普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4–2

矩阵与变换

人民教育出版社 课程教材研究所
中学数学教材实验研究组 编著

人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　许玉铭

责任编辑　　龙正武

美术编辑　　李宏庆　王　喆

封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-2

矩阵与变换（B版）

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

*

人民教育出版社　出版发行

网址：http://www.pep.com.cn

北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销

*

开本：890 毫米×1 240 毫米　1/16　印张：4.25　字数：94 000

2006 年 6 月第 1 版　2010 年 4 月第 6 次印刷

ISBN 978-7-107-19727-7
G・12777（课）　定价：4.45 元

如发现印、装质量问题，影响阅读，请与本社出版科联系调换。

（联系地址：北京市海淀区中关村南大街 17 号院 1 号楼　邮编：100081）

本册导引

矩阵最早来源于几何图形的变换及线性方程组的解等问题的研究．随着数学的不断发展，人们发现，很多其他的问题也都可以借助矩阵的理论来处理．现在，矩阵理论已经成为现代数学的一个非常重要的工具，其应用涉及图论、控制论、密码学、对策论、计算机图形学等很多领域．

第一章，我们从平面图形变换的观点，引入了二阶矩阵、二阶矩阵与平面向量的乘法及二阶矩阵的乘法，讨论了二阶矩阵的运算性质，同时，我们还研究了一些特殊二阶矩阵所表示的变换，如恒等变换、反射变换、伸压变换、旋转变换等．

第二章，我们通过对具体的图形变换的分析，引入了二阶矩阵的逆矩阵的定义．然后合理地定义了二阶矩阵的行列式，并给出了二阶矩阵的逆矩阵的求法．利用二阶矩阵的逆矩阵，我们得到了二元一次线性方程组的一种矩阵解法．

另外，求逆矩阵、解线性方程组等内容都包含着重要的算法思想，我们有意识地在这些问题中渗入了算法和程序框图，以加强学生对算法的理解和应用意识．

第三章，我们从几何变换的角度，引入了二阶矩阵的特征值和特征向量．以数学探究的方式找出了求特征值和特征向量的方法．然后，讨论了特征值的不变性．最后，利用特征值和特征向量给出了矩阵变换的一种简单表示．

附录，我们简要介绍了三阶矩阵的基本知识，以拓广学生对矩阵的认识，为学生将来进一步学习矩阵理论做好铺垫．

目　录

第一章　二阶矩阵与平面图形的变换

矩阵是数学中一个极其重要而又应用广泛的概念，很多实际问题都可以归结成矩阵来解决. 这一章我们主要学习二阶矩阵的定义以及二阶矩阵的简单运算，体会数学知识形成、发展的过程.

1.1　二阶矩阵

在以前的学习中，大家经常遇到一些图表. 比如，历史中的年代表，地理中的矿产分布表，物理和化学中的试验数据表，等等. 那么，同学们有没有想过这些表格的优点呢？仔细想一想，我们会发现这些图表能够既直观又确切地反映出所研究对象的信息！其实，在数学中我们也有很多这样的例子.

例 1　如图 1-1 所示，在平面直角坐标系 xOy 中，把点 $P(x, y)$绕原点沿逆时针方向旋转 30°得到点 $P'(x', y')$. 若设 $\overrightarrow{OP}$与 x 轴的正半轴所成的角为 φ，$|OP|=|OP'|=r$，则有

$$x=r\cos\varphi,$$
$$y=r\sin\varphi;$$
$$x'=r\cos(\varphi+30^\circ)=r\cos\varphi\cos 30^\circ-r\sin\varphi\sin 30^\circ,$$
$$y'=r\sin(\varphi+30^\circ)=r\sin\varphi\cos 30^\circ+r\cos\varphi\sin 30^\circ.$$

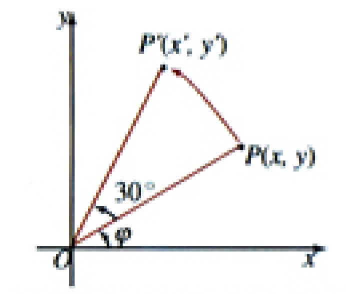


图 1-1

于是，可得两点 P 与 P'的坐标之间的关系：

$$x'=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,$$

$$y'=\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

习惯上，我们称上述关系式为坐标变换公式. 容易看出，上述坐标变换公式完全由式中的系数及其排列顺序所确定. 于是，我们可将上述坐标变换公式中的系数按其顺序简记为数表：

$$\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}. \tag{1}$$

定义 1　形如

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

的数表称为二阶矩阵. 它由二行二列组成，也称之为二阶方阵. 其中 a，b，c，d 称为这个矩阵的元素.

通常，用大写的拉丁字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，…来表示二阶矩阵.

注：除非特别声明，本书中的数都是实数.

思考与讨论

在现实生活中，同学们还能找到哪些问题可以用二阶矩阵来表示？

二阶矩阵的元素是否可以为 0？当例 1 中的旋转角为 90°、180°或 360°时，对应的二阶矩阵分别是什么？

需要明确两个二阶矩阵相等的充要条件是：它们的对应元素都相等.

设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$，则

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\Leftrightarrow a=e,\ b=f,\ c=g,\ d=h.$$

元素全为 0 的二阶矩阵称为零矩阵，记为 $\boldsymbol{0}$.

定义 2　设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix},$$

则矩阵 $\begin{bmatrix} a+e & b+f \\ c+g & d+h \end{bmatrix}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

定义 3　设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\lambda$ 为一常数，则 $\begin{bmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{bmatrix}$ 称为数 λ 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积，记为 $\lambda\boldsymbol{A}$.

练习

1. 在平面直角坐标系中，把点 $A(x, y)$ 沿逆时针方针旋转45°得到点 $A'(x', y')$. 求两点 A 与 A' 的坐标之间的关系式，并用二阶矩阵表示.
2. 写出下列二阶矩阵所表示的坐标变换公式：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$；　　(4) $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

1.2 二阶矩阵与平面向量的乘法

在现代数学中，矩阵已经成为很多研究领域的基本工具. 本节我们将通过对具体实例的分析，引入二阶矩阵与平面向量乘法的定义，学习二阶矩阵表示的平面变换（称为矩阵变换），并讨论几种基本的矩阵变换.

1.2.1 二阶矩阵与平面向量的乘法

1. 平面向量的表示

同学们知道，平面向量就是平面中的一条有向线段. 当我们把平面向量的始点都放到坐标原点时，向量就与它们的终点形成了一一对应，从而也和终点的坐标形成了一一对应. 于是，平面向量可以用有序数对来表示（类似于数轴上的点可以用数来表示）.

如图 1-2 所示，给定平面向量$\overrightarrow{OP}$，则有序数对(a_1, a_2)表示终点 P 的坐标. 为便于区别，我们用有序数对$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$表示向量$\overrightarrow{OP}$.

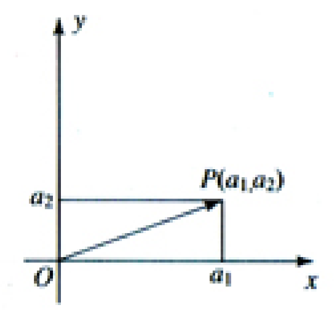


图 1-2

定义 形如$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$的有序数对称为列向量.

回顾数学 4 中关于平面向量加法、减法以及数乘向量运算的定义，我们可以很自然地给出列向量的运算规则. *

定义 设$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$是两个列向量，$\lambda$ 是一个数，则$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{pmatrix}$，$\lambda\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$.

思考与讨论

比较二阶矩阵、列向量以及点的坐标，看看它们有哪些共同点与不同点.

2. 二阶矩阵与平面向量的乘法

在 1.1 的例 1 中，我们看到坐标变换公式

* 事实上，平面向量与列向量可以互相表示，并且平面向量的运算与列向量的运算相互对应.

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases} \tag{1}$$

可以用二阶矩阵$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$来表示．如果我们把点用列向量来表示，则二阶矩阵$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$就把列向量$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$变成了列向量$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$，即

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

类似于函数的记法，我们把上述关系写成

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{2}$$

显然，(2) 式只是利用二阶矩阵表达 (1) 式的另一种形式，由于列向量$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$要依 (1) 式通过计算来确定．因此，我们定义一种新的运算如下：

定义 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} ax_1+bx_2 \\ cx_1+dx_2 \end{bmatrix}$称为二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与平面向量 $\boldsymbol{X}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{Y}$．

这就是说，二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与平面列向量 $\boldsymbol{X}$ 的乘积是一个平面列向量，它的第一个元素就是 $\boldsymbol{A}$ 的第一行与 $\boldsymbol{X}$ 中对应元素乘积的和，第二个元素就是 $\boldsymbol{A}$ 的第二行与 $\boldsymbol{X}$ 中对应元素乘积的和．

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AX}$．

解：
$$\begin{aligned}\boldsymbol{AX}&=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ -6 \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} 3\times2+0\times(-6) \\ -1\times2+4\times(-6) \end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix} 6 \\ -26 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

例 2 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AX}$ 和 $\boldsymbol{AY}$．

解：$AX=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$，

$AY=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$.

思考与讨论

已知二元一次方程组

$$\begin{cases}3x-2y=1\\ x+3y=-6\end{cases}$$

把它表示成由二阶矩阵和列向量组成的等式.

根据二阶矩阵与平面向量乘法的定义，容易证明下面的性质.

性质　设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$，$\lambda$ 是一个常数，则

$$A(X+Y)=AX+AY,$$
$$A(\lambda X)=\lambda(AX).$$

练习

1. 设 $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -4\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}6\\ -3\end{pmatrix}$，求 AX.
2. 已知 $A=\begin{pmatrix}5 & -2\\ 7 & -5\end{pmatrix}$，$X=\begin{pmatrix}2\\ -1\end{pmatrix}$，$Y=\begin{pmatrix}0\\ 3\end{pmatrix}$，求 $A(X+Y)$.

1.2.2　矩阵变换

1. 矩阵变换的定义

从前面的讨论可以看到，一个二阶矩阵完全确定平面内的一个坐标变换. 因此，二阶矩阵可以用来表示平面变换. 然而，就像并不是所有的函数都有解析式一样，很多平面变换不能用二阶矩阵表示. 事实上，二阶矩阵所表示的变换只是所有平面变换中最简单、最基本的一类.

定义　给定一个二阶矩阵 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ 表示平面上的一个变换. 习

惯上，我们把 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 称为一个二阶矩阵变换，简称矩阵变换．把 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ 称为 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 的象，把 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ 称为 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$ 的原象．

为了方便，我们常用 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 等表示矩阵变换，其中 $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$；$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是二阶矩阵．

例 1　已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，求下列各点在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象：

$$(0,\ 0),\ (1,\ 1),\ (-1,\ -1).$$

解：向量 $\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}_3=\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ 在变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象，分别是

$$\boldsymbol{Y}_1=\begin{bmatrix}1 & -1\\\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_2=\begin{bmatrix}1 & -1\\\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Y}_3=\begin{bmatrix}1 & -1\\\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}.$$

于是，所求三点在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象分别为 $(0,\ 0)$，$\left(0,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 和 $\left(0,\ -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，如图 1-3 所示．

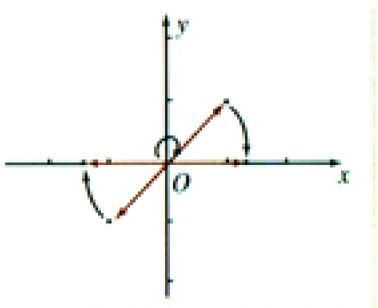


图 1-3

例 2　已知矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，求以下列向量的象：

$$\boldsymbol{X}_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}_2=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}_3=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}.$$

解：$\boldsymbol{Y}_1=\boldsymbol{AX}_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{Y}_2=\boldsymbol{AX}_2=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$，

$\boldsymbol{Y}_3=\boldsymbol{AX}_3=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$．

从例 1、例 2 可以看出，矩阵变换把平面内的向量变成平面内的向量．

思考与讨论

对于一个给定的矩阵变换，是否每一个点都有原象？

2. 矩阵变换的性质

性质 1 矩阵变换把零向量变成零向量.

证明： 设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 是一个矩阵变换，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ \boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{Y}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

性质 2 矩阵变换保持向量的线性运算. 即，若 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 是一个矩阵变换，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是两个列向量，λ 是一个常数，则有

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{A\beta},\ \boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{A\alpha}).$$

证明： 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$，则有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix} s+u \\ t+v \end{bmatrix},\ \lambda\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix} \lambda s \\ \lambda t \end{bmatrix}.$$

直接计算可得

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix} a(s+u)+b(t+v) \\ c(s+u)+d(t+v) \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A\alpha}=\begin{bmatrix} as+bt \\ cs+dt \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A\beta}=\begin{bmatrix} au+bv \\ cu+dv \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\begin{bmatrix} \lambda as+\lambda bt \\ \lambda cs+\lambda dt \end{bmatrix}.$$

于是，可得 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=\boldsymbol{A\alpha}+\boldsymbol{A\beta}$，$\boldsymbol{A}(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(\boldsymbol{A\alpha})$.

推论 设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 是一个矩阵变换，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是两个列向量，λ_1，λ_2 是两个数，则有

$$\boldsymbol{A}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}+\lambda_2\boldsymbol{\beta})=\lambda_1(\boldsymbol{A\alpha})+\lambda_2(\boldsymbol{A\beta}).$$

我们知道，当把平面向量的始点都放在坐标原点时，点与向量之间就形成了一一对应. 如图 1-4 所示，直线 l 由 A，B 两点所确定，$\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 是分别与点 A，B 相对应的列向量. 若设 P 为直线 l 上任意一点，且与其相对应的向量为 $\boldsymbol{\gamma}$，则由于 $\overrightarrow{AP}$ 与 $\overrightarrow{AB}$ 共线，从而

存在数t* 使得$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$，即

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}).$$

于是，　$\boldsymbol{\gamma}-\boldsymbol{\alpha}=t(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha})$，

即　　$\boldsymbol{\gamma}=(1-t)\boldsymbol{\alpha}+t\boldsymbol{\beta}$.

