普通高中课程标准实验教科书

数学

选修 4-9

风险与决策

人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著

人民教育出版社

B版

主　　编　　高存明

编　　者　　高尚华
责任编辑　　张唯一
美术编辑　　李宏庆　王　喆
封面设计　　李宏庆

普通高中课程标准实验教科书
数　学
选修4－9　风险与决策
B版
人民教育出版社　课程教材研究所
中学数学教材实验研究组　编著
*
人民教育出版社　出版发行
网址：http://www.pep.com.cn
北京四季青印刷厂印装　全国新华书店经销
*
开本：890毫米×1 240毫米　1/16　印张：3　字数：66 000
2006年6月第1版　2008年7月第4次印刷
ISBN 978-7-107-19762-8
G·12812（课）　定价：3.40元

本册导引

高中生王华每逢星期六要到离家较远的科学会堂听数学讲座，讲座早上8：00开始，王华家去科学会堂有两条公共汽车路线．坐1路车路线较长，花费时间较多，但不容易堵车；坐2路车路线较短，但堵车的可能性大．这个星期六，王华7：30出门，时间紧了些，他可能迟到，当王华赶到公共汽车站时，正好1路车和2路车同时进站，他应该坐哪一路公共汽车去科学会堂呢？

根据生活经验和概率知识知道，假如王华坐1路公共汽车，虽说不容易堵车，但并不能保证一定不堵车，万一遇到堵车，那毫无疑问要迟到．假如王华坐2路公共汽车又怎样呢？尽管堵车的可能性大，但还是有机会遇到交通畅通，也就是说有机会赶上讲座开讲，当然这种情况出现的概率不大．

以上分析表明，不管王华坐哪一路公共汽车，他都有可能迟到，或者说，王华面临着迟到的风险．那么，能不能运用数学知识，采取某种合理的方法，帮助王华做出决策，决定坐哪一路公共汽车较好呢？

实际上，在生活中遇到的很多问题，小到个人日常事务的处理，大到治国平天下，往往有多个行动方案可以选择，能不能运用统计决策的思想方法，从中选出一个最佳行动方案，力求得到最圆满的结果，这就是本专题所要解决的问题．

本专题分六讲，第一讲着重说明什么是风险型决策，以下五讲分别介绍最大可能法、期望值法、决策树、灵敏度分析以及马尔可夫型决策，全部内容通过分析多个实例（其中包括王华如何选择坐车路线）展开，以帮助同学们建立初步的风险与决策意识．

目　录

第一讲　风险型决策 …… 1
第二讲　最大可能法 …… 5
第三讲　期望值法 …… 8
第四讲　决策树 …… 12
第五讲　灵敏度分析 …… 22
第六讲　马尔可夫型决策 …… 26
本章小结 …… 33

附录Ⅰ　矩阵 …… 36
附录Ⅱ　部分中英文词汇对照表 …… 41

第一讲　风险型决策

决策一词，按中文意思理解，不外乎下列两种含义：①做出决定的意思，这是作为动词来理解；②指做出的决定，这是作为名词来理解．本专题所讲的决策，含义要更加广泛些．

决策是人们在正确认识客观规律的基础上为自己的行动确定目标和选择行动方案的过程，也就是做出决定的过程．在日常生活中，人们几乎时时处处都会遇到决策问题，小到个人的升学、求职、采购、投资，大到政治、经济、军事、教育等领域，存在着大量的决策问题．在企业管理中，决策问题已经成为现代企业管理的核心问题，它贯穿于整个企业管理过程．

在很多决策问题中，未来的情况比较复杂，决策者往往面对多个方案，每个方案又可能各有利弊，这时决策者应尽量避免盲目性，不宜简单的拍板定案．

对于有些决策问题，决策者可以考虑运用统计决策方法，对各个方案加以分析、比较，权衡利弊，进行判断，直至做出正确的决定．

风险型决策是指当未来的外界情况不确定，但其各种状态出现的概率或者已知，或者可以估算出来时，决策者从多个可供选择的行动方案中挑选一个方案的过程．导引中提到的高中生王华决定坐哪一路公共汽车的例子，就是一个风险型决策问题．

一般地讲，风险型决策问题应该具备下列 4 个要素：

①决策的备选方案；

②未来状态及其概率；

③各备选方案在不同状态下的损益值；

④决策准则．

下面通过一个实例来具体分析这些要素．

投资总是具有一定风险的，因此在选择投资方向时，计算其期望收益往往是可供考虑的一种决策方法．某人有 10 万元现金，想通过投资于某项目获利．若投资于项目 A，预计成功的机会为 30%，可得利润 8 万元，失败的机会为 70%，将损失 2 万元，若投资于项目 B，成功的机会为 40%，可得利润 5 万元，失败的机会为 60%，同样损失 2 万元，试问他应该向哪个项目投资呢？

从上面的叙述容易看出，无论他投资于哪个项目，都有可能失败，或者说都承担了一定的风险．把此人看成决策者，决策的备选方案有两个，即

a_1：向项目 A 投资；

a_2：向项目 B 投资．

未来状态有两种，即要么投资成功，要么投资失败，相应概率以及两备选方案在不同状态下的收益值可以归纳如下（这里，收益值取正值，损失值取负值）：

a_1：P(投资成功)$=30\%$，收益 8 万元；

P(投资失败)=70%，收益−2万元.

a_2：P(投资成功)=40%，收益5万元；

P(投资失败)=60%，收益−2万元.

决策准则选用期望值准则，显然，决策者的决策目标是收益越大越好.

综合上面的分析，可以得出结论：这一投资问题是一个风险型决策问题.

下面通过两个实例来简要地介绍期望值准则中“期望”一词的含义.

设某项经营的收益与天气有关. 已知晴天时每天可盈利840元，阴天时每天可盈利300元，雨天将亏损180元. 预测未来一段时间内晴天、阴天、雨天的概率分别是$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{6}$. 这时可以用表格形式来反映每天盈利的情况：设每天经营的收益为X元，于是有

X	840	300	-180
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

通常可称上述X为离散型随机变量，这个表格称为离散型随机变量X的概率分布或分布列.

把X的取值与其对应的概率值相乘，然后把得到的乘积相加，记作$E(X)$，即

$$E(X)=840\times\frac{1}{2}+300\times\frac{1}{3}+(-180)\times\frac{1}{6}=490.$$

$E(X)$称为离散型随机变量X的数学期望，简称期望，它反映了X取值的平均水平，这里的$E(X)=490$意味着，平均说来该项经营每天可望盈利490元.

又例如，为了了解一名射击运动员射击的技术水平，可以用离散型随机变量X表示他在一次射击中的“命中环数”，于是X能取的值是0，1，2，3，…，10. 根据一段较长时间统计他的命中率，X的分布列为

X	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	0	0	0	0	0	0.02	0.03	0.06	0.08	0.31	0.50

它比较全面地反映了该射击运动员的射击技术水平. 由分布列可以计算X的期望$E(X)$：

$$\begin{aligned}E(X)&=5\times0.02+6\times0.03+7\times0.06+8\times0.08+9\times0.31+10\times0.50\\&=9.13.\end{aligned}$$

意味着他射击一次的期望命中环数是9.13，应该说他的射击技术是相当好的.

风险型决策问题的决策准则是指选择最佳行动方案的标准，对于同一个决策问题，不同的决策准则可能导致选择不同的最佳方案. 为了说明这一点，这里再举一个例子.

根据气象预报，某地区下个月有小洪水的概率为0.25，有大洪水的概率为0.01. 设一公司在建筑工地上有一台大型设备，为保护设备有以下三个方案：

方案a_1：运走设备，此时需花费3 800元；

方案a_2：建一保护围墙，需花费2 000元，但围墙无法防止大洪水，当大洪水来临，设备受损，损失费为60 000元；

方案 a_3：不采取措施，希望不发生洪水．此时大洪水来临损失 60 000 元，小洪水来临损失 10 000 元．

公司领导应该如何决策呢？

分析前 3 个要素是容易的．本例有 3 个备选方案，即 a_1，a_2，a_3．未来状态也有 3 个，即发大洪水，发小洪水，没发洪水．相应概率为

P(发大洪水)$=0.01$，

P(发小洪水)$=0.25$，

P(没发洪水)$=1-0.01-0.25=0.74$.

3 个方案在 3 个状态下的损失值为

a_1：0，花费 3 800 元；

a_2：60 000 元（发大洪水），0（发小洪水），0（没发洪水），花费 2 000 元；

a_3：60 000 元（发大洪水），10 000 元（发小洪水），0（没发洪水），花费 0 元．

决策者的决策目标是：损失与花费越少越好．

下面先使用最大可能准则来解决上述决策问题．

由上面的分析易见，未来状态为不发生洪水的可能性远远大于发生洪水的可能性，公司领导就把“没发洪水”作为解决问题的基础，于是应该选择方案 a_3，什么也不做，省去了花费．但是，只要有洪水，就会导致损失，这决策显然承担着风险．

再使用期望值准则讨论这决策问题．

对于方案 a_1，损失为 0，但花费为 3 800 元．

对于方案 a_2，可设损失值为离散型随机变量 X，X 的分布列为

X	60 000	0	0
P	0.01	0.25	0.74

期望损失

$$\begin{aligned}E(X)&=60\,000\times0.01+0\times0.25+0\times0.74\\&=600\ (\text{元}).\end{aligned}$$

期望损失与花费之和为

$$600+2\,000=2\,600\ (\text{元}).$$

对于方案 a_3，可设损失值为离散型随机变量 Y，Y 的分布列为

Y	60 000	10 000	0
P	0.01	0.25	0.74

期望损失

$$\begin{aligned}E(X)&=60\,000\times0.01+10\,000\times0.25+0\times0.74\\&=3\,100\ (\text{元}).\end{aligned}$$

由于花费是 0，所以期望损失与花费之和也是 3 100 元．

比较起来，方案 a_2 的期望损失与花费之和最少，公司领导按照期望值准则，应该选

择方案 a_2 为最佳行动方案，这与按照最大可能准则选择方案 a_3 的结果是不同的.

为了行文简洁，以下把使用最大可能准则的风险型决策方法简称为最大可能法，把使用期望值准则的风险型决策方法简称为期望值法，对它们较为详细的讨论将在以下 4 讲中展开.

习题一

1. 某石油公司拟在一片估计含油的荒原上钻探，如果钻井，费用为 150 万元. 若出油（概率为 0.6），收入为 700 万元；若无油（概率为 0.4），则收入为 0. 该公司也可以转让开采权，转让费为 160 万元，公司不承担任何风险. 该公司应如何决策呢？试用风险型决策的 4 个要素分析上面的问题.
2. 某人参加一种猜谜游戏，需猜谜 1 及谜 2 两道谜语. 他可以按照自己选择的先后次序去猜谜，但只有当他猜对第一道谜语时才有资格去猜另一道谜语，已知猜对谜 1 与猜对谜 2 是相互独立的事件. 现假设猜对谜 1 的概率是 0.6，谜 1 的奖金是 200 元；猜对谜 2 的概率是 0.8，谜 2 的奖金是 100 元. 他应该先猜哪道谜语，才能获得较高的期望奖金呢？试用风险型决策的 4 个要素分析上面的问题.

3*. 对第一讲中的投资实例，使用期望值准则，求出投资人的最佳决策.

