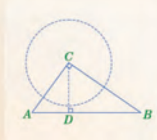
教育部审定 2013

义务教育教科书

数学

九年级 下册



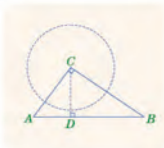
9

河北教育出版社

义务教育教科书

数学

九年级 下册



河北教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

数学. 九年级. 下册/杨俊英编著. —石家庄：河北教育出版社，2012.7(2019.10 重印)
义务教育教科书
ISBN 978-7-5434-9538-8

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①中学数学课—初中—教材 Ⅳ. ①G634.601

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第168434号

主　　编　杨俊英
副 主 编　王洁敏　缴志清　程海奎
编　　者　(按姓氏笔画排序)
王　佐　李会芳　苏桂海　徐建乐　简　友

书　　名　义务教育教科书
数学　九年级　下册
责任编辑　王东芳　吴丽霞
责任印制　王淑英
装帧设计　呼玉迈
内文插图　老迈视觉设计工作室

出　　版　河北教育出版社
(石家庄市联盟路 705 号　http://www.hbep.com)
发　　行　河北省新华书店
制　　版　保定市佳美制版中心
印　　刷　河北新视野彩印有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　7.5
字　　数　127 千字
版　　次　2014 年 10 月第 1 版
印　　次　2019 年 10 月第 6 次印刷
印　　数　1 129 001—1 419 000
书　　号　ISBN 978-7-5434-9538-8
定　　价　7.40 元
冀发改价格　[2019]761 号
冀 价 审　[2020]002073

收获在数学世界中

亲爱的同学们：

你们好！本学期是你们在初中的最后阶段，希望你们加倍珍惜，再接再厉，为初中学习生活画上圆满的句号。

当你们拿到这本九年级下册教科书时，以下这些栏目已陪伴了你们近三年的时光。

观察与思考：期待你们通过观察、感悟和思考，获得正确的数学认知。

一起探究：和大家一起探究并认识数学知识、思想和方法，这会使你们有更大的收获。

试着做做、做一做：动手试做，再做一做，这是学习数学不可缺少的。

大家谈谈：和同学们分享自己的学习成果，大家共同进步。

回顾与反思：把握整体内容，梳理知识脉络，总结思想方法，明确注意事项，这是不可或缺的学习环节。

在内容上，这本书共有四个篇章。

直线与圆的位置关系——探究图形与图形之间的位置关系是学习几何的主要任务之一。在这里，我们将探究点与圆、直线与圆的位置关系，从中会发现很多重要的性质和定理，学到很多重要的数学思想方法。

二次函数——它是又一类函数模型。二次函数的图像和性质可以用来解决许多现实问题，尤其是将它与一元二次方程结合起来，应用更加丰富广泛。

随机事件的概率——生活中几乎每时每刻都会遇到概率问题，具体事例不胜枚举。在这里，我们将初步学习和探究一些简单随机事件的概率，体会和掌握一些统计和概率的思想方法。

投影与视图——严格说来，这部分内容属于工程设计的范畴，因此也可以说它是几何的应用。从它自身的内容来说，也许知识并不太多，但重要的是它所体现的研究几何的一些基本思想方法，是其他内容不能代替的。学好它，对于我们全面理解和把握几何是十分有帮助的。

在初中阶段的最后一个学期，祝愿你们在数学上能有更大的进步，为今后的数学学习奠定坚实的基础。

你们的编者朋友

2014 年 9 月

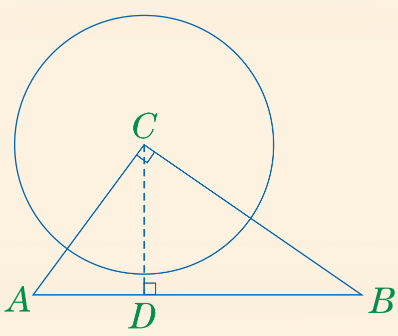
目　录

第二十九章 直线与圆的位置关系

在本章中，我们将学习

- 点与圆的位置关系
- 直线与圆的位置关系
- 切线的性质和判定
- 正多边形与圆

如图，在Rt△ABC中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=3$ cm，$BC=4$ cm. 当⊙C的半径变化时，⊙C与AB所在的直线有几种不同的位置关系？能用⊙C的半径与CD的数量关系描述这些位置关系吗？

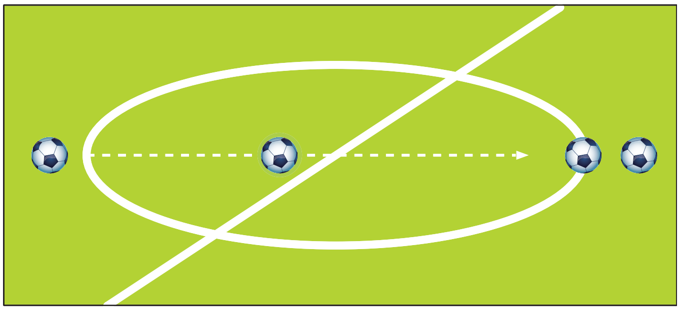


29.1 点与圆的位置关系

在平面上，点与直线有两种位置关系：点在直线上和点在直线外. 点与圆有怎样的位置关系呢？这就是本节所要探究的内容.

观察与思考

足球运动员踢出的足球在球场上滚动，在足球穿越中圈区(中间圆形区域)的过程中，可将足球看成一个点，这个点与圆具有怎样的位置关系？



在同一个平面内，点与圆有三种位置关系：点在圆外、点在圆上和点在圆内. 点 P 与⊙O 的位置关系如图 29－1－1 所示.

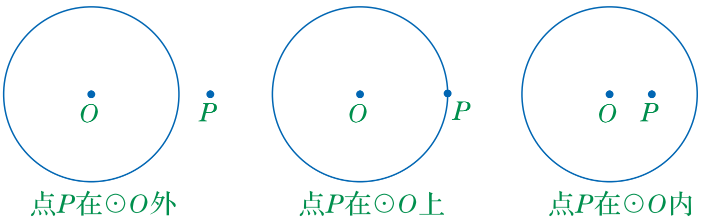
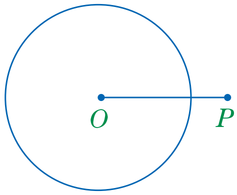
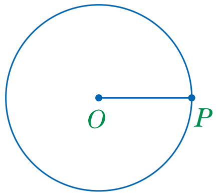
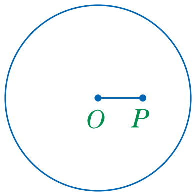


图 29－1－1

试着做做

已知点 P 和⊙O，⊙O 的半径为 r，点 P 与圆心 O 之间的距离为 d.

1. 请根据下列图形中点 P 与⊙O 的位置，在表格中填写 r 与 d 之间的数量关系.

语言描述	图形表示	r 与 d 之间的数量关系
点 P 在⊙O 外		
点 P 在⊙O 上		
点 P 在⊙O 内		

2. 当 d 与 r 分别满足条件 $d>r$，$d=r$，$d<r$ 时，请你指出点 P 与⊙O 的位置关系.

不难发现：

(1) 点 P 在⊙O 外$\Leftrightarrow d>r$.

(2) 点 P 在⊙O 上$\Leftrightarrow d=r$.

(3) 点 P 在⊙O 内$\Leftrightarrow d<r$.

> 符号"$\Leftrightarrow$"读作"等价于"，它表示从左端可以推出右端，从右端也可以推出左端.

例 如图 29－1－2，在△ABC 中，$\angle C=90°$，$AB=5$ cm，$BC=4$ cm，以点 A 为圆心、3 cm 为半径画圆，并判断：

(1) 点 C 与⊙A 的位置关系.

(2) 点 B 与⊙A 的位置关系.

(3) AB 的中点 D 与⊙A 的位置关系.

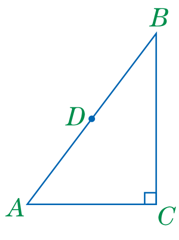


图 29－1－2

解：已知⊙A 的半径 $r=3$ cm.

(1) 因为 $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3(\text{cm})=r$，所以点 C 在⊙A 上.

(2) 因为 $AB=5\text{ cm}>3\text{ cm}=r$，所以点 B 在⊙A 外.

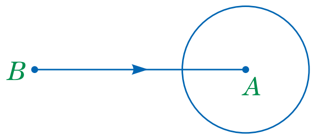
(3) 因为 $DA=\frac{1}{2}AB=2.5\text{ cm}<3\text{ cm}=r$，所以点 D 在⊙A 内.

练 习

1. 在直角坐标系中，以原点为圆心的⊙O的半径为5. 判断以下各点与⊙O的位置关系：

$$A(4,\ 2),\ B(-3,\ 4),\ C(4,\ -4),\ D(1,\ 5).$$

2. 如图，某海域以点A为圆心、3 km为半径的圆形区域为多暗礁的危险区，但渔业资源丰富. 渔船要从点B处前往点A处进行捕鱼，B，A两点之间的距离是10 km. 如果渔船始终保持10 km/h的航速行驶，那么在什么时段内，渔船是安全的？渔船何时进入危险区域？

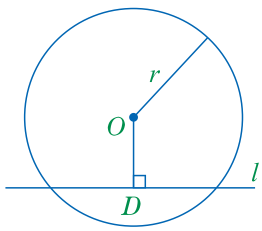


（第2题）

习 题

A 组

1. 如图，⊙O的半径$r=5$，圆心O到直线l的距离$OD=3$. 在直线l上有P，Q，R三点，并且$PD=4$，$QD>4$，$RD<4$. 点P，Q，R与圆的位置关系分别是怎样的？



（第1题）

2. 在矩形$ABCD$中，$AB=3$，$AD=4$. 现以点A为圆心画圆，使B，C，D三点至少有一点在圆内，且至少有一点在圆外. 试确定⊙A的半径r的取值范围.