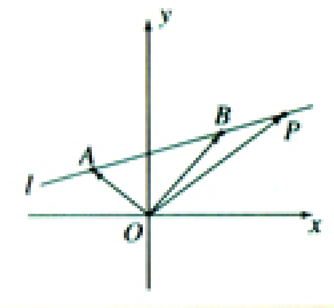


图 1-4

这就是直线 l 的向量参数方程.

设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 是一个矩阵变换，根据上面的推论可知，

$$\boldsymbol{A\gamma}=(1-t)(\boldsymbol{A\alpha})+t(\boldsymbol{A\beta}),$$

即　$\boldsymbol{A\gamma}-\boldsymbol{A\alpha}=t(\boldsymbol{A\beta}-\boldsymbol{A\alpha})$.

于是，当 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\beta}$ 对应的点不相同时，$\boldsymbol{A\gamma}$ 在由 $\boldsymbol{A\alpha}$ 与 $\boldsymbol{A\beta}$ 对应的点所确定的直线上. 因此，我们有下面的结论：

性质 3　矩阵变换把平面内的直线变成直线（或退化为一个点）.

思考与讨论

矩阵变换把平面内的线段变成什么图形？

例 3　已知二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2\\3 & -1\end{bmatrix}$. 如图 1-5，直线 l_1 的向量参数方程为

$$\boldsymbol{\gamma}=(1-t)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}.$$

若矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 把直线 l_1 变成直线 l_2，求直线 l_2 的向量参数方程.

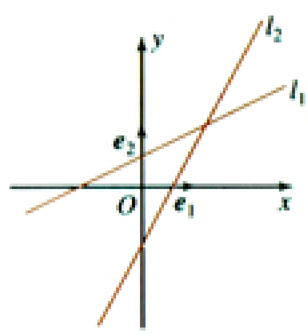


图 1-5

解：因为

$$\boldsymbol{A\gamma}=(1-t)\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+t\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

$$=(1-t)\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix},$$

所以直线 l_2 的向量参数方程为

$$\boldsymbol{\delta}=(1-t)\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}.$$

---

* 容易看出，点 P 在线段 AB 上当且仅当 $0\leqslant t\leqslant 1$.

练习

1. 已知二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{bmatrix}$，求直线 $\gamma=(1-t)\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-2\\-1\end{bmatrix}$ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象.

2. 已知二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，求直线 $\gamma=(1-t)\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+t\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$ 经矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 后所得直线的向量参数方程.

1.2.3 几类特殊的矩阵变换

前面我们通过学习矩阵变换的基本性质，对矩阵变换有了一个初步的认识. 接下来我们将通过具体的平面图形的变换来研究几种特殊的矩阵变换，以进一步加深对矩阵变换的认识.

1. 恒等变换

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$\triangle LMN$ 如图 1-6 所示，求这个三角形在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象.

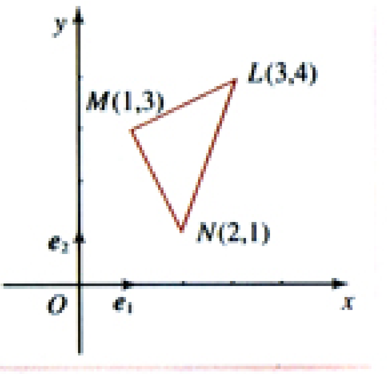


图 1-6

解：首先，考虑$\triangle LMN$ 的三个顶点在矩阵变换下的象.

因为

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix},$$

所以三个顶点 L、M、N 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下保持不变.

其次，考虑$\triangle LMN$ 的三条边在矩阵变换下的象. 受上面计算的启发，对于平面上任意一点(x_0, y_0)，我们有

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix},$$

因此，平面上任意一点在矩阵变换下都保持不变. 从而，三条边 LM、MN、NL 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下不变.

综上所述，$\triangle LMN$ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下保持不变.

事实上，能使平面上任一点都保持不变的矩阵变换，叫做平面上的恒等变换. 例 1 中的矩阵变换就是平面上的恒等变换.

因此，恒等变换可以用矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ 来表示.

2. 反射变换

例 2　设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$，线段 PQ 如图 1-7 所示，求线段 PQ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象.

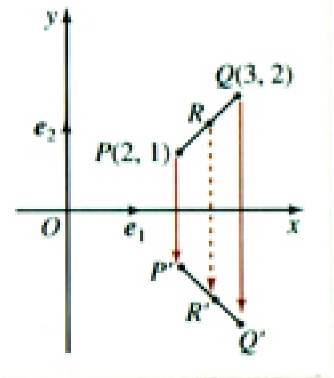


图 1-7

解：首先，可求出 P、Q 两点对应的列向量在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象.

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}.$$

可见，P、Q 两点在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象 P'、Q' 分别与它们关于 x 轴对称，如图 1-7 所示.

其次，设 $R(x_0, y_0)$ 为线段 PQ 上任一点，则它对应的列向量在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象为

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\-y_0\end{pmatrix}.$$

显然点 $R(x_0, y_0)$ 与点 $R'(x_0, -y_0)$ 关于 x 轴对称. 这说明，线段 PQ 与它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象 $P'Q'$ 关于 x 轴对称.

例 3　在例 2 中，把二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 换成 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$，求线段 PQ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象.

解：首先，求出 P、Q 两点对应的列向量在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象.

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}.$$

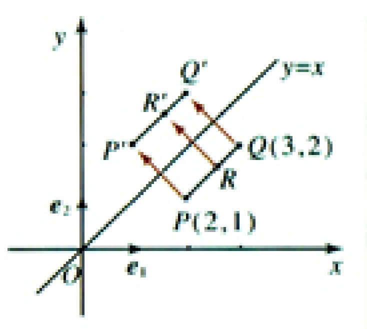


图 1-8

可见，P、Q 两点与它们在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象 $P'Q'$ 分别关于直线 $y=x$ 对称，如图 1-8 所示.

又设 $R(x_0, y_0)$ 为线段 PQ 上任意一点，则有

$$\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_0\\x_0\end{pmatrix}.$$

于是，点 R 与它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象 R' 关于直线 $y=x$ 对称. 因此，线段 PQ 与它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象 $P'Q'$ 关于直线 $y=x$ 对称.

思考与讨论

在例 2、例 3 中，设 $G(x, y)$ 为平面内任意一点，分别求出它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 和 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象.

事实上，能使平面上任一点变成关于直线轴对称的点的矩阵变换，叫做反射变换.

从上面的两个例子可以看出，关于 x 轴的反射变换和关于直线 $y=x$ 的反射变换分别可以用二阶矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 表示.

3. 伸压变换

例 4 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$，$k>0$，$k\neq1$，求$\square EFGH$（如图 1-9（$a$）所示）在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象.

解：设点 $P(x_0, y_0)$ 为$\square EFGH$ 上任意一点，则它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象 P' 所对应的向量为

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}kx_0\\ ky_0\end{bmatrix}.$$

这说明，点 P' 的两个坐标分别是点 P 的两个坐标的 k 倍. 于是，可得$\square EFGH$ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象为$\square E'F'G'H'$（如图 1-9（b）（c）所示）.

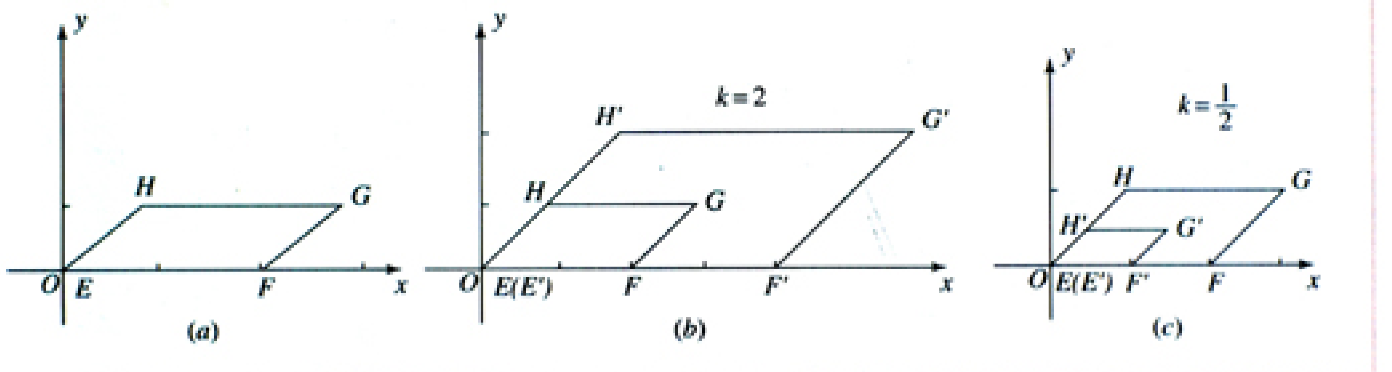


图 1-9

容易看出，$\square EFGH$ 与它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 的象$\square E'F'G'H'$ 相似，并且相似比为 k.

思考与讨论

在例 4 中，与点 P 和 P' 分别相对应的向量之间有什么关系？

事实上，能把平面上的每个向量变成它的 k 倍（其中 $k>0$ 且 $k\neq1$）的矩阵变换称为**伸压变换**.

在例 4 中的伸压变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，就是用二阶矩阵 $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$（$k>0$，且 $k\neq1$）表示的.

4. 旋转变换

在 1.1 的例 3 中，我们看到把一个点 $P(x, y)$ 绕原点沿逆时针方向旋转 30°得到点 $P'(x', y')$，其坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-\dfrac{1}{2}y \\ y'=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y \end{cases}$$

用矩阵表示即为 $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

一般地，设点 $P(x, y)$ 为平面直角坐标系中任一点，把它绕原点沿逆时针方向旋转 θ 角，得到点 $P'(x', y')$，如图 1-10 所示，则其坐标变换公式为

$$\begin{cases} x'=x\cos\theta-y\sin\theta \\ y'=x\sin\theta+y\cos\theta \end{cases}$$

用矩阵表示即为

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

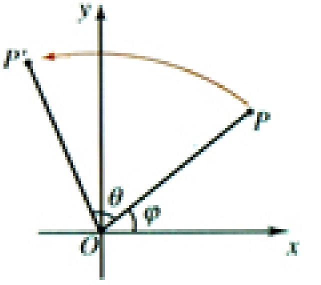


图 1-10

因此，旋转变换可以用二阶矩阵来表示.

例 5 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{bmatrix}$，正方形 $EFGH$ 如图 1-11 所示，求它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象.

解： 首先，分别求出正方形 $EFGH$ 的四个顶点在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象所对应的列向量.

$$A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix},$$

$$A\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sqrt{3}+\frac{1}{2}\end{bmatrix},$$

$$A\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\sqrt{3}\\ 1+\sqrt{3}\end{bmatrix},$$

$$A\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\sqrt{3}\\ \frac{\sqrt{3}}{2}+1\end{bmatrix}.$$

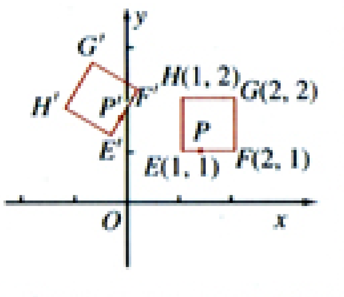


图 1-11

它们所对应的点分别是 E'、F'、G'、H'（如图 1-11 所示）.

容易看出，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 是把点绕原点沿逆时针方向旋转 60°的旋转变换，因此它把正方形 $EFGH$ 绕原点沿逆时针方向旋转了 60°. 我们分别连接 $E'F'$、$F'G'$、$G'H'$ 和 $H'E'$，就得到正方形 $EFGH$ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象 $E'F'G'H'$.

5. 投影变换

例 6 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$，平行四边形 $EFGH$ 如图1-12所示，求它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象.

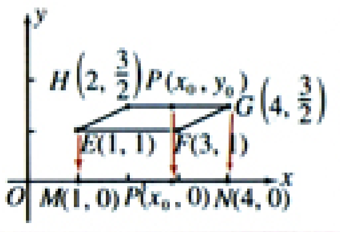


图 1-12

解：设 $P(x_0, y_0)$ 为四边形 $EFGH$ 所在平面上任意一点，则它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象 P' 所对应的列向量为

$$A\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\0\end{bmatrix}.$$

因此，点 P' 恰为点 P 在 x 轴上的投影.

于是，平行四边形 $EFGH$ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象为线段 MN（如图 1-12 所示）.

思考与讨论

在例 6 中，把矩阵 A 换成 $B=\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，求平行四边形 $EFGH$ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象.