第二讲　最大可能法

最大可能法是指使用最大可能准则的一种风险型决策方法，简便易行．我们知道，一个事件的概率越大，它发生的可能性就越大．当面对未来情况的各种状态都有可能出现时，由于已经知道它们出现的概率，或者这些概率可以估算出来，决策者就挑选其中概率最大的状态作为考虑问题的出发点，然后再挑选对自己最有利的行动方案．

例 1　某农户要在地里种一种农作物，他可以种玉米、小麦或棉花．根据历年的气象资料了解到天气干旱、天气正常和天气多雨的概率分别为 0.3，0.6，0.1．种三种农作物在三种天气状态下获利情况如表 1 所示．该农户应该如何决策呢？

表 1　农作物在不同天气状态下所获利润　单位：万元

天气状态 / 方案	干　旱	正　常	多　雨
种玉米	0.2	0.4	0.3
种小麦	0.2	0.5	0.4
种棉花	0.3	0.6	0.2

解：该农户的决策目标是获取最大利润．未来天气状态正常的概率是 0.6，远大于干旱年份的概率 0.3 和多雨年份的概率 0.1，使用最大可能法进行决策，应该选定天气正常作为考虑种哪种农作物的出发点．

接下来的问题就容易解决了，在天气正常的年份里，由表 1 中间那一列可知种棉花获利最多（0.6 万元），该农户的最佳行动方案是在这块地里种棉花．

这里需要指出，该农户决定种棉花，并不意味着他就能获得 0.6 万元的利润，毕竟这是一个带有“风险”的决策．运用概率的思想方法不难发现，虽然未来天气多雨的概率只有百分之十，但是天有不测风云，一旦降水量多的年份来临，该农户就只能获利 0.2 万元，比种玉米或小麦的收入要少．

下面介绍损益函数与损益矩阵的概念．

损益函数 $R(a, x)$ 是一个关于两个变量 a，x 的二元函数，其中第一个变量 a 表示决策者可以采取的各种方案．在例 1 中，a_1 表示种玉米，a_2 表示种小麦，a_3 表示种棉花．第二个变量 x 表示未来外界情况可能发生的各种状态．在例 1 中，x_1 表示天气干旱，x_2 表示天气正常，x_3 表示天气多雨．损益函数值 $R(a, x)$ 表示状态 x 出现时采取方案 a 得到的收益值或损失值．在例 1 中 $R(a, x)$ 表示收益值．如，$R(a_3, x_2)=0.6$ 意味着在正常天气状态下种棉花能获利 0.6 万元，例 1 的所有损益函数值是

$R(a_1, x_1)=0.2$，$R(a_1, x_2)=0.4$，$R(a_1, x_3)=0.3$，

$R(a_2, x_1)=0.2$，$R(a_2, x_2)=0.5$，$R(a_2, x_3)=0.4$，

$R(a_3, x_1)=0.3$，$R(a_3, x_2)=0.6$，$R(a_3, x_3)=0.2$.

把这 9 个收益值按照上面的次序用矩阵❶形式表示出来，就得到了损益矩阵，损益矩阵可以记为黑体大写英文字母 $\boldsymbol{R}$，即

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}0.2 & 0.4 & 0.3\\ 0.2 & 0.5 & 0.4\\ 0.3 & 0.6 & 0.2\end{pmatrix}.$$

注

❶ 参看附录Ⅰ：矩阵.

损益函数 $R(a, x)$ 或损益矩阵 $\boldsymbol{R}$ 能充分反映各个备选方案在不同状态下的收益值或损失值，是决策者做风险型决策的重要依据.

例 2 为生产某种产品，投资方有两个基本建设方案，一个是建设大工厂，另一个是建设小工厂. 大工厂需要投资 300 万元，小工厂需要投资 150 万元，两者的使用期限都是 10 年. 估计在此期间，产品畅销的概率是 0.7，产品滞销的概率是 0.3. 两个方案的年度收益情况如表 2 所示. 投资方应该做出怎样的决策呢?

表 2 两个方案的年度收益情况 单位：万元

方案 \ 状态	x_1：产品畅销	x_2：产品滞销
概率	0.7	0.3
a_1：造大工厂	100	-20
a_2：造小工厂	40	20

解：和例 1 类似，投资方的决策目标是获取最大的利润. 由于表 2 给出的是一年的收益情况，为了讨论问题的方便，需要求出工厂投产 10 年的损益函数 $R(a, x)$ 或损益矩阵 $\boldsymbol{R}$.

$R(a_1, x_1)$ 表示大工厂投产 10 年产品畅销的总利润（单位：万元），应该为

$$R(a_1, x_1)=100\times10-300=700;$$

$R(a_1, x_2)$ 表示大工厂投产 10 年产品滞销的总利润（单位：万元），为

$$R(a_1, x_2)=(-20)\times10-300=-500.$$

对于小工厂，类似地有

$$R(a_2, x_1)=40\times10-150=250;$$

$$R(a_2, x_2)=20\times10-150=50.$$

于是可以得到如下的损益矩阵 $\boldsymbol{R}$：

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix}700 & -500\\ 250 & 50\end{pmatrix}.$$

使用概率的记号，由题意，

$$P\text{（产品畅销）}=0.7,$$

$$P\text{（产品滞销）}=0.3.$$

根据最大可能法，应以未来产品畅销的状态作为选择基建方案的出发点.

从损益矩阵 $\boldsymbol{R}$ 表示产品畅销的第 1 列数据易见，造大工厂的总利润 700 万元远大于造小工厂的总利润 250 万元，投资方应该采纳造大工厂的基建方案.

进一步观察损益矩阵 $\boldsymbol{R}$ 可以看出，造大工厂虽然可能获得 700 万元，但承担的风险很大，一旦由于种种始料未及的原因产品滞销，就要遭受亏损 500 万元. 而若建设小工厂，不管产品畅销、滞销，均能获利，但获利的数额相对要小得多. 这个例子表明风险型决策在实际工作中有很大的应用价值.

我们把用最大可能法进行决策的步骤归纳如下：

第一步　明确问题的决策目标；

第二步　确定未来状态 x_1，x_2，…及其概率，确定可供选择的各个方案 a_1，a_2，…；

第三步　确定损益函数 $R(a, x)$ 或损益矩阵 $\boldsymbol{R}$；

第四步　由未来状态的概率与 $R(a, x)$（或 $\boldsymbol{R}$）从 a_1，a_2，…中选出最佳行动方案.

习题二

1. 某商店准备从南方采购一批西瓜，预测若天晴，则西瓜畅销，可获利20 000元；若天阴，则销路一般，可获利10 000元；若常下雨，则西瓜滞销，将亏损10 000元. 如果该商店改成从新疆采购一批哈蜜瓜，那么预测天晴、天阴、常下雨的获利金额分别为15 000元，10 000元，3 000元. 据天气预报，未来一段日子天晴、天阴、常下雨的概率分别是 0.5，0.2，0.3. 试写出最大可能法的四个具体步骤，从而决定该商店的最佳采购方案.

2. 某时装店为冬季备货，要决定向外地制造商定购若干件高档皮上衣，假定只能发一次定货单，且定购量不能少于 3 件，根据历年当地的销售情况，可以预测这种皮上衣需求量的概率分布如下：

需求量/件	3	4	5	6	7	8
概　率	0.1	0.2	0.3	0.25	0.1	0.05

这种皮上衣的成本为每件2 000元，售价为2 800元，但如果今冬卖不掉的话，只能削价处理，每件售价仅 500 元，可以全部卖完. 试求出这个问题的决策目标与损益矩阵，并用最大可能法帮助该时装店进行决策.

3. 某食品厂生产雪糕，每箱成本为 30 元，可获利 50 元. 若当天剩余一箱未卖出，将损失 30 元. 去年同期日销售量为 100 箱、120 箱、140 箱、160 箱的天数统计结果分别为 18 天、36 天、27 天、9 天. 试估算今年雪糕日销售量的概率分布，求出损益矩阵，并用最大可能法做风险型决策.

4. 某中学高一（1）班 50 名同学中 60%是女生，当地星期日有一场足球赛，已知 30%的女生和 70%的男生得到了足球赛门票. 高一（2）班的几名同学在做这样一个游戏：他们猜在校园中随意遇到的一名高一（1）班同学有没有足球票. 游戏规则是这样的：若该同学有足球票，猜对了得 10 分，猜错了扣 5 分；若该同学没有足球票，猜对了得 8 分，猜错了扣 5 分，高一（2）班的同学应如何做决策呢？

第三讲　期望值法

在风险型决策问题中，当决策目标确定后，可以考虑用离散型随机变量来描述面临的各个行动方案，通过计算期望求出决策目标的期望所得，然后比较这些期望值，得到最优期望值，相应的备选方案就是决策者应采纳的最佳行动方案．上述这种使用期望值准则的风险型决策方法称为期望值法．

例 3　（继续讨论第二讲中例 2）对例 2 的问题，投资方应如何使用期望值法进行风险型决策呢？

解：先不考虑建厂的投资，根据题意，写出两个基建方案的 10 年收益情况如表 3 所示．

表 3　两个方案的 10 年收益情况　单位：万元

方案 \ 状态	x_1：产品畅销	x_2：产品滞销	期望值
概率	0.7	0.3	
a_1：造大工厂	1 000	-200	640
a_2：造小工厂	400	200	340

设离散型随机变量 X_1，X_2 分别表示造大工厂和造小工厂投产 10 年的收益值，由表 3 容易得到 X_1，X_2 的概率分布列如下：

X_1	1 000	-200
P	0.7	0.3

X_2	400	200
P	0.7	0.3

算出它们的期望为

$E(X_1)=1\,000\times0.7+(-200)\times0.3=640$，

$E(X_2)=400\times0.7+200\times0.3=340$．

这两个值反映了投资方采纳不同基建方案时可望得到的收益值，通常称为收益的期望值或期望收益，可以把它们填在表 3 的最后一列中．

投资方采纳造大工厂方案的利润预测为

$E(X_1)-$造大工厂投资$=640-300=340$(万元)；

投资方采纳造小工厂方案的利润预测为

$E(X_2)-$造小工厂投资$=340-150=190$(万元)．

两者比较，应该认为造大工厂的基建方案对投资方更为有利，这一结果和用最大可能法（例 2）得到的结果是一致的．

例 4　某公司准备进口一种新产品，根据国内市场以往同类产品的销售情况，具有销路差、销路一般以及销路好三种销售状态，相应的概率分别是 0.4，0.55 以及 0.05．如果进口并投入市场，在三种销售状态下的相应结果是：亏 80 万元，盈 50 万元以及盈 200 万元．当然也可以不进口这种产品，这样公司既不亏损又不盈利．公司应如何使用期望值

法进行决策呢？

解：设离散型随机变量 X 表示进口这种产品并投入市场的收益值（单位：万元），由题意容易得到 X 的概率分布列如下：

X	-80	50	200
P	0.4	0.55	0.05

X 的期望为

$$E(X)=(-80)\times0.4+50\times0.55+200\times0.05=5.5(\text{万元}),$$

反映了销售这种新产品的期望收益．如果不进口这种产品，公司既不亏又不盈，期望收益应该为 0．两者相比，公司可以采纳进口并销售这种产品的方案．当然，做出这样的决策后，应该说面临的风险不小，因为有百分之四十的可能会亏损 80 万元．

这里需要特别指出，今后为了叙述起来方便，我们常常不再设离散型随机变量，而直接写成求各个备选方案损益的期望值，作为比较各方案优劣的基础，下面的例 5、例 6 就是这样做的．

例 5 长江沿岸的某市为了防止洪水对该市的袭击，决定整修一段防护堤．在设计方案时必须考虑不同程度的洪水对该堤的影响．根据当地有记录的洪水资料可得，一般洪水发生的可能性为 70%，它不会对防护堤起破坏作用；较大洪水发生的可能性为 25%，它会对防护堤造成轻微破坏；特大洪水发生的可能性为 5%，它能对防护堤造成严重破坏．工程技术人员经过反复研究，提出了三个可行方案：整修堤岸，增高并加固堤岸，修建混凝土防水墙．每个方案的实施所需费用（包括修建费用和洪水发生后所造成的损失）如表 4 所示．

表 4 三个防洪方案的费用情况 单位：千万元

状态 / 概率 / 方案	x_1：一般洪水	x_2：较大洪水	x_3：特大洪水	期望值
	0.70	0.25	0.05	
a_1：整修堤岸	30	40	50	33.5
a_2：增高并加固堤岸	35	38	42	36.1
a_3：修建混凝土防水墙	40	40	45	40.25

该市应如何使用期望值法进行决策呢？

解：由题意可知，该市的决策目标应该是所需费用最小．

由表 4 可得，方案 a_1（整修堤岸）所需费用的期望值为

$30\times0.70+40\times0.25+50\times0.05=33.5$(千万元)；

方案 a_2（增高并加固堤岸）所需费用的期望值为

$35\times0.70+38\times0.25+42\times0.05=36.1$(千万元)；

方案 a_3（修建混凝土防水墙）所需费用的期望值为

$40\times0.70+40\times0.25+45\times0.05=40.25$(千万元)．

本例的损益矩阵为

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}30 & 40 & 50\\35 & 38 & 42\\40 & 40 & 45\end{bmatrix}.$$

把计算结果填入表 4 的最后一列，经比较大小，容易看出，整修堤岸的方案所需期望费用 33.5 千万元最小，方案 a_1 应该作为最佳方案被采纳.

例 6　某工厂为了提高经济效益，决定研制具有现代化管理水平的经营管理信息系统. 根据以往资料分析，该系统用于预测市场行情占 50%，用于处理信息占 40%，还有 10%用于厂内人力资源的调配上. 现有两个方案可供选择，厂方请了专家对各方案的上述三方面的性能进行评估，专家打分情况（满分 100 分）如表 5 所示.