B 组

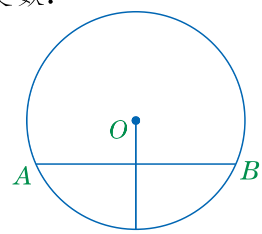
1. 已知D为线段BC的中点，以BC为直径画⊙D，再以BC为底边画等腰三角形ABC.

   (1) 当点A在⊙D上时，求等腰三角形ABC顶角的度数.

   (2) 当点A在⊙D内时，求等腰三角形ABC顶角的取值范围.

   (3) 当点A在⊙D外时，求等腰三角形ABC顶角的取值范围.

2. 如图，⊙O的半径为5，圆心O到弦AB的距离为2. ⊙O上到弦AB所在直线的距离为2的点有几个？

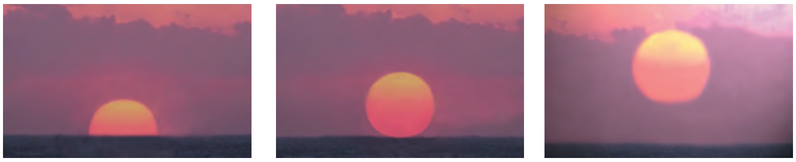


（第2题）

29.2 直线与圆的位置关系

直线与圆有怎样的位置关系？如何用数量关系来描述直线与圆的位置关系呢？

清晨，一轮红日从东方冉冉升起，太阳的轮廓就像一个运动的圆，从地平线下渐渐升到空中．在此过程中，太阳轮廓与地平线有几种不同的位置关系呢？



一条直线与一个圆的位置关系，根据它们公共点的个数可分为三种情况：两个公共点、一个公共点、没有公共点．

当直线与圆有两个公共点时，我们称直线与圆**相交**；当直线与圆有唯一一个公共点时，称直线与圆**相切**，此时这个公共点叫做**切点**，这条直线叫做圆的**切线**；当直线与圆没有公共点时，称直线与圆**相离**．

直线 l 与⊙O 相交、相切和相离的三种位置关系，如图 29－2－1 所示．

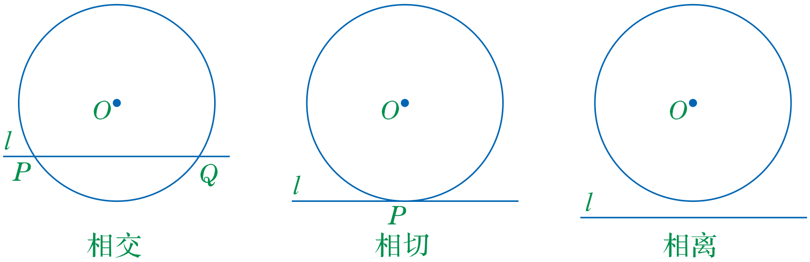


图 29－2－1

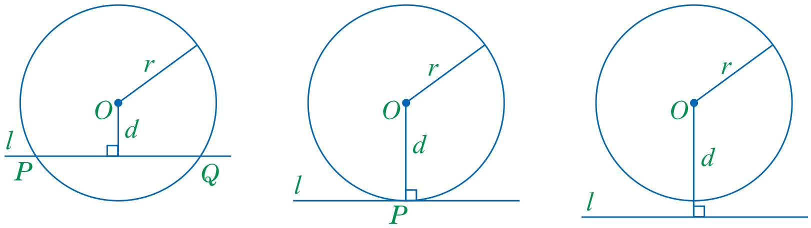
直线与圆的位置关系也可以用有关数量之间的关系来刻画．

观察与思考

如图 29－2－2，⊙O 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d．

（1）当 l 与⊙O 相交、相切或相离时，r 与 d 分别具有怎样的数量关系？

（2）当 $d<r$，$d=r$ 或 $d>r$ 时，l 与⊙O 分别具有怎样的位置关系？



相交　　相切　　相离

图 29－2－2

经观察，可得：

（1）直线 l 与⊙O 相交⇔$d<r$.

（2）直线 l 与⊙O 相切⇔$d=r$.

（3）直线 l 与⊙O 相离⇔$d>r$.

例　如图 29－2－3，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90°$，$AC=3$ cm，$BC=4$ cm. 以点 C 为圆心，2 cm，2.4 cm，3 cm 分别为半径画⊙C，斜边 AB 分别与⊙C 有怎样的位置关系？为什么？

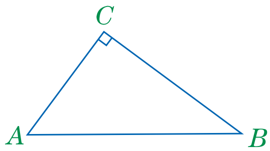


图 29－2－3

解：如图 29－2－4，过点 C 作 $CD\perp AB$，垂足为 D. 在 Rt△ABC 中，

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5(\text{cm}).$$

由三角形的面积公式，并整理，得

$$AC\cdot BC=AB\cdot CD.$$

从而

$$CD=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{3\times4}{5}=2.4(\text{cm}).$$

即圆心 C 到斜边 AB 的距离 $d=2.4$ cm.

当 $r=2$ cm 时，$d>r$，斜边 AB 与⊙C 相离.

当 $r=2.4$ cm 时，$d=r$，斜边 AB 与⊙C 相切.

当 $r=3$ cm 时，$d<r$，斜边 AB 与⊙C 相交.

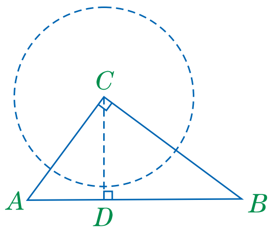
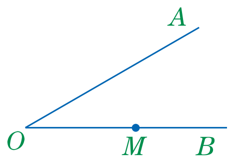


图 29－2－4

练　习

1. 已知一个圆的直径为 10. 如果这个圆的圆心到一条直线的距离分别等于 3，5，6，那么这条直线与这个圆的位置关系分别是怎样的？

2. 如图，$\angle AOB=30^{\circ}$，M 为 OB 上一点，且 $OM=6$ cm. 以点 M 为圆心画圆，当其半径 r 分别等于 2 cm，3 cm，4 cm 时，直线 OA 与 $\odot M$ 分别有怎样的位置关系？为什么？

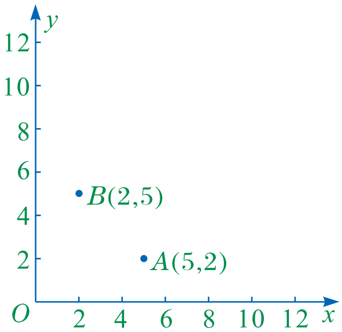


（第 2 题）

习　题

A　组

1. 已知 $\odot O$ 的半径为 r，圆心 O 到直线 l 的距离为 d. 如果直线 l 与 $\odot O$ 有公共点，那么 d 与 r 的数量关系是怎样的？
2. 如图，在直角坐标系中有 $A(5，2)$ 和 $B(2，5)$ 两点. 以点 A 为圆心、AB 的长为半径画圆. 试确定 x 轴和 y 轴分别与 $\odot A$ 的位置关系.



（第 2 题）

B　组

1. 在等腰三角形 ABC 中，$\angle BAC=120^{\circ}$，$AB=AC=4$. 试确定以点 A 为圆心、2 为半径的圆与 BC 的位置关系.
2. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^{\circ}$，$\angle B=30^{\circ}$，O 为 AB 上一点，$OA=m$，$\odot O$ 的半径 $r=\frac{1}{2}$. 在下列条件下，分别求 m 的取值范围.

（1）AC 与 $\odot O$ 相离.

（2）AC 与 $\odot O$ 相切.

（3）AC 与 $\odot O$ 相交.

29.3 切线的性质和判定

我们知道，当直线与圆相切时，圆心到切线的距离等于圆的半径.圆的切线还有哪些性质？如何判定一条直线是圆的切线呢？

在我们的生活中，经常会遇到直线与圆相切的情形. 如沿直线行驶的自行车车轮与车印，可以看成直线与圆相切的具体实例.

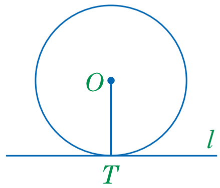


图 29 - 3 - 1

直线与圆相切时，还有哪些性质呢？

一起探究

如图 29 - 3 - 1，直线 l 为⊙O 的一条切线，切点为 T，OT 为半径. 在直线 l 上任取一点 P，连接 OP. 观察 OT 和 OP 的数量关系，猜想 OT 与切线 l 具有怎样的位置关系.

事实上，$OT \perp l$.

如图 29 - 3 - 2，假设 OT 与 l 不垂直. 过点 O 作 $OP \perp l$，垂足为 P. 因为 OP 是垂线段，所以 $OP < OT$（垂线段最短），即圆心 O 到直线 l 的距离小于圆的半径. 由此得到直线 l 与⊙O 相交. 这和直线 l 与⊙O 相切矛盾，所以 $OT \perp l$.

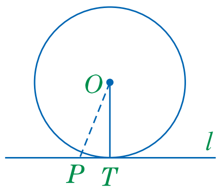


图 29 - 3 - 2

圆的切线垂直于过切点的半径.

观察与思考

如图 29－3－3，OA 为⊙O 的半径，直线 l 过点 A，且 $l \perp OA$.

（1）如果用 r 表示⊙O 半径的长，d 表示圆心 O 到直线 l 的距离，那么 r 与 d 具有怎样的数量关系呢？

（2）直线 l 是⊙O 的切线吗？

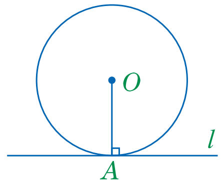


图 29－3－3

因为 $l \perp OA$，垂足为 A，所以 $d=r$，因此 l 与⊙O 相切.

经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线.

做一做

如图 29－3－4，P 为⊙O 上的一点，请你用三角尺画出这个圆过点 P 的切线.