事实上，能把平面上任一点变成这点在 x（或 y）轴上的投影的矩阵变换，称为投影变换．在例 6 及其讨论中的投影变换，分别用二阶矩阵 $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 表示．

练习

1*．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}$，$\triangle EFG$ 如图 1-13 所示，求它在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象．

2．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，求 θ 的值，使得旋转变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 为关于 x 轴的反射变换与关于 y 轴的反射变换的复合．

3．求一个伸压变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，把如图 1-14 所示的正方形 $EFGH$ 变成单位正方形．

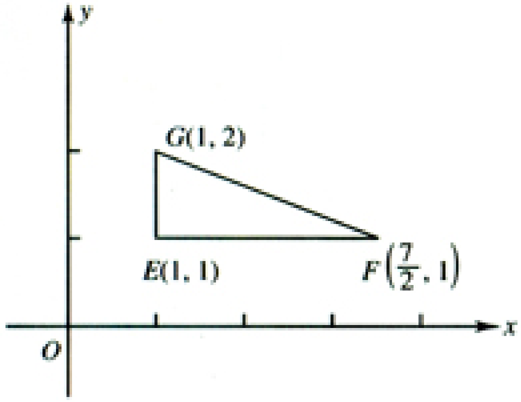


图 1-13

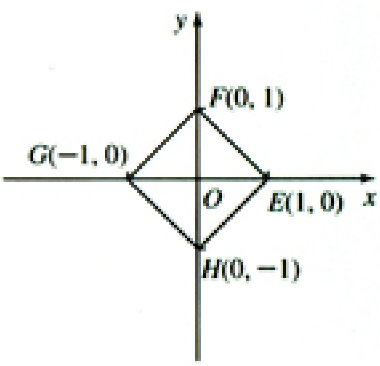


图 1-14

1.3 二阶方阵的乘法

对于平面内的一个点 A，经过某个矩阵变换后，它变为另外一个点 A'．有时为了需要，我们还要对点 A' 再做一次矩阵变换，这就是矩阵变换的复合．相对于两个矩阵变换的复合，两个矩阵之间有一种很自然的运算，即矩阵的乘法．本节主要学习二阶方阵的乘法及其运算规律．

* 这两个矩阵表示的变换也是反射变换．

1.3.1 二阶方阵的乘法

设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，已知正方形 $EFGH$ 如图 1-15 所示．如果正方形上任意一点 $P(x_0, y_0)$ 在矩阵变换 $Y=AX$ 下的象为 $P'(x_0', y_0')$，则有

$$\begin{bmatrix}x_0'\\ y_0'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}x_0'=x_0+2y_0\\ y_0'=-2x_0-y_0\end{cases}$$

于是，可得正方形 $EFGH$ 在矩阵变换 $Y=AX$ 下的象 $E'F'G'H'$，如图 1-15 所示．

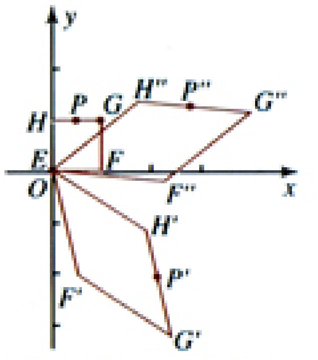


图 1-15

如果再继续实施一次变换，设点 $P'(x_0', y_0')$ 在矩阵变换 $Z=BY$ 下的象为 $P''(x_0'', y_0'')$，则有

$$\begin{bmatrix}x_0''\\ y_0''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0'\\ y_0'\end{bmatrix},$$

即

$$\begin{cases}x_0''=\frac{1}{2}x_0'-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0'\\ y_0''=\frac{\sqrt{3}}{2}x_0'+\frac{1}{2}y_0'\end{cases}$$

于是，又可得四边形 $E'F'G'H'$ 在矩阵变换 $Z=BY$ 下的象 $E''F''G''H''$，如图 1-15 所示．

显然，上述过程实质上是对正方形 $EFGH$ 连续实施了两次矩阵变换．容易看出，连续实施的两次变换作为一个整体仍然是一个变换，我们称为两个变换的复合．下面我们就来研究矩阵变换 $Y=AX$ 与 $Z=BY$ 的复合．

利用两个坐标变换公式，可得

$$\begin{aligned}x_0''&=\frac{1}{2}x_0'-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0'=\frac{1}{2}(x_0+2y_0)-\frac{\sqrt{3}}{2}(-2x_0-y_0)\\ &=\left[\frac{1}{2}\times1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-2)\right]x_0+\left[\frac{1}{2}\times2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-1)\right]y_0,\\ y_0''&=\frac{\sqrt{3}}{2}x_0'+\frac{1}{2}y_0'=\frac{\sqrt{3}}{2}(x_0+2y_0)+\frac{1}{2}(-2x_0-y_0)\\ &=\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\times1+\frac{1}{2}\times(-2)\right]x_0+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\times2+\frac{1}{2}\times(-1)\right]y_0.\end{aligned}$$

用矩阵表示即为

$$\begin{bmatrix} x_0'' \\ y_0'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-2) & \frac{1}{2}\times2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-1) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\times1+\frac{1}{2}\times(-2) & \frac{\sqrt{3}}{2}\times2+\frac{1}{2}\times(-1) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

因此，两个矩阵变换 $Y=AX$ 与 $Z=BY$ 的复合仍然是一个矩阵变换．为了方便，我们记为 $Z=CX$．❶

注

❶ 两变换的复合过程是有序的．如：

$$\begin{tikzcd} Z & Y \arrow[l, "B"'] & X \arrow[l, "A"'] \arrow[ll, bend left, "C=BA"] \end{tikzcd}$$

另一方面，直接从两个矩阵变换出发，可得

$$\begin{bmatrix} x_0'' \\ y_0'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0' \\ y_0' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}\right).$$

类似于复合函数的表示方法，我们让 $C=BA$，即

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}\\ =&\begin{bmatrix} \frac{1}{2}\times1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-2) & \frac{1}{2}\times2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times(-1) \\ \frac{\sqrt{3}}{2}\times1+\frac{1}{2}\times(-2) & \frac{\sqrt{3}}{2}\times2+\frac{1}{2}\times(-1) \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

思考与讨论

分析上式等号右边矩阵中元素的结构，看看它们是由矩阵 A、B 中的元素按怎样的运算规律得到的？

定义 设 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$，矩阵 A 与矩阵 B 的积记作 AB，则

$$AB=\begin{bmatrix} ae+bg & af+bh \\ ce+dg & cf+dh \end{bmatrix}.$$

这就是说，两个矩阵的积仍是一个二阶矩阵：

积矩阵中，位于第一行第一列的元素等于第一个矩阵(A)的第一行的各元素与第二个矩阵的第一列相应元素乘积的和($ae+bg$)；

同样，位于第一行第二列的元素等于第一个矩阵(A)的第一行的各元素与第二个矩阵(B)的第二列相应元素乘积的和($af+bh$)；

位于第二行第一列的元素等于第一个矩阵(A)的第二行的各元素与第二个矩阵(B)的第一列相应元素乘积的和($ce+dg$)；

位于第二行第二列的元素等于第一个矩阵($\boldsymbol{A}$)的第二行的各元素与第二个矩阵($\boldsymbol{B}$)第二列的相应元素乘积的和($cf+dh$).

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 0\\-1 & 4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{BA}$.

解：
$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}3 & 0\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}3\times1+0\times2 & 3\times(-1)+0\times1\\-1\times1+4\times2 & -1\times(-1)+4\times1\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}3 & -3\\7 & 5\end{bmatrix};$$
$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1 & -1\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\-1 & 4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1\times3+(-1)\times(-1) & 1\times0+(-1)\times4\\2\times3+1\times(-1) & 2\times0+1\times4\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}4 & -4\\5 & 4\end{bmatrix}.$$

例 2 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$，求反射变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 与伸压变换 $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{BY}$ 的复合变换.

解：$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{BY}=\boldsymbol{BAX}=\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}0 & 2\\2 & 0\end{bmatrix}\boldsymbol{X}$.

思考与讨论

两个矩阵变换复合时的先后顺序与相应的两个矩阵做乘法时的前后顺序有怎样的关系？

定义 二阶方阵$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$称为**单位矩阵**，通常记为 $\boldsymbol{E}$.

容易验证，对任意的二阶方阵 $\boldsymbol{A}$，都有
$$\boldsymbol{AE}=\boldsymbol{EA}=\boldsymbol{A}.$$
因此，单位矩阵 $\boldsymbol{E}$ 在二阶方阵乘法中的作用，相当于 1 在数的乘法中的作用.

练习

1. 已知 $A=\begin{pmatrix}3 & -5\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，求 AB 和 BA.

2. 求矩阵变换 $Y=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}X$ 与 $Z=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}Y$ 的复合变换.

1.3.2 矩阵乘法的运算律

前面我们学习了二阶矩阵乘法的定义，那么矩阵乘法是否也具有和数的乘法一样的运算律呢？以下举例说明.

1. 结合律

例 1 设 $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$，求 $A(BC)$ 和 $(AB)C$.

解： $BC=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}$，

$AB=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

于是，

$$A(BC)=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -3\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -3\\ -2 & -2\end{pmatrix},$$

$$(AB)C=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7 & -3\\ -2 & -2\end{pmatrix}.$$

显然，有 $A(BC)=(AB)C$.

一般地，二阶矩阵的乘法满足结合律：

设 A，B，C 都是任意的二阶矩阵，则有

$$A(BC)=(AB)C.$$

2. 交换律

例 2 已知矩阵变换 $Y=AX$ 及 $Y=BX$，其中 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，$\triangle EFG$ 如图 1-16 所示，求这个三角形分别按不同顺序经过两个矩阵变换后的象.

解：(1) 由于 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$，容易看出△$EFG$ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象为线段 PQ，如图1-16所示.

又 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\ 2\end{bmatrix}$，所以线段 PQ 在矩阵变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$下的象（也就是△$EFG$ 在矩阵复合变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BAX}$ 下的象）为线段 MN.

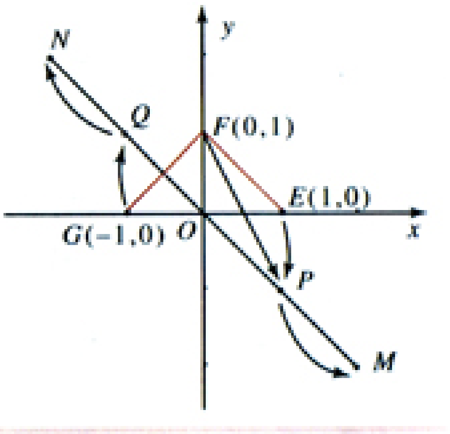


图 1-16

(2) 由 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$，可知△$EFG$ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 下的象为线段 PQ，如图 1-17 所示. 又因为 $\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}$，所以，线段 PQ 在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象（也就是△EFG 在矩阵复合变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{ABX}$ 下的象）为原点 O.

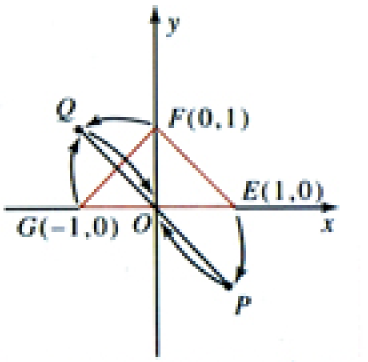


图 1-17

从上例可知，矩阵变换的复合不满足交换律，因此二阶矩阵的乘法不满足交换律. 事实上，对上例中的二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，直接计算可得

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}，\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}2 & 2\\ -2 & -2\end{bmatrix}，$$

即 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$.

3. 消去律

例 3 如图 1-18 所示，设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$P(x_0, y_0)$ 为平面内任意一点，试求点 P 分别在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 和矩阵复合变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BAX}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CAX}$ 下的象.

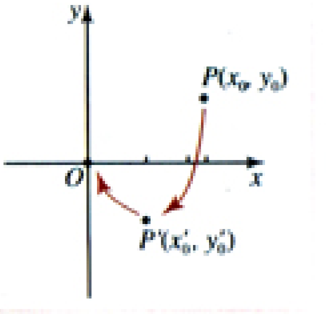


图 1-18

解：设点 $P(x_0, y_0)$在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象为 $P'(x_0', y_0')$，则对应的列向量为 $\begin{bmatrix}x_0'\\ y_0'\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0-y_0\\ -x_0+y_0\end{bmatrix}$.

于是，点 $P(x_0, y_0)$在矩阵复合变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BAX}$ 和 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{ABX}$ 下的象分别是

$$\begin{bmatrix} x''_0 \\ y''_0 \end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x''_1 \\ y''_1 \end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由此可见，矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{BA})\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{CA})\boldsymbol{X}$ 完全相同.

这就是说，在例 3 中 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{CA}$，但是显然 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$.

一般地，矩阵变换的复合不满足消去律，从而二阶矩阵的乘法不满足消去律.

练习

1. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 和 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$.
2. 求与任意二阶矩阵可交换的二阶矩阵.
3. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.
4. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 8 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{AC}$.

本章小结

Ⅰ 知识结构

- 矩阵与变换
  - 二阶矩阵
  - 二阶矩阵与平面向量的乘法
    - 矩阵变换
      - 恒等变换
      - 反射变换
      - 伸压变换
      - 旋转变换
      - 投影变换
  - 二阶矩阵的乘法

Ⅱ 思考与交流

1. 矩阵变换与坐标变换有什么异同?
2. 研究所学矩阵变换的特点，再给出一些特殊的矩阵变换.
3. 想一想，二阶矩阵与列向量的乘法和二阶矩阵的乘法有什么共性?

Ⅲ 巩固与提高

1. 用二阶矩阵表示下列方程组：

(1) $\begin{cases}4x_1+2x_2=-2\\2x_1-3x_2=1\end{cases}$

(2) $\begin{cases}x_1-5x_2=0\\4x_2=6\end{cases}$

2. 写出由下面矩阵所确定的变换：

(1) $\begin{bmatrix}0&2\\-1&0\end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix}\sqrt{2}&3\\-5&1\end{bmatrix}$.

3. 已知

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix},$$

求 $\boldsymbol{BA}$、$\boldsymbol{A}^2$.

4. 求下列两条直线在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象，其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}.$$

(1) $y=x$；(2) $y=2x$.

5. 已知二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{A}^3$.

6. 求证：二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 当且仅当对任意的平面向量 $\boldsymbol{X}$，都有 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{0}$.

Ⅳ 自测与评估

1. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，计算 $\boldsymbol{AB}$、$\boldsymbol{BA}$.

2. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^2$、$\boldsymbol{A}^3$.

3. 求证：二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$ 的充要条件是对任意的平面向量 $\boldsymbol{X}$，都有 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{X}$.

4. 求伸压变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，使得它把平面内的点$(-20,\ 8)$变成点$(-5,\ 2)$.