表 5　两个方案的专家打分情况　单位：分

方案＼状态	x_1：预测市场	x_2：处理信息	x_3：调配人力
a_1	80	60	100
a_2	50	100	70

试帮助厂方用期望值法决定最佳方案.

解：厂方的决策目标是专家评估的分数越高越好.

由表 5 可以写出损益矩阵

$$\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}80 & 60 & 100\\50 & 100 & 70\end{bmatrix}.$$

由题意，容易算出两个方案的专家打分期望值，以供厂方作比较用.

方案 a_1 的专家打分期望值为

$80\times50\%+60\times40\%+100\times10\%=74$（分）；

方案 a_2 的专家打分期望值为

$50\times50\%+100\times40\%+70\times10\%=72$（分）.

由于方案 a_1 的专家打分期望值 74 分高于方案 a_2 的专家打分期望值 72 分，厂方应采纳方案 a_1 建立经营管理信息系统.

最后归纳一下用期望值法进行风险型决策的步骤如下：

第一步　明确问题的决策目标；

第二步　确定未来状态 x_1，x_2，…及其概率，确定可供选择的各个方案 a_1，a_2，…；

第三步　确定损益函数 $R(a, x)$ 或损益矩阵 $\boldsymbol{R}$；

第四步　求出各个方案 a_1，a_2，…的损益期望值，根据决策目标求出最佳行动方案.

习题三

1. 盒子中装有 3 枚同样大小的硬币，其中 2 枚是普通硬币，另一枚是特制的，它的

两个面的图案都是币值．现从中任意取出 1 枚，先不观察，而判断它是普通硬币还是特制硬币．规定：如果所取硬币是普通的，而判断为普通的，可得 9 分；判断为特制的，扣 6 分．如果所取硬币是特制的，而判断为特制的，可得 15 分；判断错误则扣 12 分．希望得分越多越好．若用期望值法应作怎样的判断？（要求具体写出期望值法的四个步骤．）

2. 对习题二中的第 1 题，应用期望值法决定商店的最佳采购方案．

3. 某公司打算推出一种新设备，正在对该设备的销售前景作调查．公司可以采取出售设备图纸或自己制造两个经营方案，相应的收益列在下表中（单位：万元）：

状态 / 方案	x_1：新设备畅销	x_2：新设备滞销
a_1：出售图纸	20	10
a_2：自己制造	50	-25

现在该公司使用期望值法进行决策，试分别在下列两个预测市场前景下决定采纳哪一个可行方案．

(1) 畅销与滞销的可能性相同；

(2) 畅销的概率是滞销的两倍．

(假定未来的销售前景只有畅销和滞销两种状态．)

4. 对习题二中的第 4 题，试用期望值法帮助高一（2）班的同学做出最优决策．

第四讲　决策树

决策树因其图形呈树状而得名．它是这样画出来的（参看图 1）：先画一个方框作为出发点，称为决策点，从该点引出若干条直线称为方案枝，有几个可行方案，就画几条方案枝，各方案枝的末端的小圆圈称为状态点．从状态点再引出若干条直线……称为概率枝，上面标出每个未来状态发生的概率．概率枝的末端用来记相应的损益函数值．

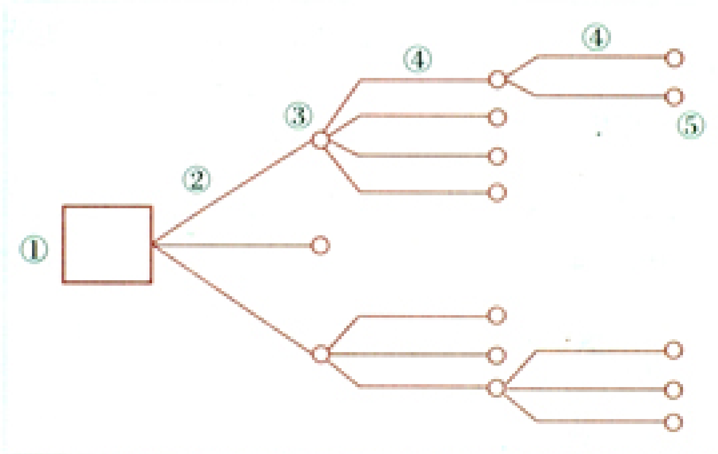


图 1　决策树

①决策点　②方案枝　③状态点　④概率枝　⑤概率枝末端

下面通过例子来进一步说明决策树的画法和怎样应用决策树做风险型决策．

例 7　王华家去科学会堂有两条公共汽车路线，坐 1 路车路线较长，堵车的可能性为 20%；坐 2 路车路线较短，堵车的可能性为 60%．星期六早上他出门晚了点，听讲座可能迟到的时间如表 6 所示．王华到公共汽车站时正好 1 路车和 2 路车同时进站，问他应该坐哪一路公共汽车去科学会堂呢？

表 6　王华迟到的时间　单位：min

方案＼状态	x_1：通畅	x_2：堵车
a_1：坐 1 路车	10	30
a_2：坐 2 路车	0	20

解：注意到坐 1 路车通畅的概率等于 $1-20\%=80\%$，坐 2 路车通畅的概率等于 $1-60\%=40\%$，根据问题给出的信息，可以画出决策树如图 2 所示．

画好决策树，就可以进行风险型决策了．分别计算方案 a_1，a_2 的迟到时间期望值：

a_1 期望值：$10\times80\%+30\times20\%=14$，

a_2 期望值：$0\times40\%+20\times60\%=12$．

把上述期望值标在方案枝末端的状态点上，如图 3 所示．

本例的决策目标应该是迟到时间越少越好，两个备选方案一比较，方案 a_2 的迟到时间期望值小一些，它是较好的方案．也就是说，王华应该坐 2 路公共汽车去科学会堂．

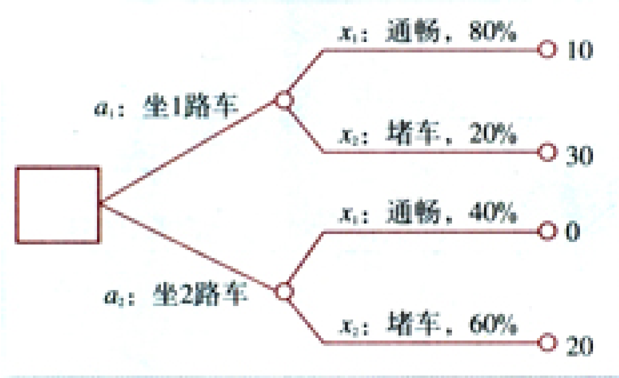


图 2 例 7 的决策树

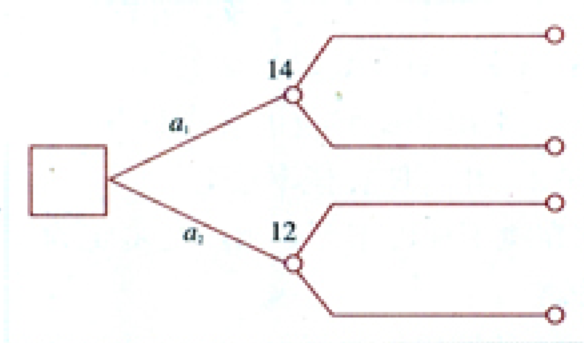


图 3 决策树上期望值的位置

根据上面的分析，可把方案 a_2 的期望值写在决策点旁，并“剪去”方案枝 a_1，得到最后的决策树如图 4 所示. 图 4 可以清楚地表明：选择方案 a_2 较好.

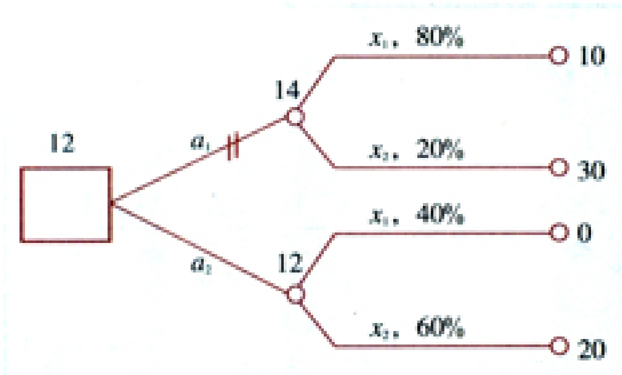


图 4 例 7 最后的决策树

例 8 有一位男青年因突发意外事故而发生开放性趾骨骨折，获救时伤口已严重感染，虽然给予抗生素治疗并进行了紧急处理，但感染仍未得到有效控制，如感染进一步发展，可能影响患者整个下肢甚至危及生命. 结合临床经验和查阅文献资料，在这种情况下用大剂量静脉抗生素进行保守治疗，其痊愈的可能性为 60%，但有 35%的可能是膝关节以上部位的截肢，另有 5%的可能会死亡. 如果立即实施踝关节截肢手术，则不会引起其他并发症或死亡. 假定把痊愈及死亡的损益函数值分别定为 1 与 0，那么膝关节以上截肢与踝关节截肢的损益函数值分别为 0.5 与 0.65. 此时，临床医生应该如何决策较好？

解：是采用保守治疗争取保全患者肢体，还是实施踝关节截肢手术确保患者生命安全，是临床医生面临的风险型决策问题，根据例 8 中给出的数据，可以画出如图 5 所示的决策树.

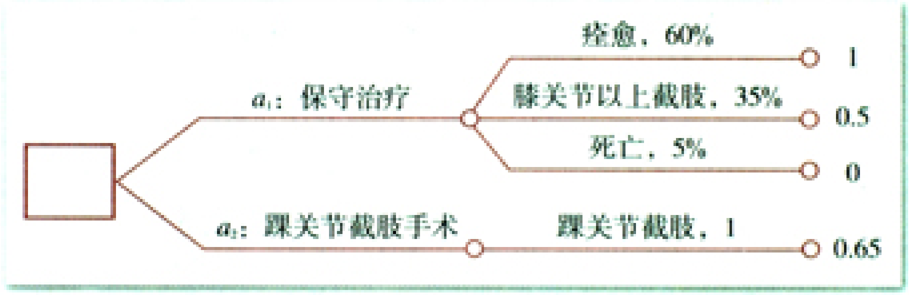


图 5　例 8 的决策树

决策点引出的方案枝有两条，一条是方案 a_1：保守治疗，另一条是方案 a_2：实施踝关节截肢手术.

从 a_1 方案枝末端的状态点引出了三条概率枝，分别表示状态“痊愈”、“膝关节以上截肢”以及“死亡”，相应的概率为 60%，35%，5%，都已标明在概率枝上.

从 a_2 方案枝末端的状态点引出的概率枝可看作只有一条，表示只有惟一一种未来状态“踝关节截肢”，其概率是 1，也标明在概率枝上.

各个损益函数值都标明在概率枝的末端，由于痊愈定为 1，死亡定为 0，所以本例的决策目标是期望值越大越好.

下面分别计算方案 a_1，a_2 的期望值如下：

a_1 期望值：$1\times60\%+0.5\times35\%+0\times5\%=0.775$，

a_2 期望值：$0.65\times1=0.65$.

因为 $0.775>0.65$，所以应该提示临床医生：对患者采用保守治疗的方案要好一些.

把 0.775，0.65 分别标在相应的状态点上，标上“剪去”方案枝 a_2 的记号，再把 0.775 标在决策点上，最后得到的决策树如图 6 所示.

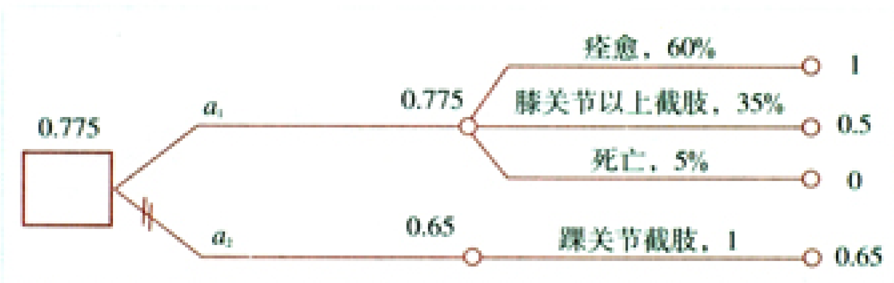


图 6　例 8 最后的决策树

从图 6 不难看出，决策“保守治疗”是冒着可能死亡的风险的，但死亡的概率 5%比痊愈的概率 60%小得多，也就是说，患者痊愈的希望很大. 当然，这些情况临床医生是需要向患者交代清楚的.