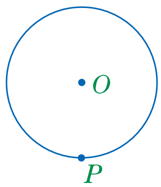
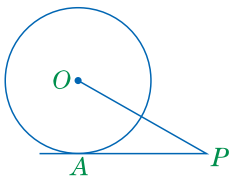


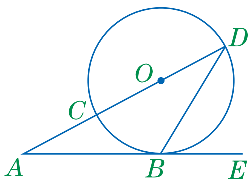
图 29－3－4

练　习

1. 如图，PA 为⊙O 的切线，切点为 A，$OP=2$，$\angle APO=30^\circ$. 求⊙O 的半径.



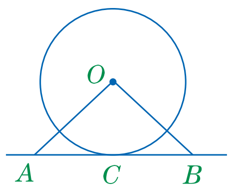
（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，CD 为⊙O 的直径，点 A 在 DC 的延长线上，直线 AE 与⊙O 相切于点 B，$\angle A=28^\circ$. 求$\angle DBE$ 的度数.

3. 如图，直线 AB 经过⊙O 上一点 C，并且 $OA=OB$，$CA=CB$. 直线 AB 与⊙O 具有怎样的位置关系？请说明理由.

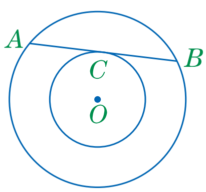


（第 3 题）

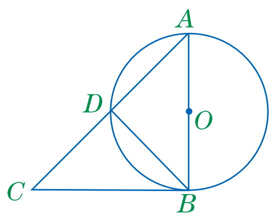
习 题

A 组

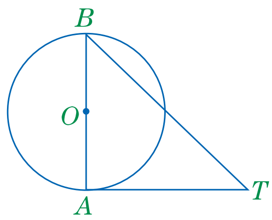
1. 如图，两个圆是以点 O 为圆心的同心圆，大圆的弦 AB 是小圆的切线，C 为切点. C 是 AB 的中点吗？为什么？



（第 1 题）



（第 2 题）

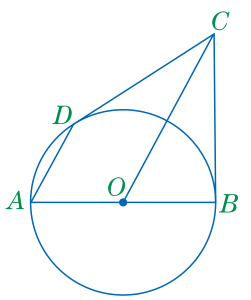


（第 3 题）

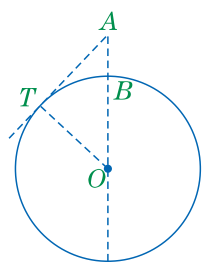
2. 如图，在⊙O 中，AB 为直径，AD 为弦，过点 B 的切线与 AD 的延长线交于点 C，且 $AD=DC$. 求$\angle ABD$ 的度数.
3. 已知：如图，AB 为⊙O 的直径，$\angle ABT=45°$，$AT=AB$. 求证：AT 与⊙O 相切.

B 组

1. 已知：如图，AB 为⊙O 的直径，CB 为⊙O 的切线，切点为 B，弦 AD 平行于 OC. 求证：CD 是⊙O 的切线.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 上海东方明珠广播电视塔坐落于上海浦东新区陆家嘴，以其 468 m 的高度成为世界著名的高塔. 如图，⊙O 表示过地球球心 O 的截面轮廓，点 A 表示该塔的顶端，AT 是信号覆盖半径. 请计算一下信号覆盖半径可以达到多少千米.（地球半径约为 6 370 km，结果精确到 0.1 km）

29.4 切线长定理*

过圆内一点的直线与圆不相切，过圆上一点只有一条圆的切线，过圆外一点有两条圆的切线. 那么圆外的点到切点的两条线段之间具有怎样的数量关系呢?

一起探究

如图 29－4－1，已知⊙O 及圆外一点 P. 如何过点 P 作出⊙O 的切线呢?

小亮是按下列步骤画图的：

①如图 29－4－2，连接 OP，以 OP 为直径作圆，交⊙O 于 A，B 两点.

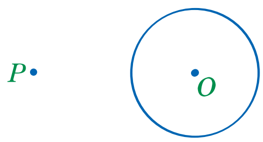


图 29－4－1

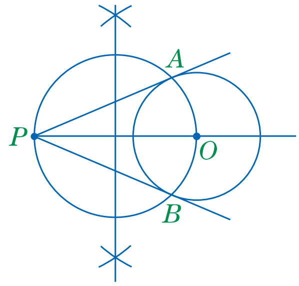


图 29－4－2

②连接 PA，PB.

小亮认为 PA，PB 就是⊙O 的切线.

(1) 你认为 PA，PB 是⊙O 的切线吗？若是，请说明理由.

(2) 猜想线段 PA，PB 具有怎样的数量关系.

事实上，PA，PB 都是⊙O 的切线，且 $PA=PB$.

下面我们证明：过圆外一点向圆所引的两条切线的长相等.

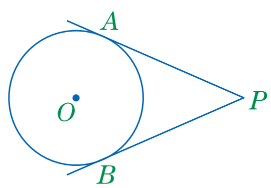


图 29－4－3

已知：如图 29－4－3，P 是⊙O 外一点，PA，PB 分别与⊙O 相切于点 A，B.

求证：$PA=PB$.

证明：如图 29-4-4，连接 OA，OB，OP.

在Rt$\triangle OAP$和 Rt$\triangle OBP$ 中，

∵ PA，PB 分别与$\odot O$相切于点 A，B，

∴ $PA\perp OA$，$PB\perp OB$.

∴ $\angle OAP=\angle OBP=90°$.

又∵ $OA=OB$，$OP=OP$，

∴ Rt$\triangle OAP\cong$Rt$\triangle OBP$.

∴ $PA=PB$.

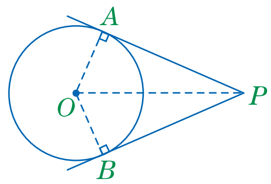


图 29-4-4

我们把线段 PA，PB 的长叫做点 P 到$\odot O$的切线长.

切线长定理

过圆外一点所画的圆的两条切线的切线长相等.

在上面的探究过程中，还容易得到$\angle APO=\angle BPO$，即圆外一点与圆心的连线平分过这点的两条切线所形成的夹角.

例 1 已知：如图 29-4-5，过点 P 的两条直线分别与$\odot O$相切于点 A，B，Q 为劣弧$\overset{\frown}{AB}$上异于点 A，B 的任意一点，过点 Q 的切线分别与切线 PA，PB 相交于点 C，D.

求证：$\triangle PCD$ 的周长等于 $2PA$.

证明：∵ PA，PB，CD 都是$\odot O$的切线，

∴ $PA=PB$，$CQ=CA$，$DQ=DB$.

∴ $\triangle PCD$ 的周长

$=PC+PD+CD$

$=PC+PD+CQ+DQ$

$=PC+PD+CA+DB$

$=PA+PB=2PA$.

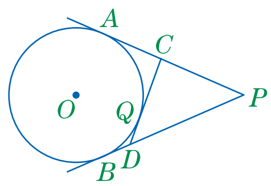


图 29-4-5

例 2 用尺规作圆，使其与已知三角形的三边都相切.

已知：如图 29-4-6，$\triangle ABC$.

求作：$\odot I$，使它与$\triangle ABC$ 的三边都相切.

分析：要求作的圆与$\triangle ABC$ 的三边都相切，则这个圆的圆心到

$\triangle ABC$ 三边的距离都相等，所以圆心是三角形两个内角平分线的交点，圆的半径是交点到三角形一边的垂线段的长.

作法：如图 29－4－7.

（1）分别作$\angle B$ 和$\angle C$ 的平分线 BM 和 CN. 设 BM 与 CN 交于点 I.

（2）过点 I 作 $ID \perp BC$，垂足为 D.

（3）以点 I 为圆心、ID 的长为半径作$\odot I$. $\odot I$ 即为所求.

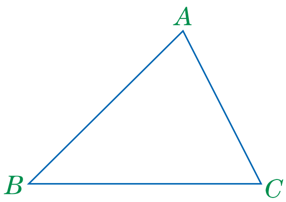


图 29－4－6

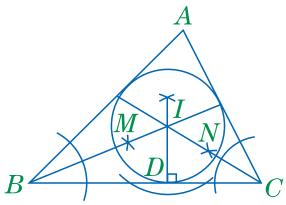


图 29－4－7

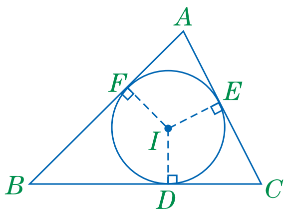


图 29－4－8

如图 29－4－8，作 $IE \perp AC$，$IF \perp AB$，垂足分别为 E，F. 由作图过程可知 $ID=IE=IF$. 因为$\odot I$ 的半径为 ID，所以$\odot I$ 与$\triangle ABC$ 的三边 AB，BC，AC 分别相切于点 F，D，E.

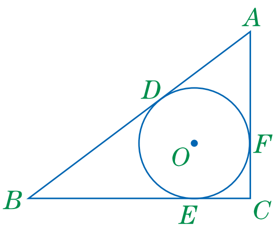
与三角形的三边都相切的圆有且只有一个，我们称这个圆为三角形的**内切圆**(incircle)，称这个圆的圆心为三角形的**内心**(incenter).

练　习

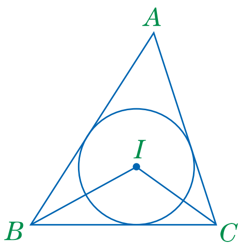
1. 如图，$\odot O$ 为$\triangle ABC$ 的内切圆，切点分别为 D，E，F.

（1）图中有几对相等的线段?

（2）若 $AD=2$，$BE=3$，$CF=1$，求$\triangle ABC$ 的周长.



（第 1 题）



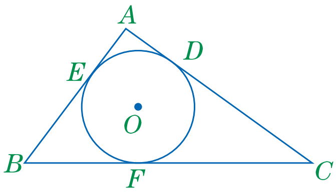
（第 2 题）

2. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$\angle A=50°$，它的内心为 I. 求$\angle BIC$ 的度数.