数　学　文　化

阅读与欣赏

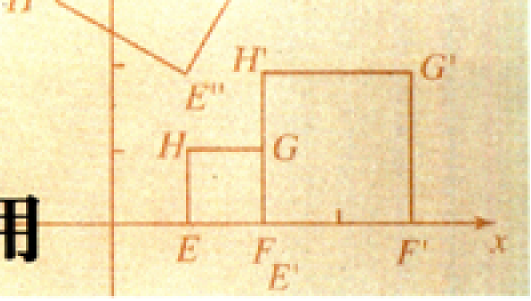
凯莱与矩阵论

凯莱（Arthur Cayley），1821年8月16日生于英国的萨里郡里士满．1839年凯莱进入剑桥大学的三一学院学习，在剑桥他是数学荣誉会考的一等第一名，并获得史密斯(Smith)奖．1842年毕业，曾担任14年的律师，其间他用了可观的时间研究数学，并发表了近200篇文章．1863年，他被任命为剑桥大学设立的第一个萨德勒(Sadler)教授，一直到1895年逝世．

凯莱是个极丰产的数学家．他在n维解析几何、行列式理论、线性变换、斜曲面和矩阵论等方面都作出了重要贡献．

1855年，凯莱提出把矩阵作为一个独立的数学概念，使之成为数学研究的基本对象．1858年，他发表了《矩阵论的研究报告》一文，指出矩阵的乘法是可结合的，但一般不可交换．

由于对矩阵建立了系统的理论，凯莱被公认为矩阵论的创始人．现在，矩阵理论已经发展出很多分支，内容十分丰富，正从矩阵代数走向矩阵分析；同时，矩阵论在很多领域都有着广泛的应用，已经成为物理、化学和管理科学的主要数学工具之一．



第二章　逆矩阵及其应用

2.1　逆矩阵

在上一章中，我们已经学习了二阶矩阵的乘法，并且知道它在某些方面有不同于数的乘法的性质. 很自然地，同学们会想到矩阵乘法是否也有逆运算，本节我们主要学习二阶矩阵的逆矩阵的定义、性质及求法.

2.1.1　逆矩阵的定义

考虑平面上的旋转变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，其中$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，它把平面内的$\square EFGH$绕原点沿逆时针方向旋转 60°，得到$\square E'F'G'H'$，如图 2-1 所示. 当我们再把$\square E'F'G'H'$绕原点沿顺时针方向旋转 60°时，它又变回到$\square EFGH$. 容易看出，此时所做的旋转变换为$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$，其中$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

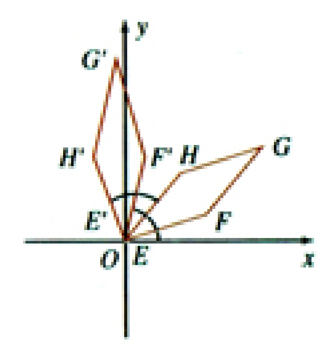


图 2-1

也就是说，如果$P(x_0, y_0)$为平面上任意一点，则它在旋转变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$下的象$P'(x'_0, y'_0)$对应的列向量为

$$\begin{bmatrix}x'_0\\ y'_0\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x_0-\frac{\sqrt{3}}{2}y_0\\ \frac{\sqrt{3}}{2}x_0+\frac{1}{2}y_0\end{bmatrix}.$$

进一步，点$P'(x'_0, y'_0)$在旋转变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}$下的象对应的列向量为$\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}x'_0\\ y'_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x'_0+\frac{\sqrt{3}}{2}y'_0\\ -\frac{\sqrt{3}}{2}x'_0+\frac{1}{2}y'_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$. 因此，复合变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$是恒等变换，其相应的矩阵乘积$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，即

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\boldsymbol{E}.$$

类似地可以验证，复合变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{ABX}$ 也是恒等变换，其相应矩阵的乘积，直接计算可得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$. 此时，我们称 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

定义 设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶矩阵，若存在某个二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，$\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**.

思考与讨论

若已知 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，问是否 $\boldsymbol{A}$ 也是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵？

根据定义容易验证，逆矩阵和逆变换之间有下列关系：

如果 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵，则 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 是 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 的逆变换.

例 1 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$，求证 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

证明：因为

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

所以 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

例 2 已知平面上的投影变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，正方形 $EFGH$ 如图 2-2 所示. 试求：正方形 $EFGH$ 在变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象.

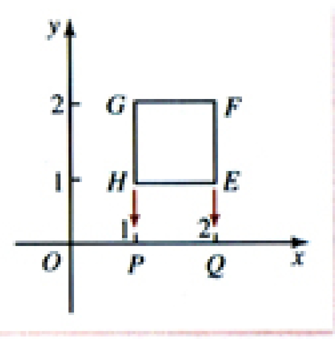


图 2-2

解：由于点 E、F、G、H 的坐标分别为 (2，1)，(2，2)，(1，2)，(1，1)，故

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

所以正方形 $EFGH$ 在投影变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象为线段 PQ，如图 2-2 所示.

应该指出，由于矩阵变换把平面内的线段变成线段或点，因此在例 2 中不存在矩阵变换把线段 PQ 变回到正方形 $EFGH$. 这就是说，不存在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$，使得 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 与它的复合 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BAX}$ 为恒等变换，从而例 2 中的矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 不可逆.

一般地，对于二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，如果不存在二阶矩阵 $\boldsymbol{B}$，使它们的乘积 $\boldsymbol{BA}$ 为单位矩阵，

则 $\boldsymbol{A}$ 不可逆.

注：我们可以直接从逆矩阵的定义出发，证明例 2 中的 $\boldsymbol{A}$ 不可逆. 事实上，假设 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，则存在二阶矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 使得 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$，于是有 $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，这是不可能的.

练习

1. 单位矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是否可逆？若可逆，求它的逆矩阵.

2. 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$，证明 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

3. 根据逆矩阵的定义，证明二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 不可逆. 请你再找出一些不可逆矩阵的例子.

2.1.2　逆矩阵的性质

1. 逆矩阵的唯一性

我们知道，对于任意一个非零实数 a，它的倒数是唯一的. 对于一个函数 $y=f(x)$，如果它有反函数，则其反函数也是唯一的. 那么，对于平面上由二阶矩阵表示的变换，是否也有类似的结果呢？

事实上，对于一个可逆的二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，假若它有两个不同的逆矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$，则矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 就有两个不同的逆变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 和 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}$. 于是，存在点 $P(x_0,y_0)$ 使得 $\boldsymbol{B}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}\neq\boldsymbol{C}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$，如图 2-3 所示. 记点 P 经过变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 后变成点 P_1，点 P 经过变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{CX}$ 后变成点 P_2，则从图 2-3 所示可知，点 P_2 经变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 后变为点 P，点 P 经变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 后变成点 P_1. 于是点 P_2 经变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BAX}$ 后变成点 P_1，这与 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BAX}$ 是恒等变换相矛盾！

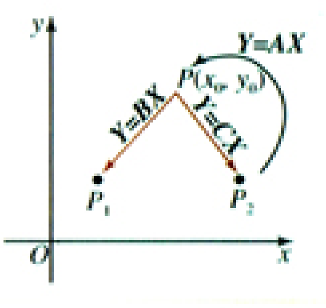


图 2-3

性质 1　设 $\boldsymbol{A}$ 为二阶可逆矩阵，则它的逆矩阵是唯一的.

证明：设 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 是二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不相等的逆矩阵，则有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}，\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}=\boldsymbol{E}.$$

于是，有

$$B=BE=B(AC)=(BA)C=EC=C.$$

这与 $B\neq C$ 是矛盾的，因此，A 的逆矩阵唯一.

注：由于可逆矩阵的逆矩阵是唯一的，今后我们就把一个可逆矩阵 A 的逆矩阵记为A^{-1}.

2. 矩阵乘积的逆

设 A 是一个二阶可逆矩阵，k 是一个非零实数，则容易看出 kA 的逆矩阵为 $k^{-1}A^{-1}$. 然而，对于两个可逆矩阵的乘积，情况就不那么简单了．我们仍然从矩阵变换的角度来考察这一问题，看下面的例子.

已知，$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，正方形 $EFGH$ 如图 2-4 所示，这个正方形在复合变换 $Y=ABX$ 下的象 $E''F''G''H''$ 可以分两步得到：首先对正方形 $EFGH$ 做矩阵变换 $Y=BX$，得到正方形$E'F'G'H'$；再对正方形 $E'F'G'H'$ 做矩阵变换$Y=AX$，即可得到正方形 $E''F''G''H''$.

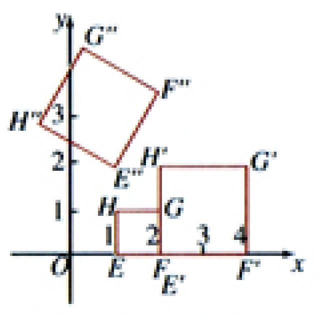


图 2-4

由于矩阵变换 $Y=AX$ 是可逆的，我们可以利用其逆变换$Y=A^{-1}X$把正方形 $E''F''G''H''$变回到正方形 $E'F'G'H'$；又矩阵变换$Y=BX$ 也是可逆的，我们可以利用其逆变换$Y=B^{-1}X$ 把正方形 $E'F'G'H'$变回到正方形 $EFGH$. 因此，复合变换$Y=B^{-1}A^{-1}X$就把正方形 $E''F''G''H''$变回到正方形 $EFGH$. 事实上，容易验证对于平面中的任意一点 P，若$Y=ABX$ 把点 P 变成点 P''，则变换 $Y=B^{-1}A^{-1}X$ 就把点 P''变成点 P. 因此，矩阵变换 $Y=ABX$ 是可逆的，并且其逆变换为 $Y=B^{-1}A^{-1}X$.

相应于上述复合变换的结果，对于两个可逆矩阵 A 和 B，它们的乘积 AB 也是可逆的，并且其逆矩阵为 $B^{-1}A^{-1}$.

性质 2　设二阶矩阵 A 和 B 都是可逆矩阵，则 AB 也是可逆矩阵，并且 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

证明：因为

$$(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB)=B^{-1}(A^{-1}A)B=B^{-1}EB=B^{-1}B=E,$$

所以有　$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

例　已知二阶矩阵 A，B 和 C 都是可逆矩阵，求 $(ABC)^{-1}$.

解：$(ABC)^{-1}=[(AB)C]^{-1}=C^{-1}(AB)^{-1}$

$=C^{-1}(B^{-1}A^{-1})=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

3. 逆矩阵的逆

设 $A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，正方形 $EFGH$ 如图 2-5 所示，它在矩阵变换 $Y=AX$ 下的象为正方形 $E'F'G'H'$.

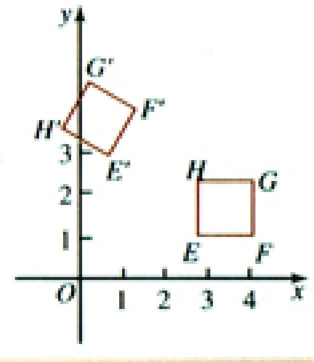


图 2-5

显然，矩阵变换 $Y=AX$ 是可逆的，并且在其逆变换 $Y=A^{-1}X$ 下正方形 $E'F'G'H'$ 变回到正方形 $EFGH$. 现在，我们再对正方形 $EFGH$ 做矩阵变换 $Y=AX$，则它又变为正方形 $E'F'G'H'$. 于是，$Y=AX$ 是矩阵变换 $Y=A^{-1}X$ 的逆变换，即矩阵变换 $Y=AX$ 是它的逆变换 $Y=A^{-1}X$ 的逆变换.

一般地，相应于矩阵变换的结果，对于可逆矩阵 A，我们有：A 是它的逆矩阵 A^{-1} 的逆.

性质 3 设二阶矩阵 A 是可逆的，则有

$$(A^{-1})^{-1}=A.$$

证明：因为 $A^{-1}A=AA^{-1}=E$，所以 $(A^{-1})^{-1}=A$.

练习

1. 已知二阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ 的逆矩阵为 $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵 $B^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，求 $(AB)^{-1}$ 和 $(BA)^{-1}$.

2. 已知 $A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，试借助于相应的矩阵求 A^{-1}，B^{-1}.

3. 在第 2 题中，求矩阵变换 $Y=ABX$ 的逆变换.

2.1.3 用二阶行列式求逆矩阵

前面我们学习了逆矩阵的一般性质，接下来我们主要解决两个问题：一、什么样的二阶矩阵可逆？二、若某个二阶矩阵可逆，怎样求出它的逆矩阵？

1. 二阶矩阵的行列式

对某些特殊的二阶矩阵，我们可以借助于它所表示的变换的特点来求出其逆矩阵.

例 1 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，则它表示平面上的一个伸压变换，把平面上的每个向量长度伸长为原来的 2 倍且方向保持不变. 其逆变换应把平面上的每个向量长度缩短为原来的$\frac{1}{2}$倍且方向保持不变. 容易看出，该逆变换的矩阵为$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，它就是 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

例 2 已知二阶矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，它表示平面上绕原点逆时针旋转 60°的旋转变换，其逆变换是绕原点顺时针旋转 60°的旋转变换，相应的矩阵为$\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$，它就是 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}$.

一般地，求二阶矩阵的逆矩阵，我们只能从定义出发，想办法确定逆矩阵中的各个元素.

设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 可逆，并且 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}$ 是它的逆矩阵，则有 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$. 于是，可得关于 x 和 z 的方程组

$$\begin{cases}ax+bz=1\\ cx+dz=0\end{cases}$$

以及关于 y 和 w 的方程组

$$\begin{cases}ay+bw=0\\ cy+dw=1\end{cases}$$

整理可得

$$\begin{cases}(ad-bc)x=d\\ (ad-bc)z=-c\end{cases}\quad \begin{cases}(ad-bc)y=-b\\ (ad-bc)w=a\end{cases}\qquad (*)$$

根据矩阵可逆的定义，a，b，c，d 不能全为零，且$ad-bc\neq 0$.

反之，若 $ad-bc\neq 0$，我们可以通过上述方程组求出 x，y，z 和 w，从而得到 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{X}$. 因此，$ad-bc\neq 0$ 是二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件，并且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，$ad-bc$ 在求逆矩阵的过程中是一个基本而重要的数据.

定义 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$，则 $ad-bc$ 称为它的行列式，记为 $\det(\boldsymbol{A})$，即

$$\det\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=ad-bc.$$

从上面的讨论可得：

定理 1 二阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充要条件是它的行列式 $\det(\mathbf{A})\neq 0$.

例 3 求下列矩阵的行列式，并指出哪些矩阵是可逆的.