上述计算期望值的方法可以直接针对图 5 所示的决策树进行，具体做法如下：

由决策树的概率枝末端出发，从上至下，自右向左地进行分析、计算，一直到达最左面的决策点，这种做法可以形象地称为反推决策树法.

居于上面的 a_1 方案枝状态点引出了三条概率枝，只要把每条概率枝末端所标数字分别乘以相应概率枝所标数字，然后相加，就得到了该状态点的期望值：

$$1\times60\%+0.5\times35\%+0\times5\%=0.775,$$

并且把 0.775 标在该状态点旁.

居于下面的 a_2 方案枝状态点只引出一条概率枝，其末端所标数字乘以概率枝上所标数字就是该状态点的期望值：

$$0.65\times1=0.65,$$

把它标在该状态点旁.

画出最后得到的决策树自然就是图 6 中的决策树. 如果所讨论的问题比较复杂，应用反推决策树法会显得很简便.

例 7 和例 8 表明，用决策树表示风险型决策问题，非常直观，实际上是期望值法的图解形式.

使用决策树来分析问题，可以随时“剪去”不是最优方案的方案枝，发现新情况时也可以随时添加新的分枝，非常方便.

例 9 某开发公司有资金 100 万元，打算在 3 个项目中选择一个做投资. 估计一年后盈亏数据如表 7 所示：

表 7 公司投资的盈亏情况

项目	投资数（万元）	获利		亏损	
		数量（万元）	概率	数量（万元）	概率
机械	82	20	0.6	10	0.4
化工	68	18	0.5	9	0.5
装修	73	19	0.6	4	0.4

将未作投资的资金存入银行，年利率为 2%，试用反推决策树法确定最优方案.

解：题目给出了下列三个可行方案：

a_1：投资机械项目；a_2：投资化工项目；a_3：投资装修项目.

对方案 a_1 来说，需要投资 82 万元，余下资金 18 万元（即 100 万元－82 万元）可以存入银行，一年后可得利息

$$18\times2\%=0.36\ (\text{万元}).$$

对方案 a_2 来说，可以类似地算出一年后可得利息

$$(100-68)\times2\%=0.64\ (\text{万元}).$$

方案 a_3 于一年后可得利息

$$(100-73)\times2\%=0.54\ (\text{万元}).$$

于是，可以画出题目的决策树如图 7 所示，为了使下面的文句简洁些，我们给决策点、状态点编了号.

用反推决策树法求解.

点②的期望值是

$$20\times0.6+(-10)\times0.4=8,$$

把它标在点②旁.

点③的期望值是

$$18\times0.5+(-9)\times0.5=4.5,$$

把它标在点③旁.

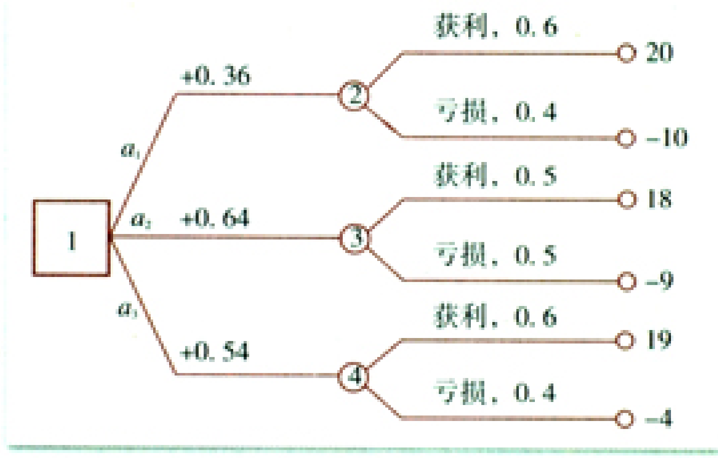


图 7　例 9 的决策树

点④的期望值是

$$19\times0.6+(-4)\times0.4=9.8,$$

把它标在点④旁.

各个可行方案还要加上各自的利息收入，由图 7 易得

a_1：$8+0.36=8.36$（万元）；

a_2：$4.5+0.64=5.14$（万元）；

a_3：$9.8+0.54=10.34$（万元）.

三者比较，显然获利越多越好，开发公司应把向装修项目投资作为最佳方案.

把方案 a_3 的期望收益 10.34 标在决策点$\boxed{1}$旁，再“剪去”方案枝 a_1，a_2，整个决策过程及其相关数据都可以体现在图 8 的决策树上.

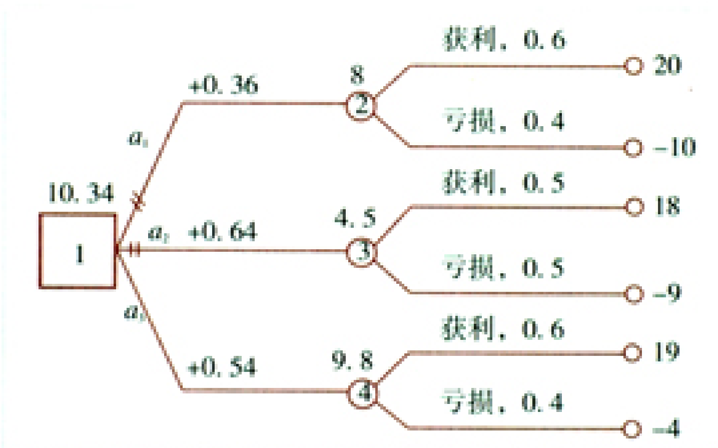


图 8　例 9 最后的决策树

例 10　某地的农业银行对每笔 5 000 元的借款申请有三种处理方法：

① 不检查信用，立即按申请办理；

② 在草率地检查信用后，同意或不同意申请；

③ 在广泛地调查信用后，同意或不同意申请.

下面是与问题有关的数据：

② 的信用检查费 10 元；

③ 的信用调查费 200 元.

付还借款的利息收入 1 000 元；

不付还借款的损失 5 000 元（假定所有借款只有不付还和全部还清两种情况）.

农行以前的营业资料表明 80%的借款可以付还.

经草率检查为“信用好”的申请人占$\frac{6}{7}$，付还借款的概率是 0.9；

经草率检查为“信用差”的申请人占$\frac{1}{7}$，付还借款的概率是 0.2.

经广泛调查为“信用好”的申请人占$\frac{4}{5}$，付还借款的概率是 1；

经广泛调查为“信用差”的申请人占$\frac{1}{5}$，付还借款的概率是 0.

试用决策树帮助农行决定使用哪种处理方法.

解：问题明确提出了三个可行方案 a_1，a_2，a_3. a_1：不检查申请人信用；a_2：草率检查申请人信用；a_3：广泛调查申请人信用.

由于问题较复杂，用图 9 所示的决策树来整理已知的众多信息.

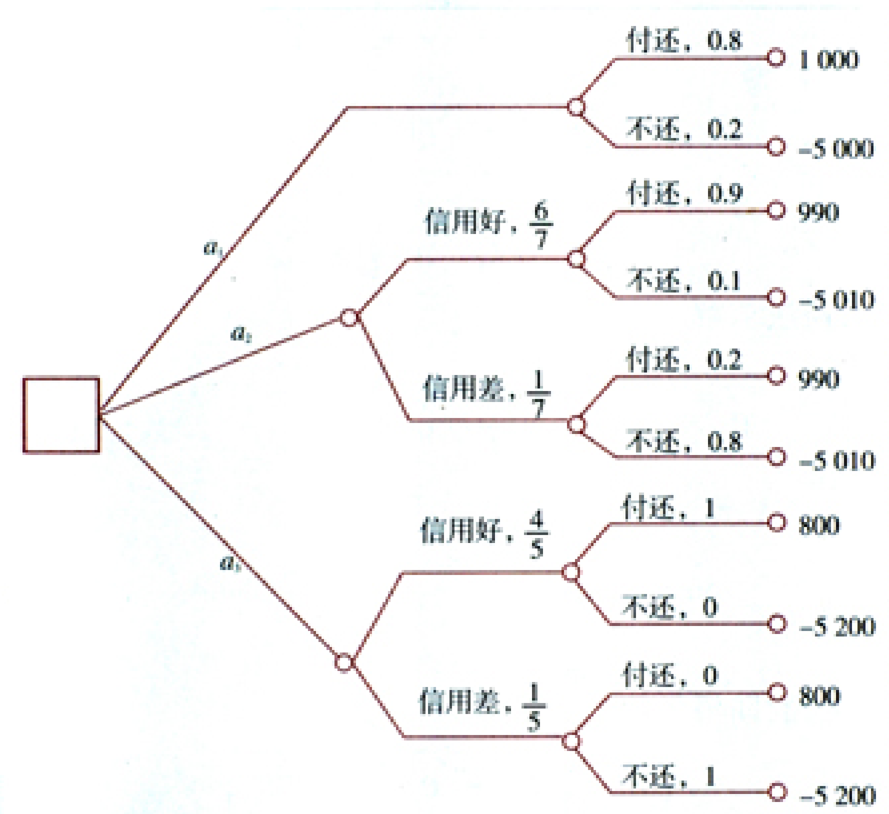


图 9　例 10 的决策树

决策树表明，从 a_1 方案枝出发，由于不检查申请人的信用，所以不作“信用好”、“信用差”的分枝，而直接引向“付还”、“不付还”的概率枝.

对于 a_2 方案枝，由于花费了信用检查费 10 元，所以损益函数值相应要减去 10.

同理，对于 a_3 方案枝，由于花费了信用调查费 200 元，所以损益函数值相应要减去 200.

接下来就可以利用决策树一步一步地解决这个风险型决策问题了.

分析决策树中“信用差”的概率枝，可以看出，这种人不还款的概率或者是 0.8，或者是 1，农行若借款给他们承担的风险太大，合理的决策是不同意申请，按理说应把相应

的概率枝“剪去”，但由于这时农行已花费了检查费或调查费，所以合并“信用差”的两条概率分枝，损益函数值即相应的检查费或调查费，最后画出变化了的决策树如图10所示，图中的决策点、状态点等已编了号.

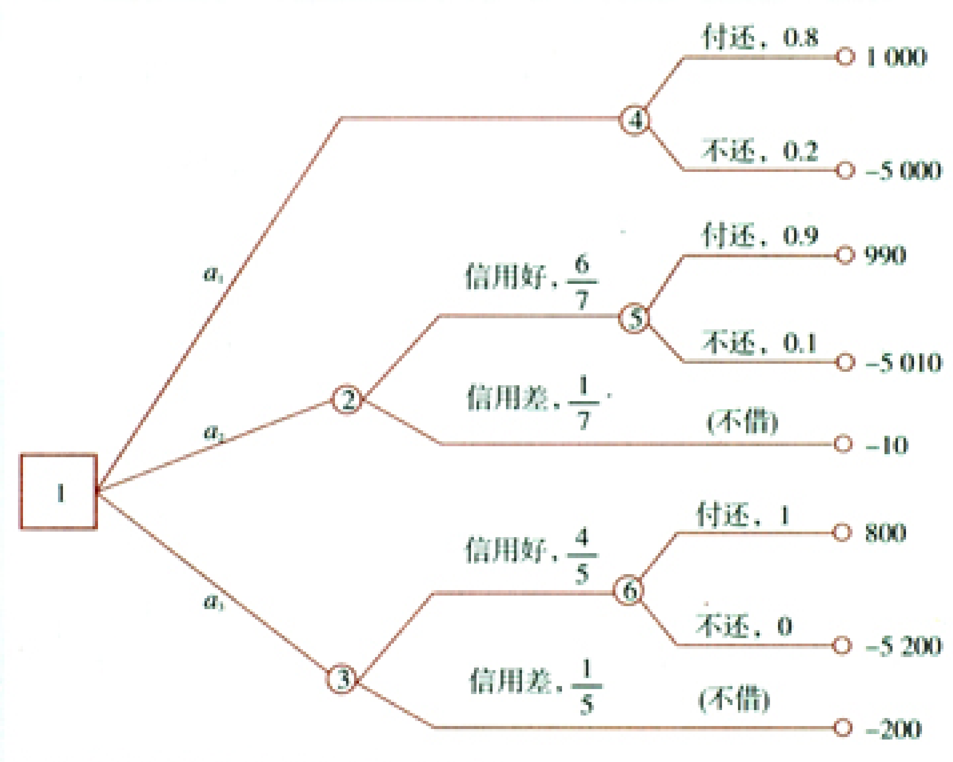


图10　例10变化了的决策树

现在用反推决策树法求解.

点④的期望值是

$$1\,000\times0.8+(-5\,000)\times0.2=-200,$$

把它标在点④旁.