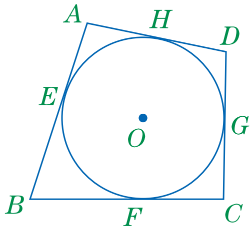
A 组

1. 已知$\odot O$的半径为3，点P与圆心O之间的距离为6．过点P作$\odot O$的两条切线，求这两条切线的夹角和切线长．

2. 如图，$\odot O$为$\triangle ABC$的内切圆，切点分别为D，E，F，$AE=1$，$BF=2$，$CD=3$．求$\odot O$的半径．



（第 2 题）



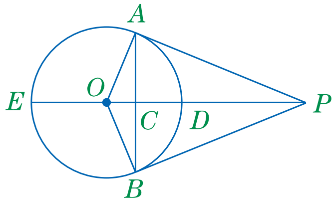
（第 3 题）

3. 已知：如图，四边形$ABCD$的四边AB，BC，CD，DA分别与$\odot O$相切于点E，F，G，H．求证：$AB+CD=AD+BC$．

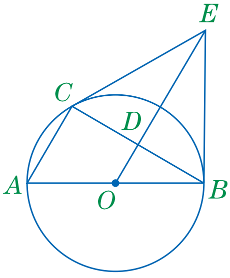
4. 如图，PA，PB是$\odot O$的两条切线，A，B是切点，直线OP交$\odot O$于点D，E，交AB于点C．

（1）请写出图中所有具有垂直关系的直线．

（2）请写出图中所有的全等三角形．



（第 4 题）

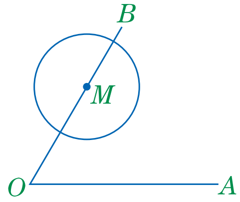


（第 5 题）

5. 已知：如图，AB为$\odot O$的直径，E为$\odot O$外一点，EB，EC分别切$\odot O$于点B，C．求证：$AC\parallel OE$．

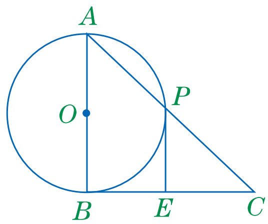
B 组

1. 如图，$\angle AOB=60^{\circ}$，M 为射线 OB 上的一点，$OM=4$，以点 M 为圆心、2 为半径画圆. 若 OA 绕点 O 按逆时针方向旋转，则当 OA 和$\odot M$ 相切时，OA 所旋转的角度是多少？



（第 1 题）

2. 已知：如图，AB 为$\odot O$ 的直径，BC 切$\odot O$ 于点 B，AC 交$\odot O$ 于点 P，点 E 在 BC 上，并且 PE 切$\odot O$ 于点 P. 求证：$CE=BE$.



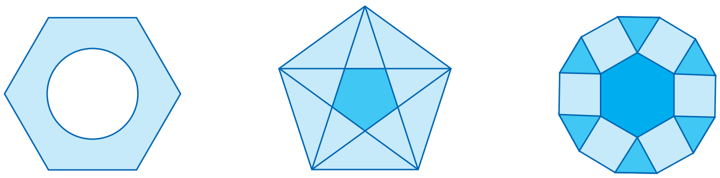
（第 2 题）

29.5 正多边形与圆

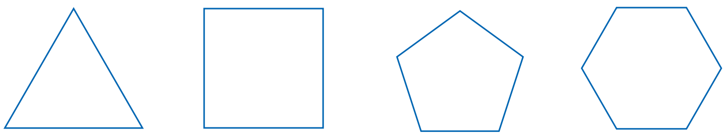
等边三角形、正方形的各边相等，各角也相等．现实中还有许多各边相等、各角也相等的多边形，这类多边形与圆有着密切的联系．

观察与思考

1．观察下面的三幅图片，说说图片中各包含哪些多边形．



2．量一量下列图形的边和角，概括它们的共同特点．



各边相等、各角也相等的多边形叫做**正多边形**(regular polygon)．

把一个圆 $n(n\geqslant 3)$ 等分，顺次连接各等分点，就得到一个正 n 边形．我们把这个正 n 边形叫做**圆的内接正 n 边形**，这个圆叫做**正 n 边形的外接圆**，外接圆的圆心叫做正多边形的**中心**，外接圆的半径叫做正多边形的**半径**，每一边所对的圆心角叫做正多边形的**中心角**，中心到边的距离叫做正多边形的**边心距**．

如图 29－5－1，正六边形 $ABCDEF$ 为⊙O 的内接正六边形，⊙O 为正六边形 $ABCDEF$ 的外接圆．点 O 为这个正六边形的中心，OA 为半径，$\angle AOB$ 为中心角，OH 的长为边心距．

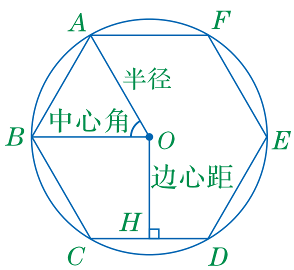


图 29－5－1

大家谈谈

1．只要将圆 n（$n\geqslant 3$）等分，就可以画出正 n 边形．如何将一个圆 n 等分呢？

2. 正五边形的中心角是多少度？如何将圆五等分，画正五边形呢？

通过等分圆心角，可以画正多边形．对于一些特殊情形，可以用尺规作圆的内接正多边形．

例 1 用尺规作圆的内接正方形．

已知：如图 29－5－2，$\odot O$．

求作：正方形 $ABCD$ 内接于$\odot O$．

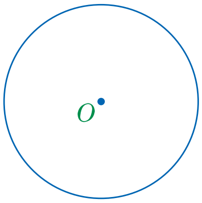


图 29－5－2

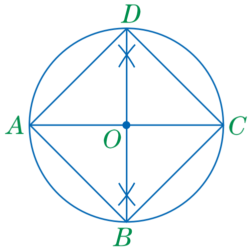


图 29－5－3

作法：（1）如图 29－5－3，作两条互相垂直的直径 AC，BD．

（2）顺次连接 AB，BC，CD，DA．

由作图过程可知，四个中心角都是 $90°$，所以 $AB=BC=CD=DA$．因为 AC，BD 都是直径，所以 $\angle ABC=\angle BCD=\angle CDA=\angle DAB=90°$．

即四边形 $ABCD$ 为$\odot O$ 的内接正方形．

试着做做

1. 计算圆的内接正六边形的中心角度数，指出正六边形的边长和外接圆半径之间的数量关系．

2. 用尺规作圆的内接正六边形．（保留作图痕迹，不要求写出作法）

例 2 如图 29－5－4，$\triangle ABC$ 为$\odot O$ 的内接正三角形．如果$\odot O$ 的半径为 r，求这个正三角形的边长和边心距．

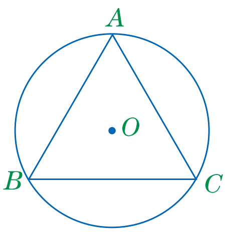


图 29－5－4

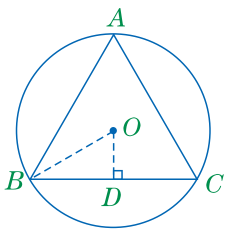


图 29－5－5

解：如图 29-5-5，连接 OB，过点 O 作 $OD\perp BC$，垂足为 D.

在 Rt$\triangle OBD$ 中，

$\because\ \angle OBD=30^\circ$，$OB=r$，

$\therefore\ OD=\dfrac{r}{2}$，$BD=\dfrac{\sqrt{3}}{2}r$，$BC=2BD=\sqrt{3}r$.

即这个正三角形的边长为$\sqrt{3}r$，边心距为$\dfrac{r}{2}$.

练　习

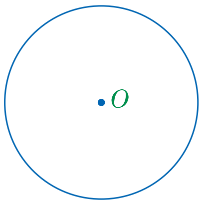
1. 对于三角形，如果三边相等，那么它的三个角一定相等. 反过来，如果三个角相等，那么它的三边也一定相等. 对于其他多边形，如果去掉“各边相等”和“各角相等”两个条件中的任意一个，还能保证这个多边形是正多边形吗？请举例说明.

2. 一个正多边形的边心距与边长的比为$\dfrac{1}{2}$，求这个正多边形的边数.

习　题

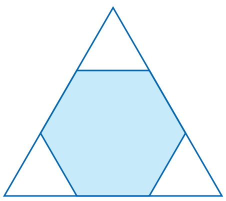
A　组

1. 如图，在$\odot O$中，用量角器画出一个正五边形，再画出这个正五边形的各条对角线.



（第 1 题）

2. 如图，正三角形的边长为 6，剪去三个角后成为一个正六边形. 求这个正六边形的面积.



（第 2 题）

3. 求半径为 2 的圆的内接正三角形，正方形，正六边形的边长、边心距、中心角和面积. 将结果填写在下表中：

圆的内接正多边形	边长	边心距	中心角	面积
正三角形				
正方形				
正六边形				

B 组

1. 要在圆形铁片上截出边长为 15 cm 的正方形铁片，所选用的圆形铁片的直径最小应为多少厘米?
2. 用 36 m 长的篱笆在空地上围出一块场地，现有以下四种设计方案：正三角形、正方形、正六边形和圆. 通过计算说明哪种场地的面积最大.