(1) $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$； (2) $\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 5\end{bmatrix}$；

(3) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}$； (4) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$.

解：根据定义可得

$$\det\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=1\times 1-0\times 0=1;$$

$$\det\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 5\end{bmatrix}=3\times 5-(-2)\times 1=17;$$

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}=1\times(-2)-2\times(-1)=0;$$

$$\det\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}=1\times 4-2\times 2=0.$$

因此，第 (1)和第(2)个矩阵是可逆的.

思考与讨论

分析例 3 中各个矩阵中不同行之间的关系与其行列式的值，你会发现怎样的结论?

定理 2 二阶矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的行列式等于0的充要条件是它的一行（列）是另一行（列）的倍数.

证明：若一行是另一行的倍数，根据行列式的定义，知 $ad-bc=0$. 充分条件成立.

若 $\det(\mathbf{A})=0$，即 $ad-bc=0$，则当 $a=b=0$ 时，$\mathbf{A}$ 的第 1 行是第 2 行的 0 倍；当 a 和 b 都不是 0 时，有 $\frac{c}{a}=\frac{d}{b}$，即第 2 行是第 1 行的倍数；当 $a\neq 0$，$b=0$ 时，可推出 $d=0$，于是第二行是第一行的 $\frac{c}{a}$ 倍；当 $a=0$，$b\neq 0$ 时，可推出 $c=0$，于是第二行是第一行的 $\frac{d}{b}$ 倍. 必要条件成立.

对列也可以进行类似的证明.

从定理 2 可以看出，要判断一个二阶矩阵的行列式是否为 0，只要看它的两行（列）

是否成比例就可以了.

例 4 求矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 的逆矩阵.

解：由于 $\det\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}=0\times0-1\times1=-1$，因此 $\boldsymbol{A}$ 可逆.

设 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵为 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}$，则有 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{E}$，即

$$\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}z & w\\ x & y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

因此，有 $z=y=1$，$w=x=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

2. 用二阶行列式求逆矩阵

从上一部分的分析中已经看到，若二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 可逆，可设其行列式 $\det(\boldsymbol{A})=ad-bc$，其逆矩阵为 $\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}$，则有 $x\det(\boldsymbol{A})=d$，$y\det(\boldsymbol{A})=-b$，$z\det(\boldsymbol{A})=-c$，$w\det(\boldsymbol{A})=a$. 从而

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\dfrac{d}{\det(\boldsymbol{A})} & -\dfrac{b}{\det(\boldsymbol{A})}\\ -\dfrac{c}{\det(\boldsymbol{A})} & \dfrac{a}{\det(\boldsymbol{A})}\end{bmatrix},$$

即 $$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{d}{\det(\boldsymbol{A})} & \dfrac{-b}{\det(\boldsymbol{A})}\\ \dfrac{-c}{\det(\boldsymbol{A})} & \dfrac{a}{\det(\boldsymbol{A})}\end{bmatrix}.$$

定理 3 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 可逆，则其逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\dfrac{1}{\det(\boldsymbol{A})}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$.

例 5 已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 2\\ -4 & -2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

解：因为 $\det(\boldsymbol{A})=3\times(-2)-2\times(-4)=2$，所以

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ 2 & \dfrac{3}{2}\end{bmatrix}.$$

容易看出，我们所得到的求逆矩阵的方法可以程序化. 下面给出求逆矩阵这一过程的算法，设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$.

S_1 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det(\boldsymbol{A})=ad-bc$；

S_2 若 $\det(\boldsymbol{A})=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 不可逆；

若 $\det(\boldsymbol{A})\neq0$，则令

$$x=\frac{d}{\det(\boldsymbol{A})},\ y=\frac{-b}{\det(\boldsymbol{A})},$$

$$z=\frac{-c}{\det(\boldsymbol{A})},\ w=\frac{a}{\det(\boldsymbol{A})}.$$

S_3 令 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}x & y\\ z & w\end{bmatrix}$，则求得 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

思考与讨论

写出上述算法的程序框图.

例 6 密码学是关于信息编码和解码的理论，其中经常用到矩阵的知识. 首先，建立如下字母与数字的对应关系

$$\begin{matrix}A & B & C & \cdots & Y & Z\\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow\\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 25 & 26\end{matrix}$$

设要发出的信息为 action，则其编码为 1，3，20，9，15，14.

再取一个可逆矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，把上述编码按顺序分成三组并写成列向量 $\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}20\\ 9\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}15\\ 14\end{bmatrix}$. 计算它们在矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的象，可得 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\ 4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}20\\ 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}38\\ 29\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}15\\ 14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43\\ 29\end{bmatrix}$. 于是，得到所要发送的密码为 7，4，38，29，43，29. 若接收方收到该信息，试问怎样解码才能恢复成原来的信息？

解：因为 $\det(\boldsymbol{A})=1\times1-1\times2=-1$，所以 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$. 把接收到的密码按顺序分成三组并写成列向量，计算它们在变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$ 下的象，可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}7\\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}38\\ 29\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20\\ 9\end{bmatrix},\ \boldsymbol{A}^{-1}\begin{bmatrix}43\\ 29\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15\\ 14\end{bmatrix}.$$

于是，密码恢复成编码 1，3，20，9，15，14. 再根据已知的对应关系，即得到原来的信息 action.

练习

1. 已知 $A=\begin{bmatrix}\cos 25^\circ & -\sin 25^\circ \\ \sin 25^\circ & \cos 25^\circ\end{bmatrix}$，求 A^{-1}.

2. 求 $\begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d & -b \\ -c & a\end{bmatrix}$.

3. 判断下列变换是否有逆变换：

(1) $Y=\begin{bmatrix}1 & -1 \\ -1 & 1\end{bmatrix}X$；　　(2) $Y=\begin{bmatrix}1 & -2 \\ 2 & 1\end{bmatrix}X$.

4. 设例 6 中所取的矩阵为 $A=\begin{bmatrix}5 & 3 \\ 2 & 1\end{bmatrix}$.

(1) 将 Work hard 进行编码.

(2) 将密码 93，36，60，21，159，60，110，43 恢复成原来的信息.

2.2　二元一次方程组的矩阵解法

在 2.1 节中，通过解二元一次方程组，我们找到了一种求逆矩阵的方法．反过来，利用逆矩阵我们可以给出二元一次方程组的一种新的解法．本节我们主要学习二元一次方程组的矩阵解法，并讨论其解的存在性和唯一性.

2.2.1　二元一次方程组解的含义

设二元一次方程组

$$\begin{cases}ax_1+bx_2=e \\ cx_1+dx_2=f\end{cases} \tag{1}$$

其中 x_1，x_2 为未知量，a，b，c，d 称为方程组的系数，e，f 称为常数项．所谓方程组 (1) 的一个解就是指由两个数 k_1，k_2 构成的有序数组 (k_1, k_2)，当 x_1，x_2 分别用 k_1，k_2 代替后，方程组 (1) 中的每个等式都变成恒等式．解方程组 (1) 实际上就是找出它的全部解.

容易看出，利用二阶矩阵与向量的乘法，二元一次方程组 (1) 可以用矩阵表示为

$$\begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e \\ f\end{bmatrix}. \tag{2}$$

如果令 $A=\begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}e \\ f\end{bmatrix}$，则有

$$AX=B. \tag{3}$$

矩阵 A 是由方程组（1）的系数构成的，习惯上称为方程组（1）的系数矩阵．等式（2）和（3）是利用矩阵以整体的方式来表示二元一次方程组（1），我们称之为矩阵方程．

解线性方程组（1）等价于解矩阵方程（2）或（3）．

思考与讨论

比较矩阵方程 $AX=B$ 和矩阵变换 $Y=AX$，看看它们之间有什么联系？

例 1　解下列矩阵方程：

（1）$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$；

（2）$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$．

解：（1）因为矩阵变换 $Y=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}X$ 是到 y 轴上的投影变换，所以向量 $\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$ 的原象为 $\begin{bmatrix}k\\ 2\end{bmatrix}$，如图 2-6 所示．于是，所求矩阵方程的解为 $\begin{bmatrix}k\\ 2\end{bmatrix}$，其中 $k\in\mathbf{R}$．

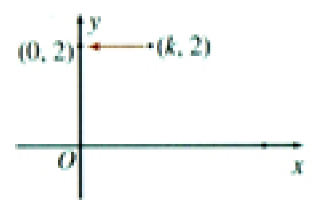


图 2-6

（2）因为矩阵变换 $Y=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}X$ 是关于 y 轴的反射变换，所以向量 $\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$ 的原象为 $\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}$，如图 2-7 所示．于是，所求矩阵方程的解为 $\begin{bmatrix}-2\\ -1\end{bmatrix}$．

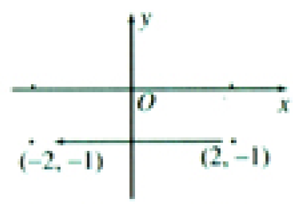


图 2-7

我们可以从矩阵变换的角度，对二元一次方程组（1）的解给出一个解释：所谓方程组（1）的一个解就是指在矩阵变换 $Y=AX$ 下由 e，f 组成的列向量 B 的一个原象，解方程组（1）就是找出在矩阵变换 $Y=AX$ 下 B 的全部原象．

思考与讨论

对于矩阵方程 $AX=B$，当 B 满足什么条件时，方程一定有解？当 A 满足什么条件时，方程一定有解？

2.2.2 二元一次方程组的矩阵解法

由于二元一次方程组

$$\begin{cases} ax_1+bx_2=e, \\ cx_1+dx_2=f \end{cases} \tag{1}$$

等价于矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}, \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$，因此，解方程组（1）也可以通过解矩阵方程（3）来实现.

对于同学们来说，解二元一次方程组当然不成问题！现在的问题是能否找到一个直接解矩阵方程（3）的办法，考虑到矩阵与矩阵变换的关系，我们仍然从矩阵变换的角度来研究这一问题.

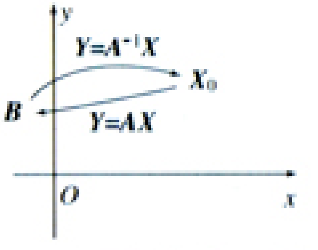


图 2-8

这里我们只考虑 $\boldsymbol{A}$ 可逆的情况. 此时 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 是可逆变换，并且其逆变换为 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$. 若 $\boldsymbol{X}_0$ 是（3）的解，则 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 把 $\boldsymbol{X}_0$ 变为 $\boldsymbol{B}$，即 $\boldsymbol{AX}_0=\boldsymbol{B}$，如图 2-8 所示. 相应地，矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}$ 就把 $\boldsymbol{B}$ 变成 $\boldsymbol{X}_0$，即 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{X}_0$. 至此，我们发现：$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 就是（3）的一个解.

思考与讨论

当 $\boldsymbol{A}$ 不可逆时，方程组（1）有什么特点？如何解方程组（1）？

定理 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 是矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的一个解.

证明： 显然，有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{AA}^{-1})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{EB}=\boldsymbol{B}$.

例 解下列二元一次方程组：

（1）$\begin{cases} x_1-3x_2=1 \\ -2x_1+5x_2=4 \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} 2x_1-x_2=0 \\ x_1-2x_2=0 \end{cases}$

解：（1）首先，把方程组表示成矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

由于 $\det\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}=1\times5-(-3)\times(-2)=-1$，

故有

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

从而可得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5 & -3\\-2 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-17\\-6\end{bmatrix}$.

因此，方程组的解为 $x_1=-17$，$x_2=-6$.

（2）把方程组表示成矩阵方程

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

由于 $\det\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & -2\end{bmatrix}=2\times(-2)-(-1)\times1=-3$，故有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}2 & -1\\1 & -2\end{bmatrix}^{-1}&=-\frac{1}{3}\cdot\begin{bmatrix}-2 & 1\\-1 & 2\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

从而可得 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

因此，方程组的解为 $x_1=0$，$x_2=0$.

容易看出，上述二元一次方程组的矩阵解法可以程序化，其算法如下：

设矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$，则

S_1　计算 $\det(\boldsymbol{A})=ad-bc$.

S_2　若 $\det(\boldsymbol{A})=0$，终止求解；若 $\det(\boldsymbol{A})\neq0$，求出 $\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{d}{\det(\boldsymbol{A})} & \frac{-b}{\det(\boldsymbol{A})}\\\frac{-c}{\det(\boldsymbol{A})} & \frac{a}{\det(\boldsymbol{A})}\end{bmatrix}$.

S_3　令 $\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，则 $x_1=\alpha$，$x_2=\beta$ 即为方程组的解.

练习

1. 解下列二元一次方程组

（1）$\begin{cases}3x_1-2x_2=-1\\x_1+x_2=5\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}x_1-\frac{1}{2}x_2=0\\\frac{1}{2}x_1+\frac{\sqrt{3}}{2}x_2=1\end{cases}$

2. 已知矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 把平面内的点 $P(x_0,\ y_0)$ 变成 $Q(3,\ -1)$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，求点 P 的坐标.

3. 研究下列二元一次方程组解的情况：

(1) $\begin{cases}x+2y=-1\\ -\dfrac{1}{2}x-y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}-x+y=1\\ x-y=-1\end{cases}$

2.2.3 解的存在性与唯一性

上节我们利用矩阵变换找到了二元一次方程组的矩阵解法，并感受到矩阵变换所发挥的重要作用. 接下来，我们继续从矩阵变换的角度讨论二元一次方程组解的存在性和唯一性.

例 1 解二元一次方程组 $\begin{cases}x_1-x_2=1\\ -x_1+x_2=2\end{cases}$

解：原方程组对应的矩阵方程为

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B},$$

其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$.

由于矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，把平面上的任意一个列向量 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ 变成列向量 $\begin{bmatrix}x_1-x_2\\ -x_1+x_2\end{bmatrix}$，如图 2-9 所示. 从矩阵变换的角度来看，解上面的方程组就是求列向量 $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ 在变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下的原象. 但是，矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 的所有象具有这样的特点：两个元素互为相反数. 因此，列向量 $\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$ 在变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 下不存在原象，原方程组无解.