点⑤的期望值是

$$990\times0.9+(-5\,010)\times0.1=390,$$

把它标在点⑤旁.

于是可以算出点②的期望值是

$$390\times\frac{6}{7}+(-10)\times\frac{1}{7}\approx333,$$

把它标在点②旁.

点⑥的期望值是

$$800\times1+(-5\,200)\times0=800,$$

把它标在点⑥旁.

于是可以算出点③的期望值是

$$800\times\frac{4}{5}+(-200)\times\frac{1}{5}=600,$$

把它标在点③旁.

决策目标显然是期望收益越大越好，比较点④、点②与点③的期望值，应采纳方案a_3，即广泛地调查借款申请人的信用，如申请人的信用好，就同意申请；如申请人的信用

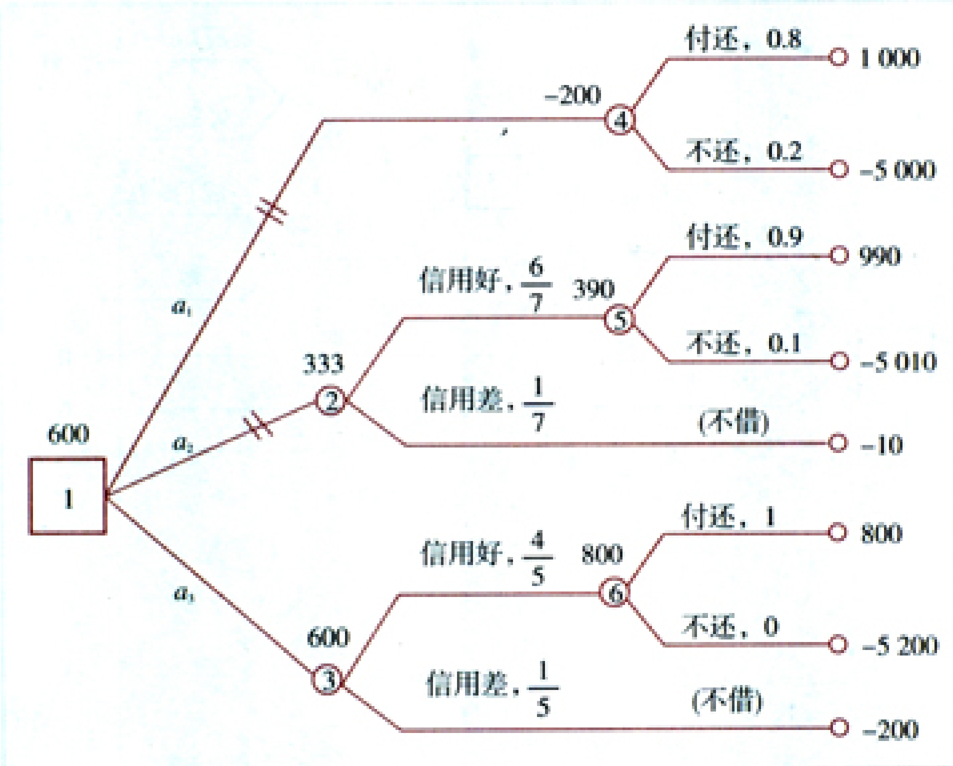


图 11 例 10 最后的决策树

差，则不同意申请．

最后可把上述计算结果和决策过程标明在图 11 的决策树上．

例 11 某开发公司拟为一企业承包新产品的研制与开发任务，但为得到合同必须参加投标．已知投标的准备费用为 4 万元，中标的可能性是 40%．如果不中标，准备费用得不到补偿．如果中标，可采用两种方法进行研制开发：方法 1 成功的可能性为 80%，费用为 26 万元；方法 2 成功的可能性为 50%，费用为 16 万元．如果研制开发成功，该开发公司可得到 60 万元；如果合同中标，但未研制开发成功，则开发公司需赔偿 10 万元．现要作出决策：

（1）是否参加投标；

（2）若中标了，采用哪种方法研制开发．

解：本题有两个可行方案 a_1 与 a_2．a_1：投标；a_2：不投标．如果投标中标，又有两个可行方案：用方法 1 或方法 2 研制开发新产品．

这是个多级决策问题，可以画出决策树如图 12 所示．由于问题比较复杂，为了便于分析，我们给决策点、状态点编上号，损益函数值的单位是万元．

现在用反推决策树的方法分析问题，即从上至下，自右向左一步步地计算期望值，比较期望值的大小……直至最后找出最优方案．

点④的期望值：$60\times0.8+(-10)\times0.2=46$，把它标在点④旁．

点⑤的期望值：$60\times0.5+(-10)\times0.5=25$，把它标在点⑤旁．

收益越大越好，方法 1 的期望收益为：$46-26=20$（万元），方法 2 的期望收益为：$25-16=9$（万元），故对决策点 $\boxed{3}$ 作出决策：选择方法 1，这时可在点 $\boxed{3}$ 旁标上相应数字，并“剪去”方法 2．

现在问题已简化为“单级”决策问题了．由于点②引出两条概率枝，所以容易算出点

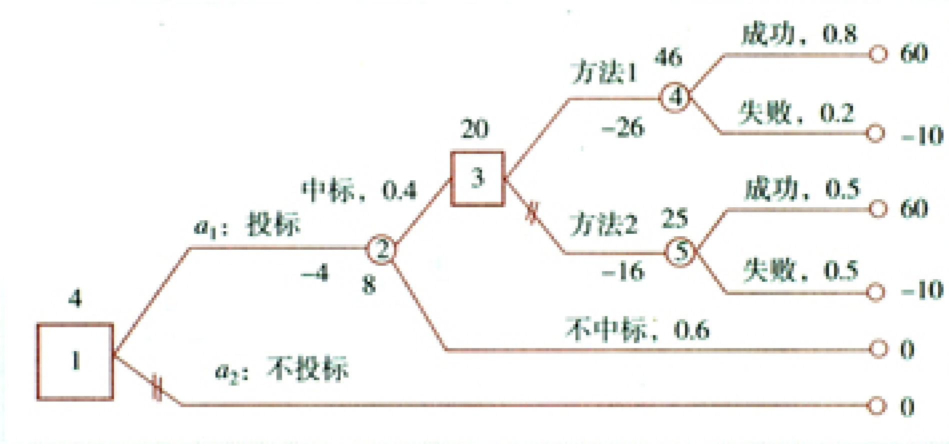


图 12 例 11 的决策树

②的期望值是

$$20\times 0.4+0\times 0.6=8.$$

把 8 标在点②旁，从而，

a_1 的期望值：$8-4=4$，

a_2 的期望值：0.

显然应选择方案 a_1，此时，可把 4 标在点$\boxed{1}$旁，并“剪去”方案 a_2.

经过对决策树的分析、计算，应该采取的风险型决策是参加投标，若中标，则采用方法 1 研制开发新产品，期望收益为 4 万元.

本例的解法表明：尽管多级决策问题比较复杂，但只要对决策树应用反推决策树法，解决问题的思路清楚，计算不易出错，就能圆满地完成风险型决策工作.

习题四

1. 画出第三讲中例 5 的决策树，并把有关的计算结果和可行方案的取舍情况标在决策树上.

2. 某企业在投产一种新产品前，经过市场调查，预测产品在今后五年中销路好的概率为 0.3，销路一般的概率为 0.5，销路差的概率为 0.2，现在该企业有两个可行方案，即新建车间或扩建原有车间，前者需投资 15 万元，后者需投资 3 万元，预测年收益值如下表所示（单位：万元）：

状态 方案	销路好	销路一般	销路差
新建车间	50	25	−5
扩建车间	35	20	5

试用决策树进行风险型决策分析.

3. 假定有外表完全相同的 10 盒围棋棋子，其中 7 盒装白子，3 盒装黑子. 现随意取出一盒，请你猜里面棋子的颜色. 若猜白子而猜对，得 500 分，猜错则罚 200 分；

若猜黑子而猜对，得 1 000 分，猜错则罚 150 分. 为使得分最多，试应用决策树从“猜白”与“猜黑”两个方案中选出较好的一个方案.

4. 某企业欲开发一种新产品，对未来十年的销售情况分两个阶段做出预测. 预测前三年和后七年销路都好的概率是 0.5，前三年销路好、后七年销路差的概率是 0.3，前三年和后七年销路都差的概率是 0.2，在前三年销路差的情况下后七年销路不会好. 现有三个可行方案可供选择：方案 a_1 是新建三个车间投产，方案 a_2 是新建两个车间投产，方案 a_3 是先新建一个车间投产，如果前三年销路好，考虑是否再新建两个车间. 投资费用和年收益值如下表所示（单位：万元），试用决策树进行风险型决策分析.

方案	投资额		年收益值			
	当前	三年后	前三年		后七年	
			销路好	销路差	销路好	销路差
a_1	300	0	100	−30	100	−30
a_2	200	0	60	20	60	20
a_3	100	扩建：250	30	30	100	−30
		不扩建：0	30	30	30	30

5. 画出习题一中第 2 题的决策树，并把有关的计算结果和可行方案的取舍情况标在决策树上.

第五讲　灵敏度分析

在做风险型决策时，每个可行方案期望损益值的计算都与未来状态出现的概率有关，而这些概率在很多情况下是预测或估算出来的，并不一定准确．于是，就产生这样一个问题：当未来状态的概率有所变化时，会不会影响最优方案的选择？对这个问题的分析称为灵敏度分析，本讲只讨论一些较简单的风险型决策问题的灵敏度分析，下面举两个例子．

例 12　某公司想加快一项工程的建造速度，就向施工队征求是否愿意承包，如果施工队决定承包余下工程，承包后天气好，可以一个月内完工，将获得利润 50 万元．但如果承包后天气坏，不能如期完工，则将付出赔偿 10 万元．假如不承包，遇上天气好，工程进度快，可获利 20 万元；遇上天气坏，工程进度慢，也可获利 10 万元．现根据气象资料，未来一个月天气好的概率是 0.2，天气坏的概率是 0.8，试用期望值法选择最佳方案，并进行灵敏度分析．

解：决策目标是获利越多越好．设方案 a_1：承包，方案 a_2：不承包．画决策树（图 13）来做风险型决策．

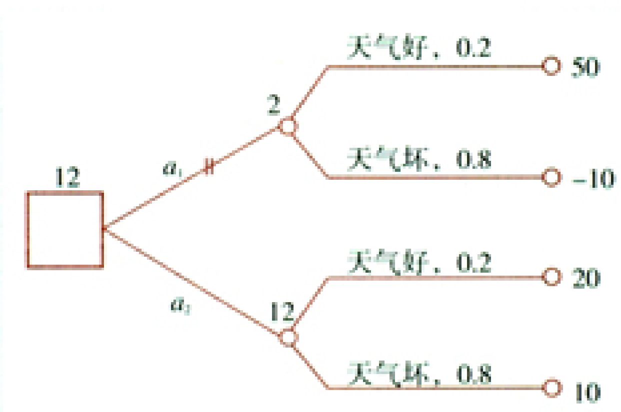


图 13　P（天气好）$=0.2$ 时的决策树

由图 13 可得

a_1 期望值：$50\times0.2+(-10)\times0.8=2$，

a_2 期望值：$20\times0.2+10\times0.8=12$．

不承包可望获利 12 万元，超过承包期望利润 2 万元，应选不承包为最佳方案．

现在假定天气好的概率由 0.2 变为 0.3，又该如何决策呢？

由图 14 经过类似计算可得，不承包可望获利 13 万元，超过承包期望利润 8 万元，仍应选不承包为最佳方案．

进一步问，当天气好的概率增加到 0.5 时，情况怎样？

由图 15 经过类似计算可得，不承包可望获利 15 万元，已经低于承包期望利润 20 万元，最佳方案应该是承包该项工程．

由以上分析，自然会联想到，未来状态的概率取的很多数值中，有一个所谓的“转折概率”，只有当未来状态的概率小于（或大于）其值时，某一方案是最佳决策．但当未来

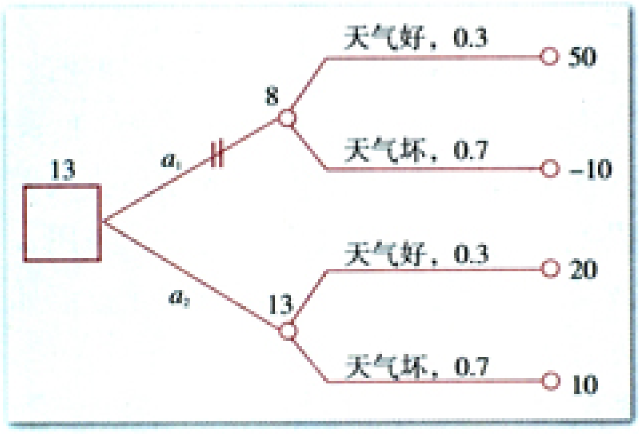


图 14　P（天气好）$=0.3$ 时的决策树

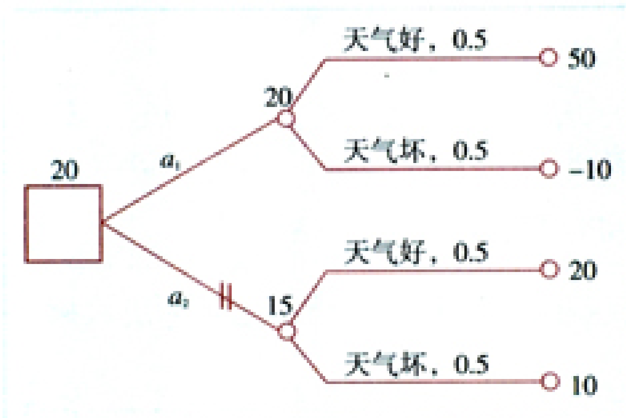


图 15　P（天气好）$=0.5$ 时的决策树

状态的概率变化“越过”此值时，这个方案就不是最佳决策了.