回顾与反思

一、知识结构

- 圆
  - 点与圆的位置关系
    - $d<r \Leftrightarrow$ 点在圆内
    - $d=r \Leftrightarrow$ 点在圆上
    - $d>r \Leftrightarrow$ 点在圆外
  - 直线与圆的位置关系
    - $d<r \Leftrightarrow$ 直线与圆相交
    - $d=r \Leftrightarrow$ 直线与圆相切
      - 切线的性质
      - 切线的判定
      - 切线长定理
    - $d>r \Leftrightarrow$ 直线与圆相离
  - 正多边形与圆
    - 圆的内接正多边形
    - 用尺规作圆的内接正方形和正六边形

二、总结与反思

在本章中，我们研究了点与圆、直线与圆的位置关系．在此基础上，我们还探究了圆的切线的性质和判定、切线长定理以及正多边形与圆的关系．

在研究点与圆、直线与圆位置关系的过程中，我们利用了分类的思想．用圆心到点或直线的距离 d 与半径 r 之间的数量关系揭示点或直线与圆的位置关系，这体现了数形结合的思想．

1．点与圆、直线与圆的位置关系．

点与圆、直线与圆分别有三种位置关系，它们是如何分类的？怎样用圆心到点或直线的距离 d 与半径 r 之间的数量关系来描述这三种位置关系？请填写下表．

点与圆的位置关系	圆心到点的距离 d 与半径 r 的关系	直线与圆的位置关系	公共点的个数	圆心到直线的距离 d 与半径 r 的关系
		相交		
		相切		
		相离		

2．切线的性质和判定．

切线的性质：圆的切线垂直于过切点的半径．

切线的判定：经过半径的外端并且垂直于这条半径的直线是圆的切线．

切线长定理：过圆外一点所画的圆的两条切线的切线长相等．

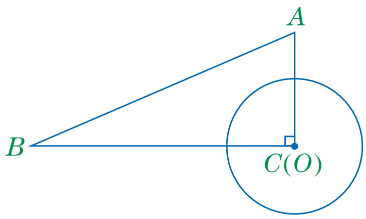
3. 正多边形与圆.

通过等分圆可以画圆的内接正多边形. 回顾用尺规作圆的内接正方形和内接正六边形的方法，思考如何作圆的内接正八边形和正十二边形.

复 习 题

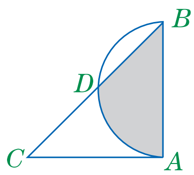
A 组

1. 在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$BC=3$，$AC=4$，以点 C 为圆心、BC 长为半径画圆，请你判断点 A 与⊙C 的位置关系.
2. 若 Rt△ABC 的斜边 $AB=6$，直角边 $AC=3$，则圆心为点 C，半径分别为 2，4 的两个圆与 AB 具有怎样的位置关系？当半径为多长时，AB 与⊙C相切？
3. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$AC=5$，$BC=12$，⊙O 的圆心在线段 CA 上，且它的半径为 3.

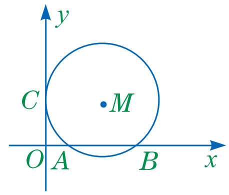


（第 3 题）

   (1) 当点 O 与点 C 重合时，⊙O 与直线 AB 具有怎样的位置关系？
   (2) 如果⊙O 沿直线 CA 移动（点 O 沿直线 CA 移动），当 OC 等于多少时，⊙O 与直线 AB 相切？
4. 计算等边三角形的外接圆面积与内切圆面积的比值.
5. 如图，在△ABC 中，$AB=AC=4$，以 AB 为直径的圆与 AC 相切于点 A，与 BC 相交于点 D. 求图中阴影部分的面积.

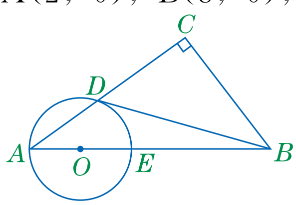


（第 5 题）



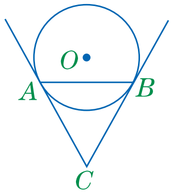
（第 6 题）

6. 如图，在平面直角坐标系中，⊙M 与 x 轴相交于点 $A(2, 0)$，$B(8, 0)$，与 y 轴相切于点 C. 求圆心 M 的坐标.
7. 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle C=90^\circ$，点 O 在 AB 上，以点 O 为圆心、OA 长为半径的圆与 AC，AB 分别交于点 D，E，且 $\angle CBD=\angle A$. 判断直线 BD 与⊙O 的位置关系，并证明你的结论.

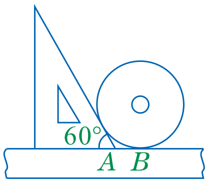


（第 7 题）

8. 一个圆球放置在“V”形架上，如图所示为其截面示意图. 在图中，CA 和 CB 都是⊙O 的切线，切点分别是 A，B. 如果⊙O 的半径为 $2\sqrt{3}$ cm，且 $AB=6$ cm，求∠ACB 的度数.



（第 8 题）



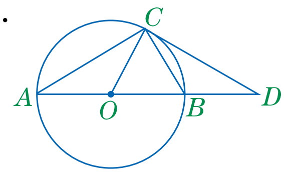
（第 9 题）

9. 如图所示，小明同学测量一个光盘的直径，他将直尺、光盘和三角尺放置于桌面上，并量出 $AB=3.5$ cm. 求此光盘的直径.

10. 已知：如图，AB 为⊙O 的直径，C 为⊙O 上一点，点 D 在 AB 的延长线上，且∠DCB=∠A.

（1）求证：CD 为⊙O 的切线.

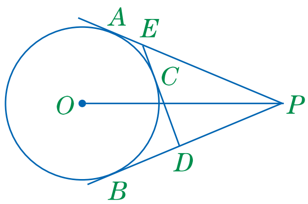
（2）若∠$D=30°$，$BD=10$ cm，求⊙O 的半径.



（第 10 题）

B 组

1. 如图，PA，PB，DE 分别切⊙O 于点 A，B，C. 若⊙O 的半径为5 cm，PO 的长为 13 cm，则△PDE 的周长是多少厘米？

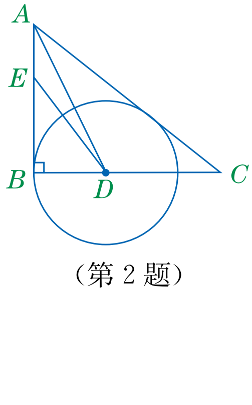


（第 1 题）

2. 已知：如图，在 Rt△ABC 中，∠$ABC=90°$，∠BAC 的平分线交 BC 于点 D，E 为 AB 上的一点，$DE=DC$，以点 D 为圆心、DB 长为半径作⊙D. 求证：

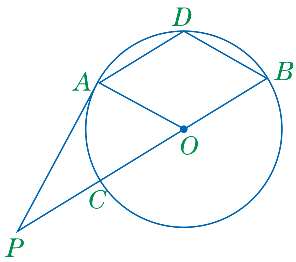
（1）AC 为⊙D 的切线.

（2）$AB+EB=AC$.



（第 2 题）

3. 已知：如图，A，B 为$\odot O$ 上的两点，$\angle AOB=120^\circ$，D 为劣弧$\overset{\frown}{AB}$的中点.

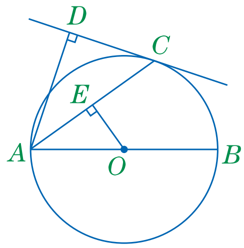


（第 3 题）

（1）求证：四边形 $AOBD$ 为菱形.

（2）延长线段 BO 至点 P，交$\odot O$ 于另一点 C，且 $BP=3OB$，连接 AP. 求证：AP 为$\odot O$ 的切线.

4. 已知：如图，AB 为$\odot O$ 的直径，C 为$\odot O$ 上一点，AD 和过点 C 的切线互相垂直，垂足为 D.



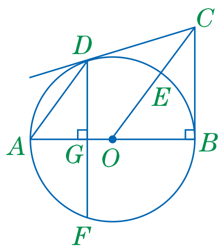
（第 4 题）

（1）求证：AC 平分$\angle DAB$.

（2）过点 O 作线段 AC 的垂线 OE，垂足为 E. 若 $CD=4$，$AC=4\sqrt{5}$，求垂线段 OE 的长.

C 组

1. 已知：如图，AB 为$\odot O$ 的直径，$BC\perp AB$，垂足为 B，连接 OC，交$\odot O$ 于点E，D 为$\odot O$ 上一点，$AD/\!/OC$，$DF\perp AB$，垂足为 G.



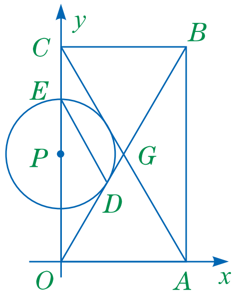
（第 1 题）

（1）求证：E 为$\overset{\frown}{BD}$的中点.

（2）求证：CD 为$\odot O$ 的切线.

（3）若 $\sin \angle BAD=\frac{4}{5}$，$\odot O$ 的半径为 5，求 DF 的长.

2. 如图，在直角坐标系中，矩形 $OABC$ 的顶点 O 与坐标原点重合，G 为两条对角线的交点，顶点 A 在 x 轴上，顶点 C 的坐标为(0，6)，$\angle COB=30°$. 以 OC 上一点 P 为圆心、$\frac{3}{2}$为半径的圆恰与 OB 相切于点 D.



（第 2 题）

（1）求点 P 的坐标.

（2）判断 AC 和$\odot P$ 的位置关系，并说明理由.

（3）已知 E 为$\odot P$ 与 PC 的交点，求 DE 的长.

第三十章

二次函数

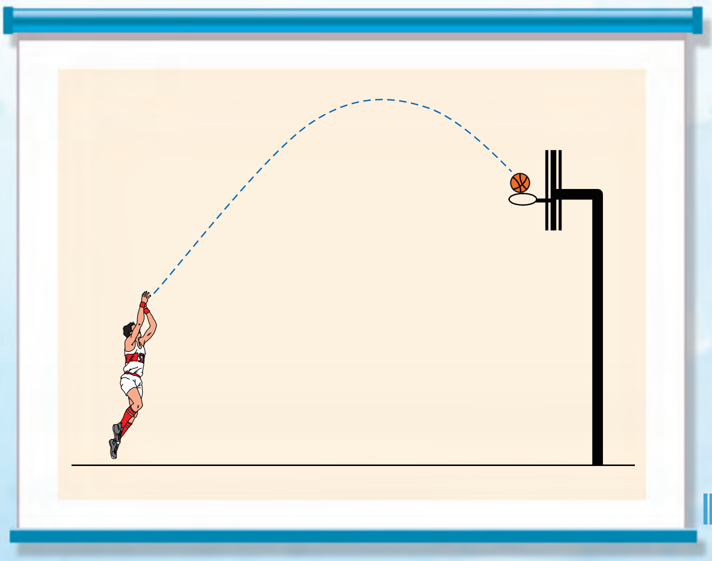
在本章中，我们将学习

- 二次函数的概念
- 二次函数的图像和性质
- 二次函数的应用
- 二次函数与一元二次方程的关系

$y=ax^2+bx+c$

如果一种函数的图像就如投出的篮球在空中划过的一条抛物线，我们一定会觉得很有趣．这种函数就是二次函数．

$y=a(x-h)^2+k$



30.1 二次函数

我们已经学习了一次函数和反比例函数，现在，我们来学习二次函数.