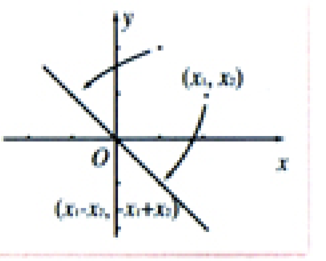


图 2-9

例 2 解二元一次方程组 $\begin{cases}x_1-2x_2=1\\ -x_1+2x_2=-1\end{cases}$

解：原方程组对应的矩阵方程为 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$. 容易算出，矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 把列向量 $\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$ 变成列向量 $\begin{bmatrix}x_1-2x_2\\ -x_1+2x_2\end{bmatrix}$，如图 2-10 所示. 求解方

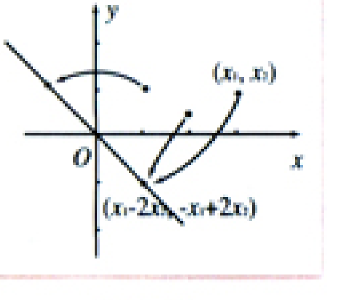


图 2-10

程组就是求列向量 B 在变换 $Y=AX$ 下的原象，而满足 $x_1-2x_2=1$ 的列向量 $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 都是 B 在变换 $Y=AX$ 下的原象，从而都是矩阵方程 $AX=B$ 的解．因此方程组有无数多解．

例 3 解二元一次方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=1\\-x_1+x_2=2\end{cases}$

解： 原方程组对应的矩阵方程为 $AX=B$，其中 $A=\begin{bmatrix}1&1\\-1&1\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，解方程组就是求列向量 B 在矩阵变换 $Y=AX$ 下的原象．

由于变换 $Y=AX$ 可逆，我们考虑其逆变换 $Y=A^{-1}X$．直接计算可得，列向量 B 在变换 $Y=A^{-1}X$ 下的象为 $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$，因此 $\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\end{bmatrix}$ 是 B 在变换 $Y=AX$ 下的原象．所以，$x_1=-\frac{1}{2}$，$x_2=\frac{3}{2}$ 是方程组的解．

另一方面，$x_1=\alpha$，$x_2=\beta$ 是方程组的任意一组解，则 $\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$ 是矩阵方程 $AX=B$ 的解，从而它是列向量 B 在矩阵变换 $Y=AX$ 下的原象．于是，列向量 B 在变换 $Y=A^{-1}X$ 下的象为 $\begin{bmatrix}\alpha\\\beta\end{bmatrix}$，从而有 $\alpha=-\frac{1}{2}$，$\beta=\frac{3}{2}$．这说明，方程组的解是唯一的．

思考与讨论

分别计算例 1、例 2 和例 3 中的 $\det(A)$，想一想它们与方程组的解有怎样的联系？在例 1 和例 2 中，还有什么因素影响方程组的解？

从例 3 可以看出，当二元一次方程组的系数矩阵可逆时，方程组有且只有一个解．

一般地，我们有下面的结论：

定理 设二元一次方程组 $\begin{cases}ax_1+bx_2=e\\cx_1+dx_2=f\end{cases}$ 的系数矩阵 A 可逆，则它有且只有一个解．

证明： 由于方程组与矩阵方程 $AX=B$ 等价，其中 $A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}e\\f\end{bmatrix}$，我们只要证明方程 $AX=B$ 有且只有一个解．

由 $A(A^{-1}B)=(AA^{-1})B=EB=B$ 可知，$X=A^{-1}B$ 是方程 $AX=B$ 的一个解．

又设 C 为方程 $AX=B$ 的任意一个解，则有 $AC=B$，于是可得 $A^{-1}(AC)=A^{-1}B$，即 $C=A^{-1}B$．所以，方程 $AX=B$ 只有一个解．

例 4 解二元一次方程组$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1-x_2=5 \end{cases}$

解：原方程组与矩阵方程$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$等价.

由于 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$，

故有 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{11}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{bmatrix}$.

于是，原方程组的解为$x_1=\frac{11}{5}$，$x_2=-\frac{3}{5}$.

练习

1. 比较例 1 和例 2，想一想二元一次方程组无解或有无数多解的条件各为什么？

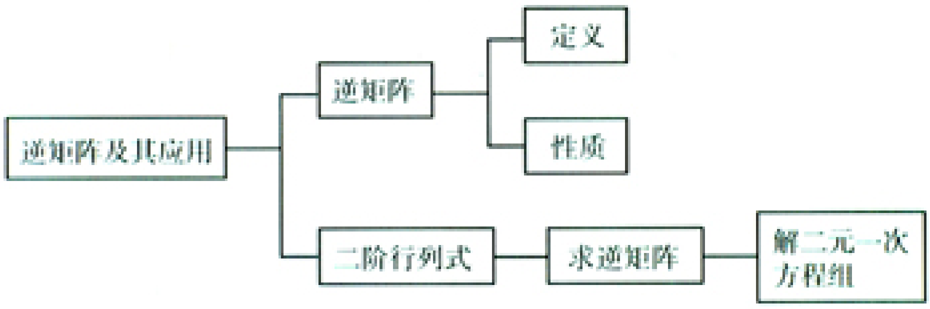
2. 解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 3x_1-2x_2=1 \\ \sqrt{2}x_1+2x_2=0 \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x_1-x_2=1 \\ -x_1+x_2=-1 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1-x_2=2 \\ 8x_1-4x_2=-8 \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 7x_1+4x_2=0 \\ x_1-3x_2=0 \end{cases}$

本章小结

Ⅰ 知识结构



Ⅱ 思考与交流

1. 若二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，求 $\boldsymbol{A}^n$ 的逆矩阵.
2. 说出求逆矩阵的两种方法，并比较它们的区别.
3. 若 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是两个二阶矩阵，并且 $\boldsymbol{A}$ 可逆，$\boldsymbol{B}$ 不可逆，问 $\boldsymbol{AB}$ 是否可逆？

Ⅲ 巩固与提高

1. 已知 $\boldsymbol{A}$ 为可逆的二阶矩阵，求证：

$$(\boldsymbol{A}^2)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^2.$$

2. 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 都可逆，并且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，求证：

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

3. 计算下列二阶矩阵的行列式：

(1) $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

4. 求下列矩阵的逆矩阵：

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$；　　(2) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

5. 设矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}$，求平面内下列各点的原象：

(1) (0，0)；　(2) (0，1)；　(3) (1，0)；　(4) (2，−1).

6. 已知二阶矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足下面的等式：

$$\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}4 & -6\\ 1 & 2\end{bmatrix},$$

求矩阵 $\boldsymbol{X}$.

Ⅳ 自测与评估

1. 计算下列矩阵的行列式：

(1) $\begin{bmatrix}x & 1\\ 0 & x\end{bmatrix}$；　(2) $\begin{bmatrix}1+a_1 & 1\\ 1 & 1+a_2\end{bmatrix}$.

2. 已知从变量 x_1，x_2 到变量 y_1，y_2 的变换为

$$\begin{cases}y_1=x_1+2x_2\\ y_2=3x_1-x_2\end{cases}$$

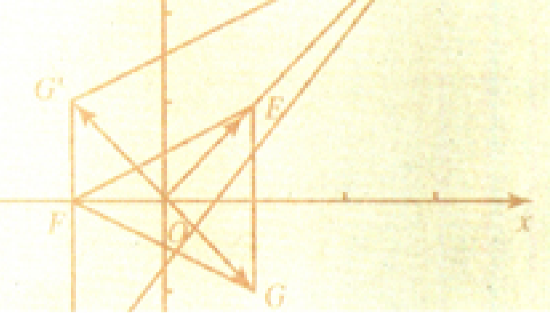
求从变量 y_1，y_2 到变量 x_1，x_2 的变换.

3. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & -1\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{A}^2$.

4. 利用逆矩阵解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x_1-2x_2=1\\ 2x_1+12x_2=5\end{cases}$　(2) $\begin{cases}2x_1-x_2=1\\ x_1+7x_2=0\end{cases}$

第三章　变换的不变量



3.1　平面变换的不变量

设 A 是一个二阶矩阵，则矩阵变换 $Y=AX$ 建立了平面内向量与向量之间的一个对应．在第一章中，我们学习了几类具体的矩阵变换，比如恒等变换、反射变换等；在第二章中，我们又重点讨论了可逆的矩阵变换，这些内容从不同的角度反映了矩阵变换的外部特征．本节我们将主要研究矩阵变换的内部特征，即所谓变换的不变量．

3.1.1　特征值与特征向量

在研究平面变换的问题时，我们常常会遇到一些有意思的现象．比如，已知△EFG 如图 3-1 所示，则在由 $A=\begin{bmatrix}1&2\\2&1\end{bmatrix}$ 确定的平面变换 $Y=AX$ 的作用下，有 $A\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\-2\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，所以三点 E、F、G 在矩阵变换 $Y=AX$ 下的象为 $E'(3,\ 3)$，$F'(-1,\ -2)$，$G'(-1,\ 1)$，从而△EFG 的象为△$E'F'G'$．

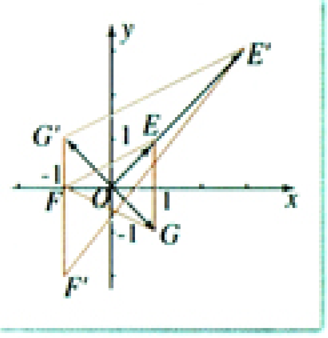


图 3-1

容易看出，向量 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ 经过变换 $Y=AX$ 后只改变了大小，没有改变方向；而向量 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 经过变换 $Y=AX$ 后虽然改变了方向，但仍与向量 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 在同一直线上．事实上，这一现象不是偶然的，我们可以作进一步的观察：

$$A\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\-3\end{bmatrix}，A\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\6\end{bmatrix}\cdots\cdots$$

$$A\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}，A\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}，A\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}\cdots\cdots$$

对于向量 $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\2\end{bmatrix}$，…，它们满足等式 $A\alpha=3\alpha$，即这些向量的象方向不变，大小都变成原来的 3 倍；对于向量 $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}2\\-2\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}-2\\2\end{bmatrix}$，…，它们满足等式 $A\alpha=-1\cdot\alpha$，即这些向量的象方向相反，大小都是原来的 1 倍．因此，对于矩阵变换 $Y=AX$ 来说，3 和 -1 是两个很特别的数．在后面的讨论中我们将会看到，这两个数是由变换 $Y=AX$ 所唯一确定的，它们反映了矩阵变换 $Y=AX$ 的内在本质．

定义 设 $Y=AX$ 是一个矩阵变换，λ_0 是一个数，ξ 是一个非零列向量．若 $A\xi=\lambda_0\xi$，则称 λ_0 是变换 $Y=AX$ 的一个**特征值**，ξ 为变换 $Y=AX$ 的属于特征值 λ_0 的一个**特征向量**．

从前面的讨论可以看出，特征向量有以下两个特点：

1. 特征向量的方向经过变换后，保持与原方向在同一直线上．并且当 $\lambda_0>0$ 时方向不变，当 $\lambda_0<0$ 时方向相反．

2. 若 ξ 是变换 $Y=AX$ 的属于特征值 λ_0 的一个特征向量，则 ξ 的任一非零常数倍 $k\xi$ 也是该变换的属于特征值 λ_0 的特征向量．

思考与讨论

对于平面内的一个矩阵变换，是否存在某个特征向量，它属于两个不同的特征值？

例 1 求恒等变换 $Y=EX$ 的特征值和特征向量．

解：设 α 为平面内的任意一个列向量，则有 $E\alpha=\alpha$，从而 1 是变换 $Y=EX$ 的一个特征值，并且所有非零的列向量都是属于特征值 1 的特征向量．容易看出，变换 $Y=EX$ 没有其他的特征值．

例 2 求旋转变换 $Y=AX$ 的特征值和特征向量，其中

$$A=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

解：因为变换 $Y=AX$ 把平面内的每个非零向量都旋转 60°，所以它没有特征值和特征向量．

由于平面内的矩阵变换与二阶矩阵相互唯一确定，我们也把矩阵变换 $Y=AX$ 的特征值 λ_0 称为矩阵 A 的特征值，而把变换 $Y=AX$ 的属于特征值 λ_0 的特征向量 ξ 称为矩阵 A 的属于其特征值 λ_0 的特征向量．

练习

1. 求投影变换 $Y=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}X$ 的特征值和特征向量．

2. 设 α，β 是矩阵变换 $Y=AX$ 的属于特征值 λ_0 的两个特征向量，求证：$a\alpha+b\beta$ $(\neq 0)$ 也是变换 $Y=AX$ 的属于 λ_0 的特征向量，其中 a，$b\in\mathbf{R}$．

3. 设 $A^2=E$，证明矩阵变换 $Y=AX$ 的特征值只能是 ± 1．

3.1.2 特征值与特征向量的求法

特征值与特征向量是平面变换内在本质的具体反映，通过它们可以更清楚地认识平面变换的特点．因此，对于平面变换，我们有必要来系统地研究如何求其特征值和特征向量．本节我们主要研究矩阵变换的特征值和特征向量的求法．

设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 是一个矩阵变换，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&6\\5&2\end{bmatrix}$．若 λ_0 是变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$ 是属于 λ_0 的一个特征向量，则有 $\boldsymbol{A\xi}=\lambda_0\boldsymbol{\xi}$，或 $\begin{bmatrix}1&6\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_0x_0\\\lambda_0y_0\end{bmatrix}$．

上式等价于 $\begin{cases}x_0+6y_0=\lambda_0x_0\\5x_0+2y_0=\lambda_0y_0\end{cases}$

即 $\begin{cases}(\lambda_0-1)x_0-6y_0=0\\-5x_0+(\lambda_0-2)y_0=0\end{cases}$

这说明，特征向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$ 是方程组

$$\begin{cases}(\lambda_0-1)x-6y=0\\-5x+(\lambda_0-2)y=0\end{cases}\tag{1}$$

的一个非零解．所以，应有 $\det\begin{vmatrix}\lambda_0-1&-6\\-5&\lambda_0-2\end{vmatrix}=0$，即 λ_0 是方程

$$\det\begin{vmatrix}\lambda-1&-6\\-5&\lambda-2\end{vmatrix}=0\tag{2}$$

的根．

反过来，若 λ_0 是方程（2）的根，则有 $\det\begin{vmatrix}\lambda_0-1&-6\\-5&\lambda_0-2\end{vmatrix}=0$，从而方程组（1）的解不唯一，求出方程组（1）的一个非零解，不妨设为 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$，则有 $\begin{cases}(\lambda_0-1)x_0-6y_0=0\\-5x_0+(\lambda_0-2)y_0=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x_0+6y_0=\lambda_0x_0\\5x_0+2y_0=\lambda_0y_0\end{cases}$ 用矩阵表示即为 $\begin{bmatrix}1&6\\5&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}=\lambda_0\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$．

这说明，λ_0 是矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 的一个特征值，$\boldsymbol{\xi}$ 是属于 λ_0 的一个特征向量．

综上所述，我们可以看出：λ_0 是矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 的特征值当且仅当它是方程 $\det\begin{vmatrix}\lambda-1&-6\\-5&\lambda-2\end{vmatrix}=0$ 的根．

定义 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，$\lambda$ 是一个数，称二阶行列式 $\det\begin{vmatrix}\lambda-a&-b\\-c&\lambda-d\end{vmatrix}$ 为矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 的特征多项式．

注：由于二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与平面上的矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 相互唯一确定，我们也把矩阵变换

$Y=AX$ 的特征多项式称为矩阵 A 的特征多项式.