下面求例 12 的转折概率 p，即 P（天气好）$=p$，画出决策树如图 16 所示. 由转折概率的含义易知，当“天气好”的概率等于 p 时（此时，“天气坏”的概率是 $1-p$）算出的两个方案的期望收益应该相等.

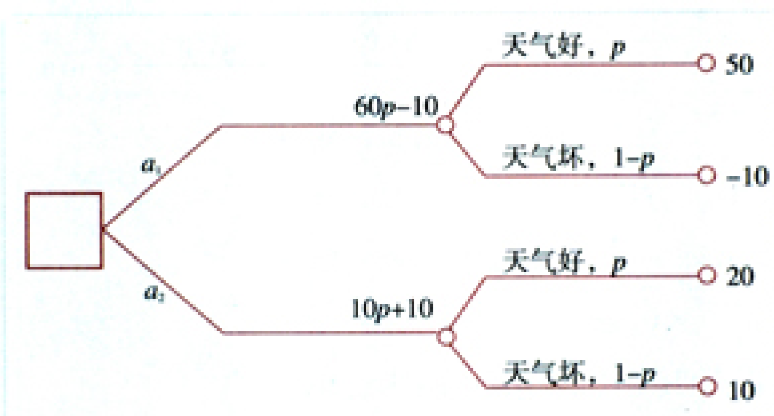


图 16　P（天气好）$=p$ 时的决策树

令方案 a_1、方案 a_2 的期望值相等，可得

$$50p-10(1-p)=20p+10(1-p),$$

即

$$60p-10=10p+10,$$

化简得

$$50p=20,$$

$$p=0.4.$$

前面我们已经知道，P（天气好）$=0.5$ 时承包是最佳方案，所以最后的结论为：当“天气好”的概率大于转折概率 0.4 时承包工程是最佳方案，当“天气好”的概率

小于转折概率 0.4 时不承包工程是最佳方案.

例 13 某市人民医院急需对住院部进行改造，但对如何改造存在两个方案：方案 a_1 是以中低标准病房为主，方案 a_2 是以高标准病房为主. 到底采用哪个方案，实际上取决于不同档次收入的就诊病人比例结构. 如果就诊病人以高收入者为主，采用 a_1，可能导致就诊病人流失；相反，如果就诊病人以中低收入者为主，采用 a_2，也可能导致就诊病人流失，从而影响医院的经济效益. 各种情况下估算出来的收益值如表 8 所示，试用期望值法选择最佳方案并进行灵敏度分析.

表 8 两个方案的年度收益情况 单位：万元

方案 \ 状态	病人以中低收入者为主	病人以高收入者为主
概率	0.7	0.3
a_1：以中低标准病房为主	5 000	-2 000
a_2：以高标准病房为主	-1 500	10 000

解：决策目标是期望收益越大越好，先画出问题的决策树如图 17 所示.

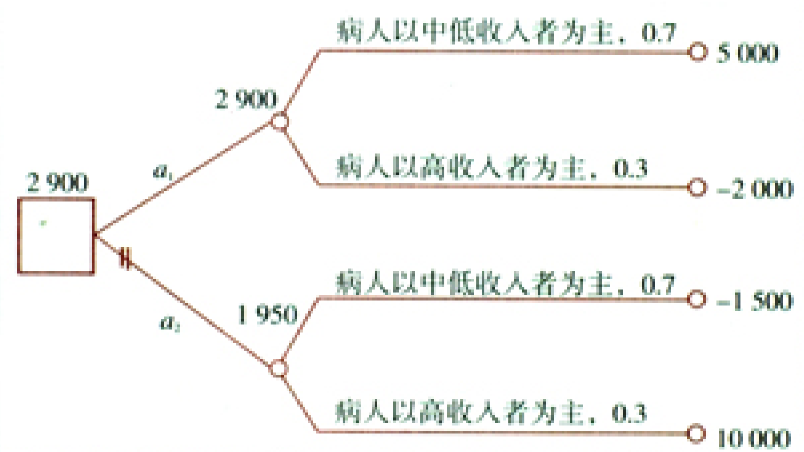


图 17 例 13 的决策树

应用期望值法选择最佳方案.

a_1 期望值：$5\ 000\times0.7+(-2\ 000)\times0.3=2\ 900$，

a_2 期望值：$(-1\ 500)\times0.7+10\ 000\times0.3=1\ 950$.

最佳方案是 a_1，即采纳以中低标准病房为主的方案.

下面进行灵敏度分析，为此需要求转折概率. 设

$$P(\text{病人以中低收入者为主})=p,$$

就有

$$P(\text{病人以高收入者为主})=1-p,$$

令方案 a_1 和方案 a_2 的期望值相等：

$$5\ 000p+(-2\ 000)(1-p)$$
$$=-1\ 500p+10\ 000(1-p),$$

化简得

$$18\ 500p=12\ 000,$$
$$p\approx 0.65.$$

由前面的解法知道，当病人以中低收入者为主的概率是 0.7 时最佳方案为 a_1，所以本例最后的结论是：

当以中低收入者为主的病人就诊的概率大于 0.65 时，以中低标准病房为主的改造方案是最佳方案. 如由于种种原因，该市未来几年的经济快速增长，高收入的人群明显变大，若预测中低收入者为主的病人就诊的概率小于 0.65 时，以高标准病房为主的改造方案是最佳方案.

习题五

1. 对习题三中的第 3 题进行灵敏度分析.
2. 对习题四中的第 3 题进行灵敏度分析.
3. 某公司欲购进一种新产品，有两种可供选择的方案，即大批量购进和小批量购进. 在未来市场畅销或滞销情况下推销产品的获利数如下表所示（单位：万元）：

状态 / 方案	畅　销	滞　销
a_1：大批量购进	580	−80
a_2：小批量购进	300	−10

现公司预测该产品未来畅销的概率为 $\frac{1}{4}$，试用期望值法选择最佳方案，所求出的最佳方案是否稳定？

*第六讲　马尔可夫型决策

在本讲中，我们先通过例 14 引入一步转移概率等知识，然后用例 15 和例 16 讨论马尔可夫型决策问题.

例 14　某地区开设了两家超市 A 与 B. 经调查，目前超市 A 吸引着 10 000 名顾客，超市 B 只有 2000 名. 另一方面，调查还显示超市 A 的 20%顾客在下个月流向超市 B，超市 B 仅有 10%顾客流向超市 A. 假定这种趋势保持下去，试问一个月、两个月后这两家超市的顾客数分别是多少？

解：用 m_1，n_1 分别记一个月后超市 A，B 的顾客数，于是 m_1 中有一部分是目前就在超市 A 购物的顾客. 由题意，这部分顾客的人数是

$$10\ 000\times(1-20\%)=10\ 000\times 80\%.$$

m_1 中另一部分是目前在超市 B 购物的顾客，一个月后流向了超市 A，由题意，这部分顾客的人数是

$$2\ 000\times 10\%.$$

m_1 就是上述两部分顾客人数的和，即

$$m_1=10\ 000\times 80\%+2\ 000\times 10\%.$$

同理，n_1 中的一部分是目前在超市 A 购物的顾客，他们一个月后流向了超市 B，他们的人数是

$$10\ 000\times 20\%.$$

n_1 中另一部分是目前就在超市 B 购物的顾客，他们的人数是

$$2\ 000\times(1-10\%)=2\ 000\times 90\%.$$

所以

$$n_1=10\ 000\times 20\%+2\ 000\times 90\%.$$

用向量和矩阵的乘法表示上述结果，形式上非常简洁，也便于以后作进一步讨论：

$$\begin{aligned}(m_1\quad n_1)&=(10\ 000\quad 2\ 000)\begin{bmatrix}80\% & 20\%\\ 10\% & 90\%\end{bmatrix}\\ &=(10\ 000\times 80\%+2\ 000\times 10\%\quad 10\ 000\times 20\%+2\ 000\times 90\%)\\ &=(8\ 200\quad 3\ 800).\end{aligned}$$

用 m_2，n_2 分别记两个月后超市 A，B 的顾客数，经过类似的分析，有

$$\begin{aligned}(m_2\quad n_2)&=(m_1\quad n_1)\begin{bmatrix}80\% & 20\%\\ 10\% & 90\%\end{bmatrix}\\ &=(8\ 200\quad 3\ 800)\begin{bmatrix}80\% & 20\%\\ 10\% & 90\%\end{bmatrix}\\ &=(8\ 200\times 80\%+3\ 800\times 10\%\quad 8\ 200\times 20\%+3\ 800\times 90\%)\\ &=(6\ 940\quad 5\ 060).\end{aligned}$$

由以上的分析和计算，问题的答案是，在一个月后超市 A，B 的顾客数分别是 8 200，3 800；在两个月后超市 A，B 的顾客数分别是 6 940，5 060.

为了下面讨论问题方便，需要用概率的思想方法来总结这些推理过程，并引进几个有用的术语.

该地区的 12 000 名顾客在每个月可能去超市 A 或超市 B 购物，我们把这种情况称为顾客处于状态 1 或状态 2，顾客所能取的一切状态的集合称为状态空间，记作 I，本例的顾客只有两个状态可取，所以

$$I=\{1,\ 2\}.$$

这里用 1，2 来标记不同的状态是为了讨论一步转移概率方便，当然也可以把超市与状态用同一英文字母表示，如处于状态 A 表示顾客去超市 A，处于状态 B 表示顾客去超市 B，等等.

把顾客在两个状态（即两个超市）间流动的百分比看成概率，我们用概率

$$p_{ij}\,(i=1,\ 2;\ j=1,\ 2)$$

来描述顾客的流动趋向，p_{ij} 表示顾客本月在状态 i，下个月在状态 j 的概率，称为一步转移概率.

于是，$p_{11}=80\%$ 表示顾客本月在状态 1（超市 A），下个月在状态 1（超市 A）的概率是 0.8；$p_{21}=10\%$ 表示顾客本月在状态 2（超市 B），下个月在状态 1（超市 A）的概率是 0.1；等等.

以一步转移概率为元，按下面这种方式排列的矩阵称为一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$：

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}.$$

注意一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的每一行的元加起来正好等于 1，意味着顾客要么去超市 A，要么去超市 B，没有其他超市可去.

题目所谓的“假定这种趋势保持下去”就是指一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 既可以反映顾客本月到下个月的移动趋向，可以反映顾客下个月到再下个月的移动趋向……也可以反映顾客在第 5 个月到第 6 个月的移动趋向等.

经过上面的讨论，有

$$\begin{aligned}(m_1\quad n_1)&=(10\ 000\quad 2\ 000)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}\\ &=(10\ 000\quad 2\ 000)\boldsymbol{P},\\ (m_2\quad n_2)&=(m_1\quad n_1)\begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}\\ &=(m_1\quad n_1)\boldsymbol{P}\\ &=(10\ 000\quad 2\ 000)\boldsymbol{P}^2.\end{aligned}$$

更进一步，可以推出顾客在 i 个月后的分布情况．若记顾客在 i 个月后处于两个状态的人数分布为

$$(m_i\quad n_i),$$

就有

$$(m_i \quad n_i)=(10\ 000 \quad 2\ 000)\boldsymbol{P}^i.$$

于是，我们把握了顾客任何时候在两个超市的人数分布情况，便于讨论与之有关的问题.