一起探究

1. 如图 30－1－1 所示，用规格相同的正方形瓷砖铺成矩形地面，其中，横向瓷砖比纵向瓷砖每排多 5 块，矩形地面最外面一圈为灰色瓷砖，其余部分全为白色瓷砖. 设纵向每排有 n 块瓷砖.

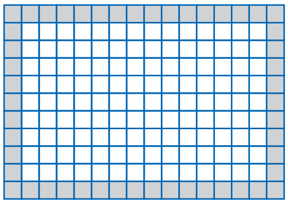


图 30－1－1

（1）设灰色瓷砖的总数为 y 块.

①用含 n 的代数式表示 y，则 $y=$________.

②y 与 n 具有怎样的函数关系？

（2）设白色瓷砖的总数为 z 块.

①用含 n 的代数式表示 z，则 $z=$________.

②z 是 n 的函数吗？说说理由.

2. 某企业今年第一季度的产值为 80 万元，预计产值的季平均增长率为 x.

（1）设第二季度的产值为 y 万元，则 $y=$________________.

设第三季度的产值为 z 万元，则 $z=$________________.

（2）y，z 都是 x 的函数吗？它们的表达式有什么不同？

上面遇到的函数

$$z=n^2+n-6，z=80x^2+160x+80，$$

它们的表达式都是自变量的二次式.

一般地，如果两个变量 x 和 y 之间的函数关系可以表示成 $y=ax^2+bx+c$（a，b，c 是常数，且 $a\neq0$），那么称 y 为 x 的**二次函数**（quadratic function）. 其中，a 叫做二次项系数，b 叫做一次项系数，c 叫做常数项.

上面得到的两个函数，以及 $y=x^2+2x+\frac{1}{4}$，$y=-\frac{5}{4}x^2+\frac{15}{4}x+5$，$y=3x^2$，$y=-\frac{1}{2}x^2+6$ 等，都是二次函数.

大家谈谈

1. 请分别指出上面出现的二次函数表达式的二次项系数、一次项系数和常数项.

2. 谈谈一次函数、反比例函数、二次函数有什么不同.

做一做

新学期开学，全班同学见面时相互亲切握手问候. 设全班有 m 名同学，每两人之间都握手一次，用 y 表示全班同学握手的总次数.

(1) 请用含 m 的代数式表示 y，说明 y 是 m 的二次函数，指出该函数中对应的 a，b，c 的值.

(2) 若全班有 45 名同学，则这样握手的总次数是多少?

练　习

1. 指出下列二次函数中相应的 a，b，c 的值:

(1) $y=-5x^2+3x+1$；(2) $y=(x+1)^2-1$；(3) $y=-x^2+6$.

2. 一块长方形草地，它的长比宽多 2 m. 设它的长为 x m，面积为 y m²，请写出用 x 表示 y 的函数表达式. y 是 x 的二次函数吗? 若是，请指出相应的 a，b，c 的值.

习　题

A　组

1. 在下列函数中，哪些是二次函数?

(1) $y=x^2$；　　(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+1$；

(3) $y=\frac{1}{x}$；　　(4) $y=x+2$；

(5) $y=x^2-2x+2$；　　(6) $y=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$.

2. 正方形的边长为 x cm，面积为 y cm^2，请写出用 x 表示 y 的函数表达式. y 是 x 的二次函数吗?

3. 一台机器原价是 120 万元，每年的折旧率为 x，两年后这台机器的价格为 y 万元. 求 y 关于 x 的函数表达式.

B 组

1. 求出与 x 值对应的函数值：

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
$y=x^2+2x+3$									
$y=-2x^2-4x+9$									

2. 对于二次函数 $y=x^2+2x+3$，有几个 x 的值与 $y=27$ 相对应？请你利用方程求出这样的 x 的值.

30.2 二次函数的图像和性质

像研究一次函数和反比例函数的性质那样，我们将先画二次函数的图像，再借助此图像来探究二次函数的性质.

二次函数 $y=ax^2$ 的图像和性质

已知二次函数 $y=x^2$，我们可按下列步骤画出它的图像.

（1）列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

（2）描点：如图 30－2－1，在直角坐标系中描出相应的点.

（3）连线：如图 30－2－2，用平滑曲线顺次连接各点，得到二次函数 $y=x^2$ 的图像.

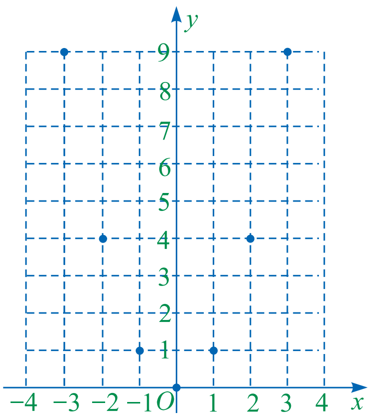


图 30－2－1

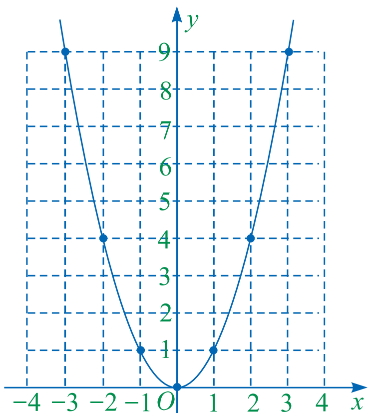


图 30－2－2

观察与思考

观察二次函数 $y=x^2$ 的图像，回答下列问题：

（1）若将 $y=x^2$ 的图像沿着 y 轴对折，y 轴两侧的部分能够完全重合吗？$y=x^2$ 的图像是不是轴对称图形？如果是，那么它的对称轴是哪条直线？

（2）$y=x^2$ 的图像有最低点吗？如果有，那么最低点的坐标是什么？

做一做

1. 在如图 30－2－3 所示的直角坐标系中，已画出了 $y=x^2$ 的图像，请再画出函数 $y=-x^2$ 的图像.

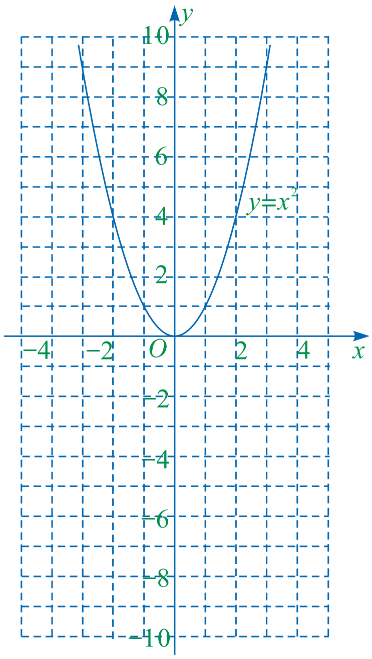


图 30－2－3

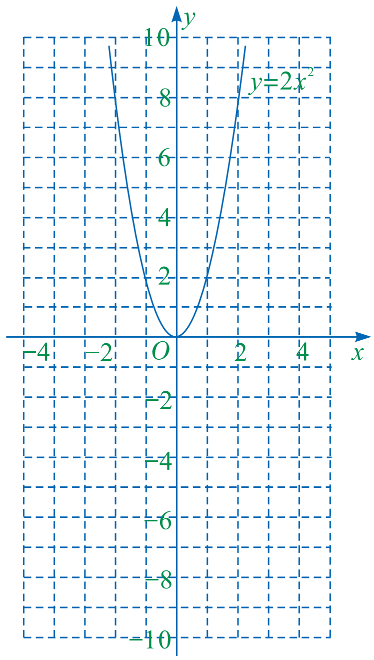


图 30－2－4

2. 在如图 30－2－4 所示的直角坐标系中，已画出了 $y=2x^2$ 的图像，请再画出函数 $y=-2x^2$ 的图像.

大家谈谈

对比函数 $y=x^2$ 与 $y=-x^2$，$y=2x^2$ 与 $y=-2x^2$ 的图像，就二次函数 $y=ax^2$ 回答以下问题：

(1) 图像的开口方向和它的最高(或最低)点与 a 的符号具有怎样的关系?

(2) 图像是不是轴对称图形? 如果是，那么它的对称轴是哪条直线?

(3) 根据图像，说明 y 的值随 x 的值增大而变化的情况.

二次函数 $y=ax^2$ 的图像是一条关于 y 轴对称的曲线，这样的曲线叫做**抛物线**(parabola)，曲线的对称轴叫做抛物线的对称轴，抛物线与它的对称轴的交点叫做抛物线的**顶点**(vertex).

二次函数 $y=ax^2$ 的图像和性质

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=ax^2$ $(a>0)$	向上	y 轴	原点 $(0,0)$	当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而增大	有最低点 $(0,0)$. 当 $x=0$ 时，$y_{最小}=0$
$y=ax^2$ $(a<0)$	向下	y 轴	原点 $(0,0)$	当 $x<0$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>0$ 时，y 随 x 的增大而减小	有最高点 $(0,0)$. 当 $x=0$ 时，$y_{最大}=0$

为方便起见，我们把 y 轴记为直线 $x=0$，把过点 $(a,0)$ 且垂直于 x 轴的直线记为直线 $x=a$；把 x 轴记为直线 $y=0$，把过点 $(0,b)$ 且垂直于 y 轴的直线记为直线 $y=b$. 二次函数 $y=ax^2$ 也称为抛物线 $y=ax^2$.

