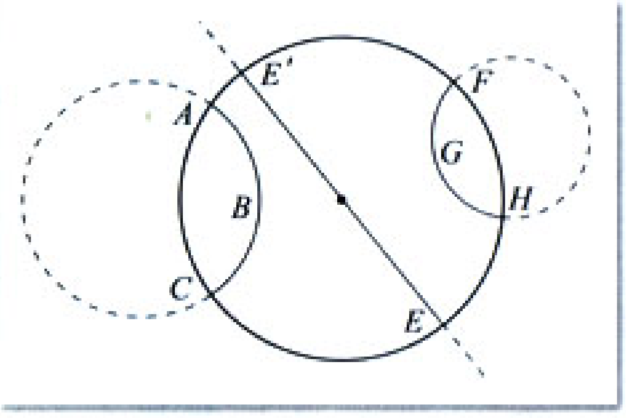


图 4-4

定理 1 给定双曲平面 D 中的任意两点，存在有一条双曲直线通过这两个点.

这可由上一节的命题 2 得到，而且我们还可知，这样的双曲直线只有一条.

此时，双曲直线夹在这两个点中间的那一部分称为一条**双曲线段**.

但以下结论是跟平面几何与球面几何不同的.

定理 2 给定一条双曲直线和双曲直线外一点，有两条双曲直线过给定的点，而且与原来的双曲直线不相交.

下面我们利用上一节的命题 1 来证明这一点.

证明 如图 4-5 所示，假设 P 是双曲直线 l 外一点，而且 l 与 S 相交于 A，B 两点.

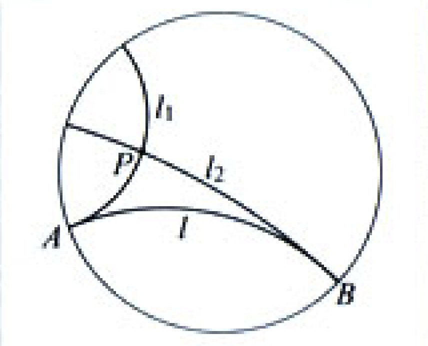


图 4-5

则由上一节的命题 1 可知，存在有唯一的双曲直线 l_1 过 A 和 P，也存在有唯一的双曲直线 l_2 过 B 和 P.

由于 A 点并不是单位圆盘 D 中的点，因此我们不难看出双曲直线 l 和 l_1 是不相交的（证明过程留给同学们作为练习）. 同理可知，双曲直线 l 和 l_2 也是不相交的.

事实上可以证明，过双曲直线外一点，有无数条双曲直线与已知的双曲直线不相交（证明过程留给同学们作为练习）.

另外，用类似于球面几何中的方法，我们还有双曲射线的概念（请同学们自己给出定义）. 而且，当两条双曲射线有公共端点时，我们还可以定义它们之间的夹角.

如图 4-6（1）所示，两条双曲射线的公共端点是 A，过 A 分别作这两条双曲射线的切线 AB，AC（方向一致），则这两条切线所成的角称为这两条双曲射线所成的角.

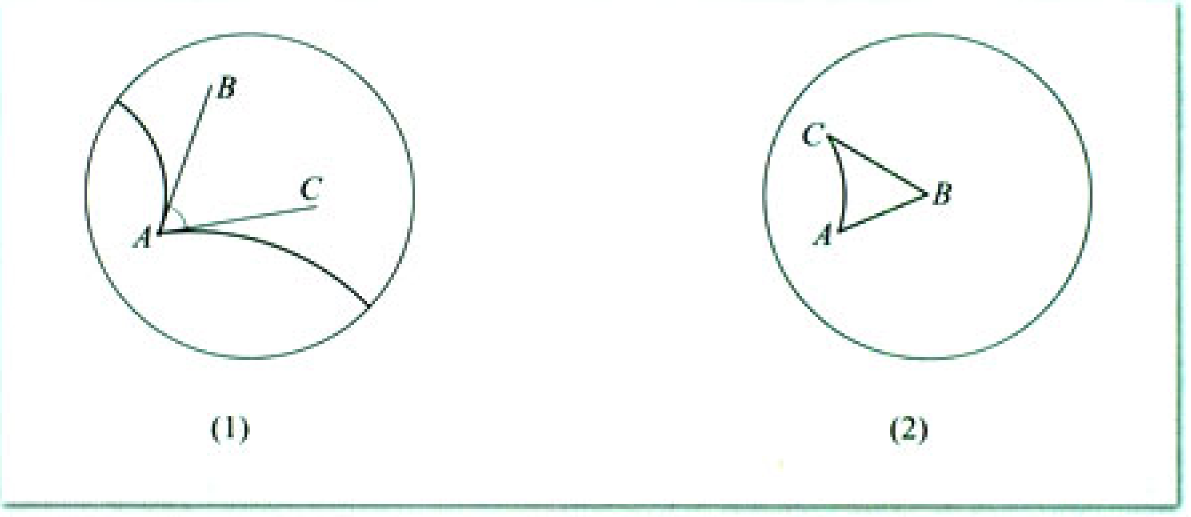


图 4-6

由此，我们不难得到双曲三角形的概念，图 4-6(2)中就是一个双曲三角形 ABC.