从上述的分析可知，对于一个矩阵变换 $Y=AX$，其中 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，求它的特征值和特征向量可以分成以下两步：

（1）求出矩阵 A 的特征多项式 $\det\begin{bmatrix} \lambda-a & -b \\ -c & \lambda-d \end{bmatrix}=0$ 的全部根，它们就是矩阵变换 $Y=AX$的全部特征值.

（2）对于每个特征值 λ_0，解二元一次方程组

$$\begin{cases} (\lambda_0-1)x-by=0 \\ -cx+(\lambda_0-d)y=0 \end{cases}$$

其所有非零解就是属于 λ_0 的特征向量.

思考与讨论

对于平面上的矩阵变换 $Y=AX$，讨论其特征值的个数情况.

例 1 已知$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$，求矩阵变换 $Y=AX$ 的特征值和特征向量.

解：矩阵变换 $Y=AX$ 的特征多项式为 $\det\begin{bmatrix} \lambda-3 & 1 \\ 1 & \lambda-3 \end{bmatrix}=(\lambda-3)^2-1=\lambda^2-6\lambda+8$，解方程 $\lambda^2-6\lambda+8=0$ 可得两个特征值 $\lambda_1=2$，$\lambda_2=4$.

对于 $\lambda_1=2$，解方程组$\begin{cases} -x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$得其非零解为 $\xi=\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$，其中 $k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq0$，这就是属于特征值 $\lambda_1=2$ 的特征向量.

对于 $\lambda_2=4$，解方程组$\begin{cases} x+y=0 \\ x+y=0 \end{cases}$得其非零解为 $\xi=\begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}$，其中$k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq0$，这就是属于 $\lambda_2=4$ 的特征向量.

例 2 已知$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$，求矩阵变换 $Y=AX$ 的特征值和特征向量.

解：矩阵变换 $Y=AX$ 的特征多项式为 $\det\begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 \\ 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}=\lambda^2-2\lambda+1$，解方程 $\lambda^2-2\lambda+1=0$，得 $\lambda=1$.

解二元一次方程组$\begin{cases} -2x-2y=0 \\ 2x+2y=0 \end{cases}$得非零解为 $\xi=\begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}$，其中$k\in\mathbf{R}$，且 $k\neq0$，这就是变换$Y=AX$的属于特征值$\lambda=1$ 的特征向量.

练习

1. 设 λ_0 是平面上矩阵变换 $Y=AX$ 的一个特征值，证明 λ_0^2 是矩阵变换 $Y=A^2X$ 的特征值.

2. 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，求矩阵变换 $Y=AX$ 的特征值与特征向量.

3. 设 $A=\begin{bmatrix}0 & -3\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，求矩阵变换 $Y=AX$ 的特征值与特征向量.

3.1.3 特征值的不变性

不变量是数学理论和应用中一个非常重要的研究对象，它能够更深刻地反映客观事物的内在本质和规律性. 本节我们主要通过对特征值的讨论让大家对不变量有一个较初步的感受.

设矩阵变换 $Y=AX$，$\xi_i(i=1,2)$是属于特征值 $\lambda_i(i=1,2)$的特征向量，则有

$$A\xi_1=\lambda_1\xi_1,\ A\xi_2=\lambda_2\xi_2$$（如图 3-2 所示）.

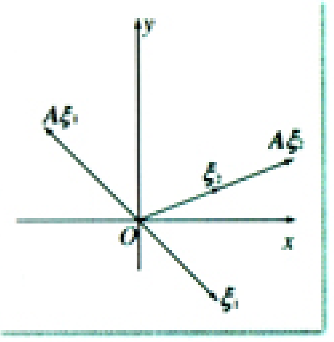


图 3-2

对于任意一个可逆矩阵 B，我们得到一个矩阵变换

$$Y=(BAB^{-1})X.$$

由于$(BAB^{-1})(B\xi_1)=(BAB^{-1}B)\xi_1=(BA)\xi_1=B(A\xi_1)=B(\lambda_1\xi_1)=\lambda_1(B\xi_1)$，因而有$(BAB^{-1})(B\xi_1)=\lambda_1(B\xi_1)$.

同理，可得$(BAB^{-1})(B\xi_2)=\lambda_2(B\xi_2)$.

容易看出，$B\xi_1\neq 0$，$B\xi_2\neq 0$. 因此，$B\xi_1$ 和 $B\xi_2$ 分别是矩阵变换 $Y=(BAB^{-1})X$ 的属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量.

这说明，λ_1 和 λ_2 是所有矩阵变换 $Y=(BAB^{-1})X$ 的特征值，其中 B 为可逆二阶矩阵. 即当矩阵变换 $Y=AX$ 按某种规则变为另一个矩阵变换时，特征值保持不变！

定义 设 A、B 是两个二阶矩阵，若存在某个可逆的二阶矩阵 T 使得 $B=TAT^{-1}$，则称 A 与 B 相似. 它们所对应的变换 $Y=AX$ 和 $Y=BX$ 称为相似变换.

根据前面的讨论立即可得：

定理 相似的矩阵变换有相同的特征值.

注 从定理可知，在相似意义下矩阵变换的特征值保持不变. 因此，人们就把矩阵变换的特征值称为**相似不变量**，简称**不变量**.

思考与讨论

若两个平面变换有相同的特征值，它们是否一定相似？试举例说明.

例 已知二阶矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}$，

（1）求它们的特征多项式和特征值；

（2）说明 A 与 B 不相似.

解：（1）显然，$\det\begin{bmatrix}\lambda-2&0\\0&\lambda-2\end{bmatrix}=(\lambda-2)^2$；$\det\begin{bmatrix}\lambda-2&-1\\0&\lambda-2\end{bmatrix}=(\lambda-2)^2$. 所以，$A$ 与 B 有相同的特征多项式 $(\lambda-2)^2$，当然它们也有相同的特征值 2.

（2）（用反证法）假设 A 与 B 相似，则存在可逆矩阵 C 使得 $B=CAC^{-1}$，即

$$\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}C^{-1}.$$

因为 $\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$ 与任意的二阶矩阵可交换，所以 $\begin{bmatrix}2&1\\0&2\end{bmatrix}=C\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}C^{-1}=CC^{-1}\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=E\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix}$.

于是有 $1=0$，矛盾. 所以，A 与 B 不相似.

上例说明，尽管相似矩阵有相同的特征值，但逆命题并不成立，即有相同特征值的两个二阶矩阵不一定相似.

练习

1. 已知两个可逆的矩阵变换 $Y=AX$ 与 $Y=BX$ 相似，求证：

   （1）$Y=A^{-1}X$ 与 $Y=B^{-1}X$ 相似；

   （2）$Y=A^2X$ 与 $Y=B^2X$ 相似.

2. 证明：恒等变换只与自身相似.

3. （1）设 $A=\begin{bmatrix}3&1\\5&-1\end{bmatrix}$，$P=\begin{bmatrix}1&1\\1&-5\end{bmatrix}$，证明：$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4&0\\0&-2\end{bmatrix}$；

   （2）设 $B=\begin{bmatrix}7&-6\\9&-8\end{bmatrix}$，$Q=\begin{bmatrix}1&2\\1&3\end{bmatrix}$，证明：$Q^{-1}BQ=\begin{bmatrix}1&0\\0&-2\end{bmatrix}$.

4. 已知二阶矩阵 A 与 B 相似，求证 A 可逆当且仅当 B 可逆.

3.2　$A^n\alpha$ 的简单表示

在实际应用中，我们经常遇到矩阵方幂与列向量乘积的问题．显然，当幂次较高时，直接计算很不方便．如果矩阵的特征多项式有两个不同的根，我们可以利用特征值和特征向量来简化计算．

定理1　设 $\xi_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$ 与 $\xi_2=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$ 是平面内两个不平行的向量，则对平面内任意的向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}$，都存在两个数 s_0、t_0，使得

$$\boldsymbol{\alpha}=s_0\xi_1+t_0\xi_2.$$

证明：我们用待定系数法求证．设 $\boldsymbol{\alpha}=s\xi_1+t\xi_2$，则有

$$\begin{cases}a_1=x_1s+y_1t\\a_2=x_2s+y_2t\end{cases}$$

即

$$\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\end{bmatrix}.$$

因为 ξ_1 与 ξ_2 不平行，所以 $\det\begin{bmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{bmatrix}\neq0$，矩阵方程有唯一解，不妨设为 $\begin{bmatrix}s_0\\t_0\end{bmatrix}$．于是，有　$\boldsymbol{\alpha}=s_0\xi_1+t_0\xi_2$．

为进一步研究简化二阶矩阵的方幂与向量的乘积的问题，我们首先考虑一个具体的例子．对于二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-1&-5\\-2&2\end{bmatrix}$，容易求得它有两个不同的特征值 $\lambda_1=-3$、$\lambda_2=4$，并且 $\xi_1=\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ 是属于 $\lambda_1=-3$ 的一个特征向量，$\xi_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ 是属于 $\lambda_2=4$ 的一个特征向量．于是，有

$$\boldsymbol{A}\xi_1=-3\xi_1,\ \boldsymbol{A}\xi_2=4\xi_2.$$

对于平面上的任意一个向量 $\boldsymbol{\alpha}$，根据上面的定理1可知，存在两个数 s 和 t 使得 $\boldsymbol{\alpha}=s\xi_1+t\xi_2$．于是，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A\alpha}&=\boldsymbol{A}(s\xi_1)+\boldsymbol{A}(t\xi_2)=s(\boldsymbol{A}\xi_1)+t(\boldsymbol{A}\xi_2)=s\lambda_1\xi_1+t\lambda_2\xi_2\\&=-3s\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}+4t\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

进一步可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}&=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A\alpha})=\boldsymbol{A}\left(-3s\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}+4t\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)\\&=-3s\left[\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}\right]+4t\left[\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right]\\&=(-3)^2s\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}+4^2t\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

依此类推，我们有

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=(-3)^n s\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}+4^n t\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}.$$

上述过程显然具有一般性，为此我们得到 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的一种简单表示.

定理 2 设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同的特征值 λ_1，λ_2，并且 $\boldsymbol{\xi}_1$ 和 $\boldsymbol{\xi}_2$ 是分别属于 λ_1 和 λ_2 的两个特征向量. 对任意的平面向量 $\boldsymbol{\alpha}$，必存在两个数 s 和 t 使得

$$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=s\lambda_1^n\boldsymbol{\xi}_1+t\lambda_2^n\boldsymbol{\xi}_2.$$

例 1 已知二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}7 & 2\\2 & 4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}$ 是一个列向量，求 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的简单表示.

解：解方程 $\det\begin{bmatrix}\lambda-7 & -2\\-2 & \lambda-4\end{bmatrix}=0$ 可得，二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=8$，$\lambda_2=3$.

解矩阵方程 $\begin{bmatrix}8-7 & -2\\-2 & 8-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}x_1-2x_2=0\\-2x_1+4x_2=0\end{cases}$ 求得属于 $\lambda_1=8$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$.

解矩阵方程 $\begin{bmatrix}3-7 & -2\\-2 & 3-4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，即 $\begin{cases}-4x_1-2x_2=0\\-2x_1-x_2=0\end{cases}$ 求得属于 $\lambda_2=3$ 的一个特征向量 $\boldsymbol{\xi}_2=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$.

由于 $\boldsymbol{\xi}_1$ 与 $\boldsymbol{\xi}_2$ 是两个不平行的向量，故存在数 s 和 t 使得 $\boldsymbol{\alpha}=s\boldsymbol{\xi}_1+t\boldsymbol{\xi}_2$，从而有 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}=8^n s\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}+3^n t\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$.

例 2 对某地区城乡人口流动调查发现，城乡人口流动有一个稳定的趋势：每年农村人口的 2.5%流向城镇，而城镇人口的 1%移居农村. 假定目前城乡人口分别为 2 千万和 8 千万，且总人口保持不变，求十年后城乡人口各为多少？

解：设 n 年后城乡人口分别为 x_n（千万）和 y_n（千万）. 由于目前城乡人口分别为 2 和 8（千万），故 $x_0=2$，$y_0=8$. 一年后，城乡人口满足

$$\begin{cases}\dfrac{99}{100}x_0+\dfrac{25}{1\,000}y_0=x_1\\[2mm]\dfrac{1}{100}x_0+\dfrac{975}{1\,000}y_0=y_1\end{cases}$$

即 $\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{99}{100} & \dfrac{25}{1\,000}\\[2mm]\dfrac{1}{100} & \dfrac{975}{1\,000}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\y_0\end{bmatrix}$，其中 $x_0=2$，$y_0=8$.