练　习

1. 不画图像，请指出函数 $y=-9x^2$ 图像的开口方向、对称轴、顶点坐标以及最高(或最低)点.

2. 先指出抛物线 $y=-\frac{1}{3}x^2$ 的开口方向、对称轴和顶点坐标，然后再画出它的图像.

习　题

A　组

1. 指出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(1) $y=6x^2$；　(2) $y=-4x^2$；　(3) $y=\frac{3}{4}x^2$；　(4) $y=-\frac{1}{5}x^2$.

2. 分别指出抛物线 $y=3x^2$ 与 $y=-3x^2$ 的开口方向、对称轴、顶点坐标和 y 随 x 的增大而变化的情况，并在同一直角坐标系中画出它们的图像.

B　组

1. 对于抛物线 $y=2x^2$ 和 $y=x^2$，你认为它们有哪些不同点?

2. 如果抛物线 $y=ax^2$ 经过点 $M(2,5)$，请求出 a 的值，并指出该抛物线的开口方向.

二次函数 $y=a(x-h)^2$ 与 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像和性质

观察与思考

小颖在同一个直角坐标系中，对二次函数 $y=x^2$，$y=(x-3)^2$ 和 $y=(x+2)^2$ 采用如下列表、描点、连线的方式，画出了它们的图像.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
x	…	0	1	2	3	4	5	6	…
$y=(x-3)^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…
x	…	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	…
$y=(x+2)^2$	…	9	4	1	0	1	4	9	…

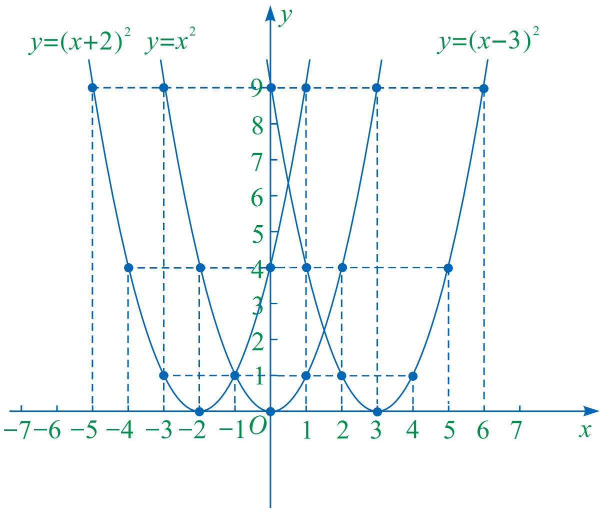


图 30-2-5

从形状上看，二次函数 $y=(x-3)^2$，$y=(x+2)^2$ 的图像与二次函数 $y=x^2$ 的图像是完全相同的，但它们的位置不同.

(1) $y=(x-3)^2$ 的图像可以由 $y=x^2$ 的图像沿什么方向平移多少个单位长度得到?

(2) $y=(x+2)^2$ 的图像可以由 $y=x^2$ 的图像沿什么方向平移多少个单位长度得到?

可以知道，二次函数 $y=a(x-h)^2$ 的图像可以由 $y=ax^2$ 的图像作如下平移得到：当 $h>0$ 时，向右平移 h 个单位长度；当 $h<0$ 时，向左平移 $|h|$ 个单位长度.

做一做

由函数 $y=-2x^2$ 的图像，分别经过怎样的平移可以得到下列函数的图像？

（1）$y=-2(x+1)^2$；（2）$y=-2(x-4)^2$；（3）$y=-2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2$.

一起探究

在图 30－2－6 中的直角坐标系中，已经画出了二次函数 $y=(x-3)^2$ 的图像.

（1）请你在该坐标系中再画出二次函数 $y=(x-3)^2+1$ 和 $y=(x-3)^2-3$ 的图像.

（2）试着说明函数 $y=(x-3)^2+1$ 和 $y=(x-3)^2-3$ 的图像可以分别由函数 $y=x^2$ 的图像经过怎样的平移得到.

（3）请写出函数 $y=(x-3)^2+1$ 和 $y=(x-3)^2-3$ 的图像的对称轴与顶点坐标.

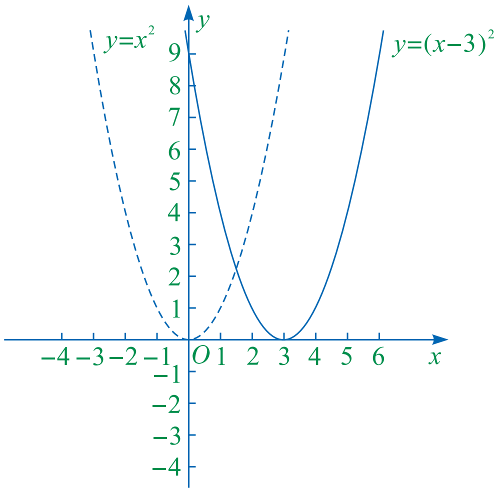


图 30－2－6

大家谈谈

（1）请说出将二次函数 $y=-2x^2$ 的图像，分别经过怎样的平移，可以得到函数 $y=-2(x-4)^2+6$ 和 $y=-2\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-4$ 的图像.

(2) 指出函数 $y=-2(x-4)^2+6$ 和 $y=-2\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-4$ 的图像的对称轴与顶点坐标，并说明是如何确定的.

二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像和性质

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=a(x-h)^2+k$ $(a>0)$	向上	直线 $x=h$	(h, k)	当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而增大	有最低点 (h, k)，当 $x=h$ 时，$y_{最小}=k$
$y=a(x-h)^2+k$ $(a<0)$	向下	直线 $x=h$	(h, k)	当 $x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小	有最高点 (h, k)，当 $x=h$ 时，$y_{最大}=k$

例 1 (1) 求函数 $y=-\frac{1}{2}(x+5)^2-2$ 的最大(或最小)值.

(2) 先将函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图像向左平移 2 个单位长度，再向下平移 3 个单位长度，请写出平移后得到的图像的函数表达式.

解：(1) 由 $-\frac{1}{2}<0$，知该函数有最大值.

当 $x=-5$ 时，函数取得最大值，$y_{最大}=-2$.

(2) 平移后得到的图像的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-3$.

练　习

填表：

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=-(x-2)^2+\frac{2}{3}$					
$y=\frac{1}{2}(x+3)^2-3$					
$y=-(x+1)^2+5$					

习　题

A　组

1. 怎样才能由 $y=2x^2$ 的图像经过平移得到函数 $y=2(x-6)^2+7$ 的图像呢？
   小亮说：先向左平移 6 个单位长度，再向上平移 7 个单位长度.
   小明说：先向右平移 6 个单位长度，再向上平移 7 个单位长度.
   小惠说：先向上平移 7 个单位长度，再向右平移 6 个单位长度.
   你同意谁的说法？请说明理由.
2. 指出下列函数图像的开口方向、对称轴、顶点坐标和函数的最大(或最小)值.
   (1) $y=0.6x^2$，$y=0.6(x-2)^2$，$y=0.6(x-2)^2+4$.
   (2) $y=-\frac{3}{4}x^2$，$y=-\frac{3}{4}(x+4)^2$，$y=-\frac{3}{4}(x+4)^2-4$.
   (3) $y=-6x^2$，$y=-6(x-\frac{2}{3})^2$，$y=-6(x-\frac{2}{3})^2+8$.

B　组

1. 将二次函数 $y=-8x^2$ 的图像向左平移 3 个单位长度，再向下平移 2 个单位长度，求新图像的函数表达式.
2. 指出下列每组两个二次函数图像之间的位置关系.
   (1) $y=3x^2$ 与 $y=-3x^2$.
   (2) $y=3(x+2)^2$ 与 $y=3(x-2)^2$.
   (3) $y=-2(x+1)^2+2$ 与 $y=-2(x+1)^2-2$.
   (4) $y=(x-2)^2+1$ 与 $y=(x+2)^2-1$.

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像和性质

每个二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 都可以通过配方化成

$$y=a(x-h)^2+k$$

的形式：

$$
\begin{aligned}
y &= ax^2+bx+c \\
&= a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c \\
&= a\left[x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-a\cdot\frac{b^2}{4a^2}+c \\
&= a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.
\end{aligned}
$$

其中，$h=-\frac{b}{2a}$，$k=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

做一做

对比二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图像和性质，填写二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的相关问题的表格：

表达式	开口方向	对称轴	顶点坐标	y 随 x 的变化情况	最大(或最小)值
$y=ax^2+bx+c$ $(a>0)$					
$y=ax^2+bx+c$ $(a<0)$					

二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条抛物线，它的对称轴是 $x=-\frac{b}{2a}$.

若 $a>0$，则抛物线开口向上，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 取得最小值，且 $y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

若 $a<0$，则抛物线开口向下，顶点坐标是 $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 当 $x<-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而增大；当 $x>-\frac{b}{2a}$ 时，y 随 x 的增大而减小；当 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，y 取得最大值，且 $y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

为方便起见，我们把二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 也称为抛物线 $y=ax^2+bx+c$.

例 2 求抛物线 $y=x^2+2x-1$ 的对称轴和顶点坐标，并画出它的图像.

解：∵ $y=x^2+2x-1=(x+1)^2-2$，

∴ 抛物线的对称轴为 $x=-1$，顶点坐标为 $(-1,-2)$.

（1）列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	…
$y=x^2+2x-1$	…	2	-1	-2	-1	2	…

（2）在直角坐标系中，描点，连线，即得二次函数 $y=x^2+2x-1$ 的图像，如图 30－2－7.