上述这个模型是法国数学家庞加莱(Poincaré)提出来的，因此被称为庞加莱单位圆盘模型，这种几何称为双曲几何.

同平面几何与球面几何中一样，双曲几何中的三角形也有正弦定理和余弦定理等几何结论，但在这里我们不再一一介绍.

双曲几何中，成立着许多与平面几何和球面几何不相同的结论，例如：

双曲三角形三内角和小于 π；

双曲平面上不存在矩形；

双曲三角形三条高线不一定相交于一点；

……

但是，有意思的是，双曲几何中有一个定理是与椭圆几何相同的，那就是：

如果两个双曲三角形三个内角分别相等，那么这两个双曲三角形全等.

有关双曲几何的内容就不再多作介绍，有兴趣的同学可参看有关书籍.

练习

1. 证明图 4-5 中的双曲直线 l 与 l_1 在双曲平面 D 上不相交.
2. 证明在双曲平面内，过双曲直线外一点，有无数条双曲直线与已知的双曲直线不相交.

习题 4

利用解析几何的方法证明，双曲平面上不存在矩形.

数学文化　阅读与欣赏

欧氏几何与非欧几何

古代的几何学是人们从生产和生活的实践中总结出来的关于图形的丰富知识，经过历史上的数学家加以概括、抽象，并使零星、片断的知识系统化，从而形成的关于图形的学科．这方面的工作应首推欧几里得的《几何原本》．

事实上，我们已经学过的平面几何和立体几何的大部分内容在《几何原本》中都有记载．

欧几里得是希腊数学家．公元前 300 年左右，他应托勒密一世之邀到亚历山大，成为了亚历山大学派的奠基人．他给学生讲授几何，后来把讲稿整理成一本书，即《几何原本》．该书的出现是数学史上的重大事件之一．

“原本”的希腊文原意是指一个学科中具有广泛应用的最重要的定理．欧几里得在《几何原本》中用公理法对当时的数学知识作了系统化、理论化的总结．全书共 13 卷，包括有 119 个定义、5 条公设、5 条公理和 465 个命题（即定理）．

《几何原本》第一卷中，就给出了 23 个定义．例如：

点是没有部分的；

线只有长度没有宽度；

面只有长度和宽度；

当一条直线和另一条直线相交的邻角彼此相等时，这些角的每一个角都称为是直角，而且称这两条直线垂直；

同一平面内的两条直线，从两个方向无限延伸时，每一个方向都不相交，叫做平行直线；

……

其次给出了 5 条公设：

1. 从任意一点到另外任意一点可以作一条直线；

2. 直线可以无限延伸；

3. 以任意点为圆心、任意长度为半径可以作一个圆；

4. 凡直角都彼此相等；

5. 同一平面内，一条直线与另外两条直线相交，如果这条直线某一侧的同旁内角和小于两直角和，那么这两条直线无限延长时，它们将在这一侧相交．

然后给出了 5 个公理：

1. 两个量与第三个量相等时，这两个量相等；

2. 等量加等量，其和相等；

3. 等量减等量，其差相等；

4. 彼此能重合的物体是全等的；

5. 整体大于部分．

以这些基本定义、公设和公理作为推理的出发点，经过严格的逻辑推理得到所有的定理，就是《几何原本》的全部内容．

由于《几何原本》的内容丰富，并且严密的系统性已达到相当的水平，以至从那时（公元前 300 年）起直到公元 1800 年的两千多年的时间里，甚至现代中学所采用的几何课本，都基本上沿用了《几何原本》的形式．

但是，《几何原本》不是没有缺陷的．例如，其中没有唯一性公理，只讲“任何点

到任何点可以画一直线”，但没有“两点决定一直线”，所以在证第一卷第四个命题时，不得不凭直觉来断定“两条直线不能包围空间”；又如，没有点的“次序”概念，从而“内部”“外部”无法定义等等.

以上缺陷早在古希腊时代就曾被指出，有人作过改善《几何原本》中公设、公理系统的尝试，当时主要课题是如何使欧几里得公设、公理系统达到极小.