同理，两年后城乡人口满足 $\begin{bmatrix}x_2\\y_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{99}{100} & \dfrac{25}{1\,000}\\[2mm]\dfrac{1}{100} & \dfrac{975}{1\,000}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\y_1\end{bmatrix}$，

即 $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{99}{100} & \frac{25}{1\ 000} \\ \frac{1}{100} & \frac{975}{1\ 000} \end{bmatrix}^2 \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$.

以此类推，十年后城乡人口满足

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{99}{100} & \frac{25}{1\ 000} \\ \frac{1}{100} & \frac{975}{1\ 000} \end{bmatrix}^{10} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

若记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \frac{99}{100} & \frac{25}{1\ 000} \\ \frac{1}{100} & \frac{975}{1\ 000} \end{bmatrix}$，则由特征多项式

$$\det\begin{bmatrix} \lambda-\frac{99}{100} & -\frac{25}{1\ 000} \\ -\frac{1}{100} & \lambda-\frac{975}{1\ 000} \end{bmatrix}=0$$

可求得其特征值分别为 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=\frac{193}{200}$.

解矩阵方程 $\begin{bmatrix} 1-\frac{99}{100} & -\frac{25}{1\ 000} \\ -\frac{1}{100} & 1-\frac{975}{1\ 000} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，可得属于 $\lambda_1=1$ 的一个特征向量 $\xi_1=\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$；

解矩阵方程 $\begin{bmatrix} \frac{193}{200}-\frac{99}{100} & -\frac{25}{1\ 000} \\ -\frac{1}{100} & \frac{193}{200}-\frac{975}{1\ 000} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，可得属于 $\lambda_2=\frac{193}{200}$的一个特征向量 $\xi_2=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

根据本节定理 1，可将向量 $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}$用特征向量 ξ_1，ξ_2 线性表示. 令 $\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}=s\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}+t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$，可得方程组 $\begin{cases} 5s-t=2 \\ 2s+t=8 \end{cases}$

于是，有 $s=\frac{10}{7}$，$t=\frac{36}{7}$. 因此，

$$\boldsymbol{A}\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}=1\times\frac{10}{7}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}+\frac{193}{200}\times\frac{36}{7}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

再根据本节定理 2 可知，

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ y_{10} \end{bmatrix}=\boldsymbol{A}^{10}\begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix}=1^{10}\times\frac{10}{7}\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}+\left(\frac{193}{200}\right)^{10}\times\frac{36}{7}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\approx\begin{bmatrix} 3.54 \\ 6.46 \end{bmatrix}.$$

因此，10 年后该地区城乡人口大约分别为 3.54 千万和 6.46 千万.

思考与讨论

在例 2 中，随着年数的增长，该地区城乡人口有怎样的变化趋势？

现在让我们回顾一下矩阵特征值与特征向量的意义和在研究变换中的作用.

设 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 是平面上的一个矩阵变换，其中 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$，且 $\boldsymbol{\xi}\neq\boldsymbol{0}$，$\lambda$ 为实数，且有

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},$$

则 λ，$\boldsymbol{\xi}$ 分别称为这个变换（或矩阵 $\boldsymbol{A}$）的特征值和属于这个特征值的特征向量. 变换的几何意义是显然的，这个变换把向量 $\boldsymbol{\xi}$ 伸缩 $|\lambda|$ 倍.

问题是，对于这样的变换，如何求出它的特征值和特征向量. 显然，只要解

$$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi},$$

即
$$\begin{cases} ax_1+bx_2=\lambda x_1 \\ cx_1+dx_2=\lambda x_2 \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} (a-\lambda)x_1+bx_2=0 \\ cx_1+(d-\lambda)x_2=0 \end{cases}$$

就能求出 λ，这个方程组有非零解的充要条件是

$$(a-\lambda)(d-\lambda)-bc=0.$$

问题转化为求这个关于 λ 的二次方程的根，如果这个方程存在两个实数根 λ_1，λ_2，就可求出属于它们的特征向量. 例如，在例 1 中，属于 $\lambda_1=2$ 的特征向量 $\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix} k \\ k \end{bmatrix}$，当 k 取不等于零的任意实数值时，生成平面向量集合的一个子集合，这个子集合的全体向量共线. 上述变换，使这个子集合的每一个向量仍变为这个子集合中的一个向量.

在属于 λ_1 的特征向量组成的子集合和属于 λ_2 的特征向量组成的子集合中，分别取非零向量 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$，这两个向量不平行，它们就可构成平面向量集合的一个基底. 于是任一个平面向量 $\boldsymbol{\xi}$，都可表示为两个基向量的线性组合，即存在两个实数 a_1，a_2，使

$$\boldsymbol{\xi}=a_1\boldsymbol{\xi}_1+a_2\boldsymbol{\xi}_2.$$

这样，我们就可以利用上述变换的性质研究平面内矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$. 例如，利用上述变换的性质化简 $\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{\alpha}$ 的计算和解决例 2 中这种类型的实际问题.

从本节的实例中，我们可以看到在研究变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{BX}$ 时，研究在它的子集合中，变换（$\boldsymbol{A\xi}=\lambda\boldsymbol{\xi}$）性质的重要意义.

练习

1. 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}7 & -2\\ 12 & -3\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}3\\ 7\end{pmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{\alpha}$.
2. 试写出求平面上矩阵变换 $\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$ 的简单表示的算法和程序框图.
3. 某金融机构有两个分公司 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$，根据统计，$\boldsymbol{A}$ 公司每年有$\frac{1}{10}$的资金流入 $\boldsymbol{B}$ 公司，$\boldsymbol{B}$ 公司每年有$\frac{2}{10}$的资金流入 $\boldsymbol{A}$ 公司. 假定该金融机构总资金不变，且两分公司现有资金额相同，求 5 年后 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 两公司资金额的比.

本章小结

Ⅰ 知识结构

- 变换的不变量
  - 特征值与特征向量
    - 定义
    - 求法
    - 特征值的不变性
  - 矩阵变换的简单表示
    - $Y=AX$的表示
    - $Y=A^nX$的表示

Ⅱ 思考与交流

1. 什么是变换的不变量？通过查阅资料，看看还有什么不变量.
2. 写出矩阵变换的简单表示. 想一想其中隐含的本质是什么？

Ⅲ 巩固与提高

1. 设$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$，求证矩阵变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$的特征值只能是1或0.
2. 求下列矩阵的特征多项式.

   （1）$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$；　（2）$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.
3. 求证：二阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆当且仅当$\boldsymbol{A}$的特征值不为零.
4. 设$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -7 & 3\end{bmatrix}$，求$\boldsymbol{A}$的特征值和特征向量.
5. 已知$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 4\end{bmatrix}$，求矩阵变换$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{AX}$的简单表示.
6. 已知某市城区与郊区人口流动的情况为：每年有5%的城区人口移居郊区，有3%的郊

区居民迁往城区．假定 2004 年该市城区和郊区人口分别为 60 万和 40 万，试求到 2008 年该市城郊人口的分布情况．

Ⅳ 自测与评估

1．设二阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有一个特征值为 0，求 $\boldsymbol{A}$ 的行列式．

2．已知 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 4 & 3\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量．

3．已知二阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 2\end{bmatrix}$，$\xi_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值$\lambda_1=7$的特征向量，$\xi_2=\begin{bmatrix}4\\ -5\end{bmatrix}$是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 $\lambda_2=-2$ 的特征向量．

（1）若 $\xi=\begin{bmatrix}-5\\ 13\end{bmatrix}$，并且 $\xi=k_1\xi_1+k_2\xi_2$，求 k_1 和 k_2 的值；

（2）计算 $\boldsymbol{A}^3\xi$．

4．设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是两个二阶矩阵，ξ 是它们公共的特征向量，求证：ξ 也是 $\boldsymbol{AB}$ 的特征向量．

5．斐波那契（Fibonacci）数列 $\{f_n\}$ 满足：

（1）$f_0=0$，$f_1=1$；

（2）$\begin{cases}f_n=f_{n-1}+f_{n-2}\\ f_{n-1}=f_{n-1}\end{cases}$

即 $\begin{bmatrix}f_n\\ f_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_{n-1}\\ f_{n-2}\end{bmatrix}$，$n=2$，3，…．

试利用矩阵的特征值和特征向量求数列$\{f_n\}$ 的通项公式．

数 学 文 化

阅读与欣赏

西尔维斯特与不变量

西尔维斯特（James Joseph Sylvester），1814 年 9 月 3 日生于英国伦敦，出身犹太家庭．1841～1845 年，他到美国弗吉尼亚（Virginia）大学任教授．后来他又回到伦敦，先后担任律师和较低的教授职位．19 世纪 70 年代应邀去美国霍普金斯（Hopkins）大学任教授，在那里从 1876 年起讲授不变量理论．他开创了美国的纯数学研究，并创办了《美国数学杂志》．1884 年他回到英国，成为牛津（Oxford）大学教授，直到 1897 年去世．

他同凯莱（Cayley）一起，是不变量理论的创始人．所谓不变量，就是指在一类变换下保持不变的量．比如，多项式的次数在线性变换下是不变的，矩阵的特征值在相似变换下是不变的，拓扑空间的维数在同胚变换下是不变的，等等．

一个较经典的例子就是所谓二次曲线的不变量．由曲线方程的系数确定的函数，如果经过任意一个直角坐标变换后，它的函数值保持不变，则称这个函数为曲线的一个不变量．设二次曲线的方程为 $F(x, y)=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f$，则 $I_1=a+c$，$I_2=\det\begin{bmatrix}a & b\\ b & c\end{bmatrix}$ 都是它的不变量．另外，该二次曲线的特征方程 $\lambda^2-I_1\lambda+I_2=0$ 及其特征值也是不变量．

自从不变量理论创立以来，数学家越来越深刻地认识到不变量在数学理论和数学应用中的重要性．比如，利用拓扑不变量可以对曲面进行分类，利用微分不变量可以研究物理学中的规范场论，等等．迄今为止，数学家已经在数学的许多领域找到各式各样的不变量，其中除了上面提到的不变量外还包括代数不变量、几何不变量、积分不变量、同伦不变量等．

附录

三阶矩阵简介

1. 三阶矩阵的定义

定义　由 3×3 个数 a_{ij}（i=1，2，3；j=1，2，3）排成的 3 行 3 列的数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

称为三阶矩阵．其中 a_{ij} 称为三阶矩阵的元素，i 称为元素 a_{ij} 的行指标，j 称为元素 a_{ij} 的列指标．

通常，我们用大写的拉丁字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，…来表示三阶矩阵．

类似于二阶矩阵的情形，两个三阶矩阵相等当且仅当它们的对应元素都相等，即若设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$ 当且仅当 $a_{ij}=b_{ij}$（i=1，2，3；j=1，2，3）．

2. 三阶矩阵的乘法

定义　设三阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix},$$

则

$$\begin{bmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33} \end{bmatrix}$$

称为三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$．

这就是说，三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积仍是一个三阶矩阵 $\boldsymbol{C}$，它的第 i 行第 j 列的元素等于第一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第二个矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列的对应元素乘积的代数和．

例 1　已知三阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix},$$

求 AB.

解：$AB=\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&2\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}2\times1+1\times2+1\times1 & 2\times1+1\times(-1)+1\times0 & 2\times(-1)+1\times0+1\times1\\3\times1+1\times2+2\times1 & 3\times1+1\times(-1)+2\times0 & 3\times(-1)+1\times0+2\times1\\1\times1+(-1)\times2+0\times1 & 1\times1+(-1)\times(-1)+0\times0 & 1\times(-1)+(-1)\times0+0\times1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}5&1&-1\\7&2&-1\\-1&2&-1\end{pmatrix}.$$

同二阶矩阵一样，三阶矩阵的乘法满足结合律，即：

设 A，B，C 均为三阶矩阵，则有

$$A(BC)=(AB)C.$$

然而，也与二阶矩阵的情况一样，三阶矩阵的乘法不满足交换律和消去律.

例 2 已知

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\3&3&-6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&-1&0\\1&-1&0\\1&-1&0\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix},$$

求 AB，BA，AC.

解：$AB=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，$BA=\begin{pmatrix}2&2&-4\\2&2&-4\\2&2&-4\end{pmatrix}$，

$$AC=\begin{pmatrix}1&1&-2\\-1&-1&2\\3&3&-6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\1&0&-1\\1&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

例 2 说明了 $AB\neq BA$，也说明了 $AB=AC=0$. 但是，显然 $B\neq C$.

3. 三阶矩阵的逆矩阵

定义 三阶矩阵

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

称为**单位矩阵**，记为 E.

显然，对于任意的三阶矩阵 A，都有 $AE=EA=A$. 因此，在三阶矩阵的乘法中，单位矩阵 E 的作用类似于数的乘法中的 1.

定义 设A是一个三阶矩阵，若存在某个三阶矩阵B，使得$AB=BA=E$，则称A是可逆的，B称为A的逆矩阵。

可以证明，三阶矩阵的逆矩阵也是唯一的. 因此，我们习惯上也把三阶矩阵A的逆矩阵记为A^{-1}.

思考与讨论

是否每一个三阶矩阵都是可逆的？如果不是，举例说明.

和二阶矩阵一样，设三阶矩阵A，B都是可逆矩阵，则AB和A^{-1}也是可逆矩阵，并且

$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1},\ (A^{-1})^{-1}=A.$$

对于一个给定的三阶矩阵，如果它可逆，怎样求出它的逆矩阵呢？这个问题要比二阶矩阵的情况复杂得多. 由于很多相关知识已经超出了我们学习的范围，这里就不进行讨论了.

部分中英文词汇对照表

矩阵	matrix
变换	transformation
列向量	column vector
反射变换	reflexive transformation
旋转变换	rotational transformation
投影变换	projective transformation
逆矩阵	inverse matrix
行列式	determinant
系数矩阵	coefficient matrix
方程组	system of equations
特征值	characteristic root
特征向量	characteristic vector
特征多项式	characteristic polynomial
相似	similar
不变量	invariant