例 15　（继续讨论例 14）某投资公司有兴趣在两家超市之一投资，经调查，目前超市 A 吸引着10 000名顾客，超市 B 只有2 000名．另一方面，调查还显示超市 A 的 20%顾客在下个月流向超市 B，超市 B 仅有 10%的顾客流向超市 A．假定这种趋势保持下去，我们对投资公司的投资能给予什么忠告呢？

解：设超市 A 为状态 1，超市 B 为状态 2．本例的状态空间

$$I=\{1,\ 2\}.$$

根据例 14 的讨论，一步转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}.$$

在 i 个月后处于 1，2 这两个状态的顾客数分布为

$$(m_i \quad n_i)=(10\ 000 \quad 2\ 000)\boldsymbol{P}^i.$$

经计算，可得下面的结果：

i	A 的顾客数	B 的顾客数
0	10 000	2 000
1	8 200	3 800
2	6 940	5 060
3	6 058	5 942
5	5 008	6 992
12	4 083	7 917
20	4 005	7 995
24	4 001	7 999

由此可见，这一分布“运行”的效果非常快，大约 3 个月后，B 的顾客数将赶上 A．5 个月后，B 的顾客数与 A 的顾客数之比接近 7∶5，并且还在不断增加，但增速不断减缓．所以我们应该建议投资公司向超市 B 投资.

像例 15 那样挑选最佳可行方案的方法称为马尔可夫型决策.

下面讨论状态分布的稳定性问题，在例 15 中我们继续计算两年后的 A、B 的顾客数，为便于发现规律，我们把顾客数精确到小数点后一位.

i	A 的顾客数	B 的顾客数
25	4 000.8	7 999.2
26	4 000.6	7 999.4
30	4 000.1	7 999.9

观察这些数据，可以发现，A 的顾客数可能“稳定”在 4 000 名，B 的顾客数可能“稳定”在 8 000 名.

如果目前任选一名顾客，他去哪个超市购物？由题意可知他去超市 A 的概率是

$$\frac{10\ 000}{10\ 000+2\ 000}=\frac{10\ 000}{12\ 000}=\frac{5}{6},$$

他去超市 B 的概率是 $1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$. 这就是说，顾客的初始分布（这里是指概率意义上的分布）

$$\boldsymbol{p}_0=\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

运用数乘矩阵的知识（这里是数乘向量），不难看出目前顾客数的分布

$$\begin{aligned}(10\ 000\quad 2\ 000)&=12\ 000\begin{pmatrix}\frac{5}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}\\&=\text{顾客总数}\times\boldsymbol{p}_0.\end{aligned}$$

现在的问题是，若干个月后，顾客数的概率分布变化有无规律可循？

若设 i 个月，$i+1$ 个月后顾客数的概率分布分别为 $\boldsymbol{p}_i$，$\boldsymbol{p}_{i+1}$，有

$$(m_i\quad n_i)=12\ 000\boldsymbol{p}_i,$$

$$(m_{i+1}\quad n_{i+1})=12\ 000\boldsymbol{p}_{i+1}.$$

由例 14 的解，

$$(m_{i+1}\quad n_{i+1})=(m_i\quad n_i)\boldsymbol{P}=12\ 000\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{P},$$

所以

$$12\ 000\boldsymbol{p}_{i+1}=12\ 000\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{P},$$

最后得到

$$\boldsymbol{p}_{i+1}=\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{P}.$$

上式反映了相邻两月顾客数概率分布之间的关系，它为讨论状态分布的稳定性打下了基础.

由于超市 A，B 顾客人数可能分别稳定在 4 000，8 000，而

$$(4\ 000\quad 8\ 000)=12\ 000\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix},$$

这意味着 i 个月后顾客的概率分布 $\boldsymbol{p}_i$，可能存在稳定值，即

$$\boldsymbol{p}=(p_1^*\quad p_2^*)=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}.$$

这个时候，尽管两个超市的顾客中有一部分会流动，但每个超市的顾客数却是稳定的.

马尔可夫型决策的理论中有这样一条结论：只要能找到一个正整数 m，使一步转移概率矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的 m 次方的所有元都大于 0，那么状态分布的稳定性成立.

现在回到例 15 上来，由于 $P=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.1 & 0.9\end{bmatrix}$ 的所有元都大于 0，即一步转移概率矩阵的一次方的所有元都大于 0，状态分布的稳定性一定成立，于是可设

$$\boldsymbol{p}=(p_1^*\quad p_2^*).$$

对于 $\boldsymbol{p}=(p_1^* \quad p_2^*)$，由于它是稳定值，其1个月后的概率分布仍旧是 $\boldsymbol{p}$，这就是说，

$$\boldsymbol{pP}=\boldsymbol{p},$$

此外还有

$$p_1^*+p_2^*=1.$$

代入具体数字，可得

$$(p_1^* \quad 1-p_1^*)\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\0.1 & 0.9\end{bmatrix}=(p_1^* \quad 1-p_1^*),$$

于是得到方程

$$0.8p_1^*+0.1\times(1-p_1^*)=p_1^*.$$

化简得

$$0.3p_1^*=0.1,$$

$$p_1^*=\frac{1}{3}.$$

所以

$$p_2^*=1-p_1^*=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.$$

计算结果和上面我们的预料 $\boldsymbol{p}=\left(\frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}\right)$ 完全吻合．这里还需要指出，在推导 $\boldsymbol{p}$ 的过程中并没有用到 $\boldsymbol{p}_0$，就是说状态分布的稳定性与初始分布无关．不管一开始这12 000名顾客在A、B两超市间如何分布，经过一段时间后，会有4 000名顾客“稳定”在超市A，8 000名顾客“稳定”在超市B.

例16 考虑某地区农业收成逐年变化的两个状态，即“丰收”或“歉收”，若以状态1记丰收年，状态2记歉收年，表9给出了该地区1965—2004年间农业收成的状态变化情况．试计算该地区农业收成状态变化的一步转移概率矩阵．又假定如果“歉收”的可能性超过60%，国家应该采取一定的扶持农业的政策，试用马尔可夫型决策方法决定是否应采取扶持政策.

表9 某地区农业收成状态变化的情况

年份	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
状态	1	1	2	2	2	1	2	2	1	2
年份	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984
状态	2	1	2	2	1	2	1	2	2	1
年份	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
状态	2	2	2	1	1	2	2	2	1	2
年份	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
状态	1	2	2	1	1	2	2	2	1	2

解：为了求出一步转移概率，一般可以采取用频率来估计概率的方法进行计算.

由表 9 可见，在 15 个从状态 1 出发的情况中，有 3 个是从状态 1 “转移” 到状态 1 的，即 1965 年、1988 年、1998 年；有 12 个是从状态 1 转移到状态 2 的，即 1966 年、1970 年……实际上，本例的农业收成只考虑“丰收”“歉收”两种状态，从状态 1 转移到状态 2 的个数一定是

$$15-3=12.$$

同理，在 24 个从状态 2 出发的情况中，由表 9 可以数出有 11 个是从状态 2 转移到状态 1 的，于是从状态 2 “转移” 到状态 2 的个数是

$$24-11=13.$$

根据以上的分析，用频率代替概率，可以得到一步转移概率

$$p_{11}=\frac{3}{15}=0.2,\qquad p_{12}=\frac{12}{15}=0.8,$$

$$p_{21}=\frac{11}{24}\approx 0.458,\qquad p_{22}=\frac{13}{24}\approx 0.542.$$

一步转移概率矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.458 & 0.542 \end{pmatrix}.$$

下面用马尔可夫型决策方法研究问题的状态分布的稳定性.

由于 $\boldsymbol{P}$ 的所有元都大于 0，所以状态分布的稳定性成立，于是可设

$$\boldsymbol{p}=(p_1^* \quad p_2^*).$$

根据例 15 的讨论，下述方程组成立：

$$\begin{cases} \boldsymbol{pP}=\boldsymbol{p}, \\ p_1^*+p_2^*=1. \end{cases}$$

$\boldsymbol{pP}=\boldsymbol{p}$ 即

$$(p_1^* \quad p_2^*)\begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.458 & 0.542 \end{pmatrix}=(p_1^* \quad p_2^*),$$

所以可得

$$\begin{cases} 0.2p_1^*+0.458p_2^*=p_1^*, & ① \\ p_1^*+p_2^*=1. & ② \end{cases}$$

由方程②，得

$$p_2^*=1-p_1^*. \qquad ③$$

把③代入①，得

$$0.2p_1^*+0.458\times(1-p_1^*)=p_1^*,$$

即

$$1.258p_1^*=0.458.$$

所以

$$p_1^*=\frac{0.458}{1.258}\approx 0.364.$$

由③

$$p_2^* = 1 - 0.364 = 0.636.$$

于是

$$\boldsymbol{p} = (0.364 \quad 0.636).$$

计算结果表明，从长远来看，该地区农业收成每年丰收的可能性会稳定在 36.4%，歉收的可能性稳定在 63.6%，已经超过 60%，国家应该对该地区采取一定的扶持农业的政策.

习题六

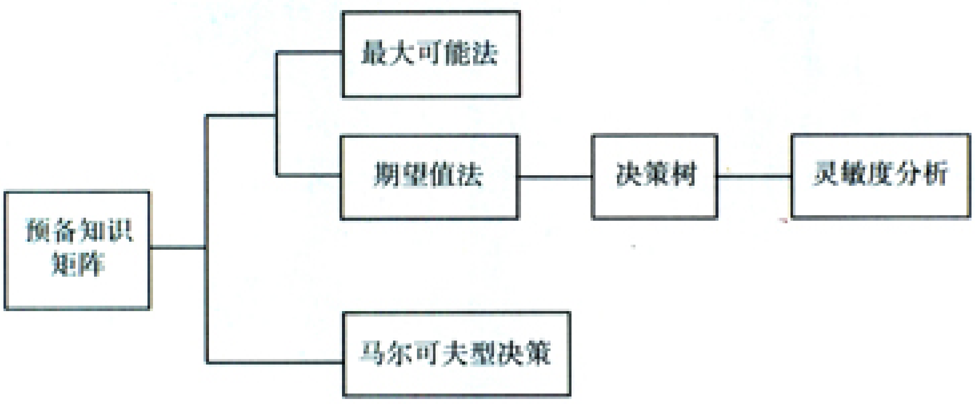
1. 若某地明天是否降雨仅与今天是否有雨有关，而与已往的天气无关. 现设今天有雨的情况下明天有雨的概率为 0.6，今天无雨的情况下明天有雨的概率为 0.3，写出一步转移概率矩阵. 某人 5 月 1 日全家欲去登山，在 4 月 29 日当地有雨，试用马尔可夫型决策帮助他决定 5 月 1 日外出带不带雨具?
2. 某计算机机房的一台计算机经常出故障，研究者每隔 15 分钟观察一次计算机的运行状态，收集了 24 小时的数据（共作 97 次观察），用 1 表示正常状态，用 0 表示不正常状态，所得数据序列如下：

   1 1 1 0 0 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1
   0 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0
   1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 1 1
   1 1 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 1
   1 0 1 1 1 1 1 1 1 0 0 1 1 1

   (1) 已知计算机在某一时段（15 分钟）的状态为 0，求它在下一时段（15 分钟）运行状态正常的概率；
   (2) 假定计算机运行状态不正常的概率大于 $\frac{1}{4}$ 就一定要大修，试用马尔可夫型决策决定该计算机要不要大修?
3. 把 2 个红球和 4 个白球任意放入甲、乙两只盒子中，每盒放 3 个球，今每次从两只盒子中各取一个球，交换后放回盒子中.
   (1) 求甲盒中红球数的初始分布；
   (2) 写出一步转移概率矩阵；
   (3) 求交换一次后甲盒中红球数的概率分布；
   (4) 经若干次交换后，试用马尔可夫型决策猜测甲盒中的红球数是多少.