对欧几里得公理系统的研究是由希尔伯特完成的. 希尔伯特给出的公理系统分成以下5组：

第Ⅰ组关联公理（也称接合公理），共有9条，给出了该系统中的点、直线、平面之间的接合关系；

第Ⅱ组次序公理，共有5条，给出了与同一直线接合的三点之间的顺序关系；

第Ⅲ组合同公理，共有5条，给出了线段与线段以及角与角之间的合同关系；

第Ⅳ组连续公理，共有2条，给出了直线上的点是连续排列的，取定一个原点后，直线上的点可与全体实数成一一对应；

第Ⅴ组平行公理，共有1条，即给定直线 a 及一个与 a 不接合的点 A（与 a 和 A 都接合的平面记为 π），至多只有一条直线与 A，π 接合且不与 a 接合.

满足前四组公理的几何称为绝对几何，再满足平行公理时，称为欧氏几何.

对于平行公理，欧几里得的叙述与其他公理的叙述不同，像是一条命题. 因此，很早以前就有人怀疑它应该是一个定理，并企图用其他公设和定理来证明平行公设. 很多人对此都做出了努力，但是都失败了. 于是，人们开始渐渐地有了“否定平行公设，但不导致矛盾”的想法，结果发现了非欧几何.

平行公理等价于

“过已知直线外一点能且只能
作一条直线与已知直线平行.”

对平行公理的否定有两种，一种是

“过已知直线外一点没有
直线与已知直线不相交，”

即任意两条不同的直线都相交. 这条公理也称为椭圆公理，满足前四组公理并满足椭圆公理的几何称为椭圆几何.

另一种是

“过已知直线外一点有两条
直线与已知直线不相交.”

这条公理也称为双曲公理，满足前四组公理并满足双曲公理的几何称为双曲几何.

椭圆几何和双曲几何统称为非欧几何.

值得注意的是，在公理化的系统中，“直线”是一个抽象的概念. 因此，非欧几何中的“直线”与通常我们所说的“直线”是不一样的.

如果从“否定平行公设不会导致矛盾”这一点来讲，历史上有不少人，如萨开利(G. Saccheri)、兰伯特（J. H. Lamlert)、萨外卡特（Schweikart)、陶里努斯（Taurinus)、开斯特涅（Kastner)、高斯（Gause)等人都已做到了这一点. 但要求严格一点来讲，不但要求肯定而且企图证明“否定平行公理不会导致矛盾”的人，只有俄国的罗巴切夫斯基（Лобаневский）和匈牙利的波约(Bolyai) 两人，他们不但最早发表了非欧几何的主要定理，而且还在一定程度上证明了他们的几何系统是没有矛盾的. 正因为这一点，现在人们都把罗巴切夫斯基和波约两人作为非欧几何的创始人.

我们前面学习过的球面几何就是椭圆几何的实例，庞加莱模型则是一种双曲几何.

本册小结

I 知识结构

- 球面上的几何
  - 球面的基本性质　对称性
  - 球面上的基本图形及性质
    - 小圆　大圆（赤道）　月形
    - 球面三角形　极三角形
  - 球面三角形全等的条件
  - 球面三角形的不等关系
  - 球面三角形的内角和
  - 球面三角形的余弦定理和正弦定理
- 双曲几何的庞加莱模型
  - 基础知识
  - 双曲几何的庞加莱单位圆盘模型

II 思考与交流

1. 学完球面上的几何，你对距离和直线段有哪些新认识？
2. 球面三角形的边和角如何度量．你对球面三角形中的边用角来度量怎样理解？
3. 用球面的对称性，说明球面三角形与它的极三角形之间的关系？
4. 你如何理解球面三角形的判定条件 AAA．
5. 在球面上存在相似球面三角形吗（不包括全等形）？即，它们的三个内角相等，且三条边成比例？
6. 如何用向量的叉积证明球面三角形的余弦定理和正弦定理？
7. 余弦定理和正弦定理有什么实际用途？
8. 什么是双曲几何庞加莱单位圆盘模型？

III 巩固与提高

请同学依据下列提纲，完成一份学习总结报告．

1. 把这章学过的知识进行总结．

（1）在球面几何中有哪些基本概念和基本图形，它们分别具有哪些性质？

（2）圆与球面，有哪些基本性质是相同的，又有哪些差异？

（3）平面三角形和球面三角形的正弦定理和余弦定理之间，有哪些共同之处和差异？它们之间又有何关系？

2. 查阅资料，并分析研究，你对几何与现实空间之间的联系，有哪些体会？

3. 学习球面几何的感受与体会.