本章小结

I 知识结构



II 思考与交流

1. 风险型决策问题的 4 个要素是什么？
2. 什么是损益函数、损益矩阵？它们在风险型决策中起什么作用？
3. 风险型决策最简便易行的是哪种方法？它有哪几个决策步骤？
4. 期望值法有哪几个决策步骤？
5. 反推决策树法的理论依据是什么？具体应该怎样进行？
6. 为什么要进行灵敏度分析，具体应该怎样做？
7. 什么是一步转移概率矩阵？马尔可夫型决策的主要数学公式是什么？怎样研究马尔可夫型决策问题状态分布的稳定性？

III 巩固与提高

1. 某石油公司拟在一片估计含油的荒原上钻探，如果钻井，费用为 150 万元．若出油（概率为 0.55），收入为 800 万元；若无油（概率为 0.45），则收入为 0．该公司也可以转让开采权，转让费为 160 万元，公司不承担任何风险．试问该公司应如何作风险型决策呢？

2. 某书店希望订购最新出版的图书出售．根据以往经验，新书的销售量可能为 50 本、100 本、150 本或 200 本．假定每本书的订购价为 4 元，销售价为 6 元，剩书处理价为每本 2 元，可以全部售出．现书店统计过去新书的销售规律为

销售量（本）：	50	100	150	200
所占比率（%）：	20	40	30	10

试决定订购数量．

3. 某厂一台自动加工机的工作状态有两个：正常状态和故障状态．已知在正常状态下工作的机器，在一小时内出故障的概率为 0.05，而在故障状态下工作的机器，在一小时内转变为正常状态的概率为 0.005．试对上述问题

(1) 求一步转移概率矩阵；

(2) 状态分布的稳定性是否成立？若成立，就把概率分布的稳定值求出来．

4. 完成一个学习总结报告，报告应包括三方面的内容：(1) 知识的总结．对本专题的整体思路、结构和内容的理解，对风险型决策方法及其意义的认识．(2) 拓展．通过查阅资料、调查研究、访问求教、独立思考，对某些内容、某些结果和应用进行拓展和深入．(3) 对本专题的感受、体会、看法．

Ⅳ 自测与评估

独立求解下面的两个案例，其中解案例 1 容易些，解案例 2 困难些．最后根据完成情况和所花费的时间对本专题的学习情况作自我评估．

【案例 1】 某旅游区应该开放还是关闭？

据预测，某旅游区及其附近地区在近期内有可能发生泥石流，如果真的发生这一灾难，必然会对旅游区造成严重破坏．为了确保旅游区的财产安全和旅游者的人身安全，当地政府就近一个月左右继续开放还是关闭旅游区召开了专题会议．会上出现了两种意见：一种意见认为，旅游区附近泥石流的发生，事关旅游者的生命安全，在没有绝对把握不发生泥石流的情况下，政府应该果断做出关闭旅游区的决策；另一种意见认为，旅游区附近有可能发生泥石流并不等于一定会发生泥石流，该旅游区的旅游经济在当地的经济中占有举足轻重的地位，如果简单地做出关闭旅游区的决策，势必会造成不应有的经济损失．会上决定聘请有关专家先进行论证，然后再做决定．

经过与各方面协商，一个由技术专家、经济专家和决策专家组成的咨询论证小组成立了．专家小组通过对当地地质地貌的勘察和各种经济指标的评估和预测，得到了以下数据：

1. 该旅游区及其附近发生泥石流的可能性为 30%；

2. 如果没有泥石流发生，贸然关闭该旅游区一个月，势必造成当地经济损失 2 000 万元；

3. 如果泥石流一旦发生，在旅游区关闭的情况下，经济损失（包括旅游收入的损失、财产破坏所造成的损失和个别人员伤亡的损失）预计在3 000万元左右；在旅游区开放的情况下，这种损失将有可能上升到6 000万元．

当地政府应做怎样的决策呢？

【案例 2】 **铸造车间的生产和质检方案**

朝阳厂的铸造车间生产某种汽车零件的毛坯，并以每 10 件为一批送加工车间. 根据长期生产情况统计，该车间送加工车间的毛坯中，80%的批次中含有 10%的次品，20%的批次中含有 50%的次品，假如把含 10%，50%次品的批次送加工车间，每批分别带来损失1 000元与4 000元. 作为一个替代方案，送出前可对每批毛坯进行检查、返修，返修后可消灭全部次品，但每批需返修费2 000元. 还有一个替代方案是从每批毛坯中先抽查一件，根据抽查情况再决定是对该批毛坯进行检查、返修还是直接送加工车间，抽查一件的费用为 100 元. 试为该铸造车间选择最佳决策方案.

附录 I

矩 阵

矩阵是从很多实际问题的计算中抽象出来的一个数学概念，在解线性方程组、决策问题、研究马尔可夫型决策等方面都有应用，是解决很多实际问题的有力工具．本附录并不系统叙述矩阵的理论，仅限于介绍跟“风险与决策”有关的矩阵知识，同学们在学习“风险与决策”这一专题之前，应先阅读本附录，了解一些矩阵知识．

一、矩阵的概念

定义 由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1$，2，…，m；$j=1$，2，…，n）排成一个 m 行、n 列的矩形数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 $m\times n$ 矩阵，通常用黑体大写英文字母 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，…来表示．横的各排称为**行**，纵的各排称为**列**，a_{ij} 称为第 i 行第 j 列的**元**．

当 $m=1$ 时 $(a_1\ a_2\cdots\ a_n)$ 称为**行矩阵**或**行向量**，当 $n=1$ 时

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

称为**列矩阵**或**列向量**，行向量或列向量统称为**向量**．

假定某文具车间有 3 个班组，第一天生产铅笔、圆珠笔的数量（支）报表可以表示为

$$\begin{array}{cc} \text{铅笔} & \text{圆珠笔} \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 3\,000 & 1\,000 \\ 2\,500 & 1\,100 \\ 2\,000 & 1\,000 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{一组} \\ \text{二组}. \\ \text{三组} \end{array} \end{array}$$

根据矩阵的定义，上面的报表可以用矩阵符号表示为

$$A=\begin{bmatrix}3\ 000 & 1\ 000\\ 2\ 500 & 1\ 100\\ 2\ 000 & 1\ 000\end{bmatrix},$$

这是一个 3×2 矩阵.

二、矩阵的运算

首先规定矩阵相等的意义.

如果两个矩阵的行数与列数分别相等，那么它们称为**同形矩阵**.

对于同形矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，如果它们每一个对应位置上的元相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}.$$

例 1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}x & 3\\ -1 & 10\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & y\\ -1 & z\end{bmatrix},$$

若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$，求 x，y，z.

解：$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同形矩阵，并且相等．由上所述，可得

$$x=2,\ y=3,\ z=10.$$

（1）矩阵的加法

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是同形矩阵，那么把它们对应位置上的元相加之后得到的新矩阵，称为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和，记作 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 8 & 5 & -4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}9 & 0 & 7\\ -3 & -2 & 1\end{bmatrix}$，

那么 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1+9 & 3+0 & -1+7\\ 8+(-3) & 5+(-2) & -4+1\end{bmatrix}$

$=\begin{bmatrix}10 & 3 & 6\\ 5 & 3 & -3\end{bmatrix}$.

例 2 若某文具车间 3 个班组两天的生产报表分别用下列矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 来表示：

$$\begin{array}{c} \quad\ 铅笔\quad 圆珠笔 \\ \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}3\ 000 & 1\ 000\\ 2\ 500 & 1\ 100\\ 2\ 000 & 1\ 000\end{bmatrix}\begin{array}{l}一组\\ 二组\\ 三组\end{array},\end{array}\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\ 100 & 1\ 200\\ 2\ 200 & 1\ 000\\ 2\ 200 & 1\ 000\end{bmatrix},$$

那么其两天产量的汇总报表可以用矩阵 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 表示，

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}3\ 000+3\ 100 & 1\ 000+1\ 200\\ 2\ 500+2\ 200 & 1\ 100+1\ 000\\ 2\ 000+2\ 200 & 1\ 000+1\ 000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\ 100 & 2\ 200\\ 4\ 700 & 2\ 100\\ 4\ 200 & 2\ 000\end{bmatrix}.$$

容易验证，矩阵的加法满足以下规律：

① 交换律 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

② 结合律　$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

(2) 数与矩阵的乘积

例 3　假设例 4 中某文具车间第二天的产量和第一天的产量完全相同，那么其两天产量的汇总报表可以表示为

$$\begin{bmatrix} 2\times3\ 000 & 2\times1\ 000 \\ 2\times2\ 500 & 2\times1\ 100 \\ 2\times2\ 000 & 2\times1\ 000 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6\ 000 & 2\ 000 \\ 5\ 000 & 2\ 200 \\ 4\ 000 & 2\ 000 \end{bmatrix},$$

实际上是用数 2 乘以例 4 中矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的所有元，得到一个新的矩阵，这就是数与矩阵的乘积，常常简称为**数乘矩阵**.

一般地说，数 k 乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的积记作 $k\boldsymbol{A}$，它是由 k 乘 $\boldsymbol{A}$ 的每个元得到的一个新矩阵．例如，若设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

那么 $5\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 5\times1 & 5\times(-1) \\ 5\times5 & 5\times2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5 & -5 \\ 25 & 10 \end{bmatrix}$.

(3) 矩阵的乘法

例 4　若用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示某文具车间 3 个班组一天的产量（支），用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示铅笔和圆珠笔的单位售价（元/支）和单位利润（元/支）：

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{铅笔} & \text{圆珠笔} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 3\ 000 & 1\ 000 \\ 2\ 500 & 1\ 100 \\ 2\ 000 & 1\ 000 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{一组} \\ \text{二组} \\ \text{三组} \end{array},\quad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{单价} & \text{单位利润} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 2 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{铅笔} \\ \text{圆珠笔} \end{array}.$$

再用矩阵 $\boldsymbol{C}$ 表示 3 个班组一天创造的总产值和总利润，容易得出

$$\boldsymbol{C}=\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{总产值} & \text{总利润} \end{array} \\ \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ \text{一组} \\ \text{二组} \\ \text{三组} \end{array}$$

$$=\begin{bmatrix} 3\ 000\times1+1\ 000\times2 & 3\ 000\times0.3+1\ 000\times0.5 \\ 2\ 500\times1+1\ 100\times2 & 2\ 500\times0.3+1\ 100\times0.5 \\ 2\ 000\times1+1\ 000\times2 & 2\ 000\times0.3+1\ 000\times0.5 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 5\ 000 & 1\ 400 \\ 4\ 700 & 1\ 300 \\ 4\ 000 & 1\ 100 \end{bmatrix}.$$

上式表明，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元 c_{11} 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 列对应各元乘积之和，c_{12} 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 1 行与 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 列对应各元乘积之和……这样，矩阵 $\boldsymbol{C}$ 可以看作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积，记作

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}.$$

一般地说，给出 $m\times s$ 矩阵 A 与 $s\times n$ 矩阵 B，A 与 B 的乘积是一个 $m\times n$ 矩阵 C，记作 $C=AB$，C 的第 i 行第 j 列的元等于 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应各元乘积之和.

例 5　设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

计算 AB.

解：

$$AB=\begin{pmatrix}1\times1+1\times(-1) & 1\times(-1)+1\times1\\ -1\times1+(-1)\times(-1) & -1\times(-1)+(-1)\times1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

例 6　设 $k=10$，$A=(0.2\quad 0.8)$，

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix},$$

计算 kAB.

解：

$$\begin{aligned}kAB&=(10\times0.2\quad 10\times0.8)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\\ &=(2\quad 8)\begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{pmatrix}\\ &=(2\times1+8\times3\quad 2\times(-1)+8\times2)\\ &=(26\quad 14).\end{aligned}$$

矩阵的乘法满足以下规律：

① 结合律　$(AB)C=A(BC)$；

② 分配律　$A(B+C)=AB+AC$，

$(B+C)A=BA+CA$.

注意矩阵的乘法不满足交换律.

根据矩阵乘法的结合律，知道 $\underbrace{AA\cdots A}_{m个}$ 表示一个矩阵，这个矩阵可以记作 A^m，即

$$A^m=\underbrace{AA\cdots A}_{m个},$$

其中 m 是一个正整数.

三、矩阵的转置

把矩阵 A 的行、列按原顺序互换，得到一个新矩阵称为矩阵 A 的**转置矩阵**，记作 A^T.

例如，设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & -2\\ 8 & 0 & -1\\ 2 & 4 & 6\end{pmatrix},$$

则

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 8 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ -2 & -1 & 6\end{pmatrix};$$

设 $$B=(8\quad 5\quad -3),$$

则 $$B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}8\\ 5\\ -3\end{pmatrix}.$$

矩阵的转置满足以下规律：

① $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$；

② $(A+B)^{\mathrm{T}}=A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$；

③ $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$；

④ $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$.

附录II

部分中英文词汇对照表

概率	probability
条件概率	conditional probability
期望	expectation
状态	state
决策	decision
决策树	decision tree
风险型决策	decision under risk
风险	risk
马尔可夫型决策	Markov decision
灵敏度分析	sensitivity analysis
矩阵	matrix
向量	vector
转置	transpose
行矩阵	row matrix
矩阵的元	entry of a matrix