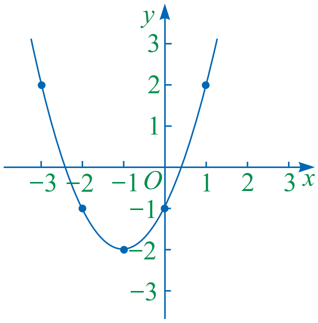


图 30－2－7

例 3 根据下列条件，确定抛物线的表达式.

（1）抛物线 $y=-2x^2+px+q$ 的顶点坐标为 $(-3,5)$.

（2）抛物线 $y=ax^2+bx-6$ 经过点 $A(-1,3)$ 和 $B(2,-6)$.

解：（1）∵ $y=-2x^2+px+q=-2\left(x-\dfrac{p}{4}\right)^2+\dfrac{p^2+8q}{8}$，

∴ $\dfrac{p}{4}=-3$，$\dfrac{p^2+8q}{8}=5$，

∴ $p=-12$，$q=-13$.

所以该抛物线的表达式为 $y=-2x^2-12x-13$.

（2）点 $A(-1,3)$ 和 $B(2,-6)$ 的坐标满足抛物线的表达式，即

$$\begin{cases} a-b-6=3, \\ 4a+2b-6=-6. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=3, \\ b=-6. \end{cases}$$

所以该抛物线的表达式为 $y=3x^2-6x-6$.

练　习

1. 求下列抛物线的对称轴和顶点坐标，并指出它们的开口方向.

（1）$y=3x^2-6x+1$；　　（2）$y=-2x^2-6x-1$.

2. 画出抛物线 $y=x^2-4x+2$ 的图像，并说明当 $x=-2$ 和 $x=-1$ 时，哪一个对应的函数值较大.

习 题

A 组

1. 求下列抛物线的对称轴和顶点坐标，并指出它们的开口方向.

(1) $y=x^2-2x+8$；

(2) $y=-5x^2+3x-2$.

2. 已知抛物线 $y=-x^2+2x+2$.

(1) 这条抛物线的对称轴是________，顶点坐标是________.

(2) 画出这条抛物线.

(3) 这条抛物线上 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ 两点的横坐标满足 $x_1>x_2>1$，观察图像，指出 y_1 与 y_2 的大小关系.

3. 通过配方，把下列函数化为 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，并指出函数的最大(或最小)值.

(1) $y=-2x^2-5x+9$；　　(2) $y=2x^2+3x$；

(3) $y=\frac{5}{2}x^2-4x+1$；　　(4) $y=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}x-2$.

B 组

1. 根据下列条件，求抛物线的表达式.

(1) 抛物线 $y=x^2+bx+c$ 的顶点为 $M(2, 3)$.

(2) 抛物线 $y=ax^2-2x+c$ 经过点 $A(-1, 0)$和 $B(2, -9)$.

2. 已知抛物线 $y=x^2-2px+16$ 的顶点在坐标轴上，试确定 p 的值.

30.3 由不共线三点的坐标确定二次函数*

已知两点的坐标，可以确定一次函数. 如何由不共线三点的坐标来确定二次函数呢?

在直角坐标系中，由不共线三点的坐标可以确定二次函数的表达式.

已知不共线的三点 $A(1, 3)$，$B(2, -2)$，$C(-1, 1)$，怎样确定过这三点的二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的表达式呢?

联想用待定系数法求一次函数表达式的过程，小亮想到了用待定系数法求二次函数的表达式：

将 A，B，C 三点的坐标分别代入二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中，得

$$\begin{cases} a+b+c=3, \\ 4a+2b+c=-2, \\ a-b+c=1. \end{cases} \quad 解得 \begin{cases} a=-2, \\ b=1, \\ c=4. \end{cases}$$

所求二次函数的表达式为 $y=-2x^2+x+4$.

大家谈谈

用待定系数法求二次函数表达式的过程与求一次函数表达式的过程有哪些相同点与不同点?

例 已知三点 $A(0, 1)$，$B(1, 0)$，$C(2, 3)$，求由这三点所确定的二次函数表达式.

解：设所求二次函数为 $y=ax^2+bx+c$. 将 A，B，C 三点的坐标分别代入二次函数表达式中，得

$$\begin{cases} c=1, \\ a+b+c=0, \\ 4a+2b+c=3. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=2, \\ b=-3, \\ c=1. \end{cases}$$

所求二次函数的表达式为 $y=2x^2-3x+1$.

做一做

在直角坐标系中，已知点 $A(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$，$B(-\frac{3}{2}, 0)$，$C(\frac{1}{2}, 0)$. 求由 A，B，C 三点所确定的二次函数表达式.

练 习

求由 $A(1, 7)$，$B(2, 8)$，$C(3, 11)$三点所确定的二次函数表达式.

习 题

A 组

1. 已知二次函数 $y=ax^2-4x+c$ 的图像经过点 $A(-1, -1)$，$B(3, -9)$.
   (1) 求这个二次函数的表达式.
   (2) 写出这条抛物线的对称轴和顶点坐标.
2. 求由 $A(1, 0)$，$B(3, 2)$，$C(-2, 12)$三点所确定的二次函数表达式.

B 组

1. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 中的自变量 x 和函数 y 的部分对应值如下表：

x	…	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	…
y	…	$-\frac{5}{4}$	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	$-\frac{5}{4}$	0	$\frac{7}{4}$	…

   请用不同的方法求出这个二次函数的表达式.
2. 若过 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$，$C(x_3, y_3)$三点的函数的表达式为 $y=ax^2+bx+c$，则过 $A'(x_1, y_1+1)$，$B'(x_2, y_2+1)$，$C'(x_3, y_3+1)$三点的函数的表达式为 $y=ax^2+bx+(c+1)$. 这是为什么？

30.4 二次函数的应用

通过建立二次函数模型并利用它的有关性质，可以解决许多实际问题.

例 1 如图 30－4－1，一名运动员在距离篮圈中心 4 m(水平距离)远处跳起投篮，篮球准确落入篮圈. 已知篮球运行的路线为抛物线，当篮球运行的水平距离为 2.5 m 时，篮球达到最大高度，且最大高度为 3.5 m. 如果篮圈中心距离地面 3.05 m，那么篮球在该运动员出手时的高度是多少米?

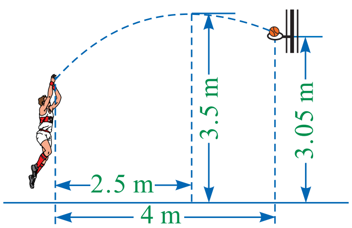


图 30－4－1

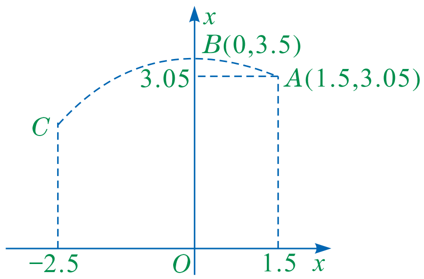


图 30－4－2

分析：由于篮球在空中运行的路线为一条抛物线，所以可以建立恰当的直角坐标系，求出该抛物线的表达式，借助表达式来解决所求问题. 由题设，已知抛物线的顶点，建立顶点在 y 轴上的直角坐标系，可使所得的函数表达式较简单.

解：如图 30－4－2，建立直角坐标系，篮圈中心为点 $A(1.5, 3.05)$，篮球在最大高度时的位置为点 $B(0, 3.5)$. 以点 C 表示运动员投篮球的出手处.

设以 y 轴(直线 $x=0$)为对称轴的抛物线为 $y=a(x-0)^2+k$，即 $y=ax^2+k$，而点 A，B 在这条抛物线上，所以有

$$\begin{cases} 2.25a+k=3.05, \\ k=3.5. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} a=-0.2, \\ k=3.5. \end{cases}$$

所以该抛物线的表达式为 $y=-0.2x^2+3.5$.

当 $x=-2.5$ 时，$y=-0.2\times(-2.5)^2+3.5=2.25(\text{m})$.

答：篮球在该运动员出手时的高度为 2.25 m.

做一做

如图 30－4－3，某喷灌器 AB 的喷头高出地面 1.35 m，喷出的水流呈抛物线形从高 1 m 的小树 CD 上面的点 E 处飞过，点 C 距点 A 4.4 m，点 E 在直线 CD 上，且距点 D 0.35 m，水流最后落在距点 A 5.4 m 远的点 F 处．喷出的水流最高处距地面多少米？

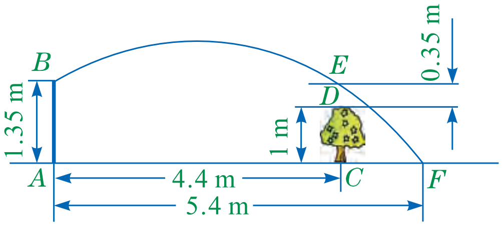


图 30－4－3

水流最高处到地面的距离即为抛物线顶点到地面的距离．为求抛物线的表达式，小亮和小惠分别建立了如图 30－4－4 和图 30－4－5 所示的直角坐标系，并写出了相关点的坐标．

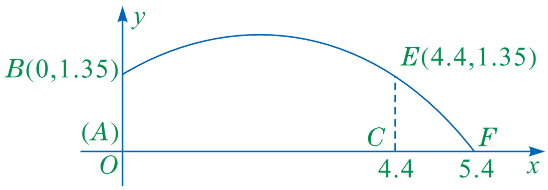


图 30－4－4

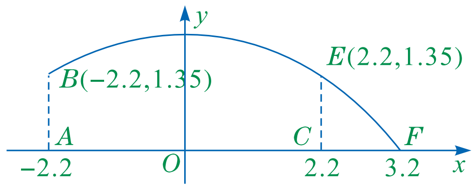


图 30－4－5

（1）请分别按小亮和小惠建立的直角坐标系求这条抛物线的表达式.

（2）根据以上两种表达式，求出水流最高处到地面的距离.

练　习

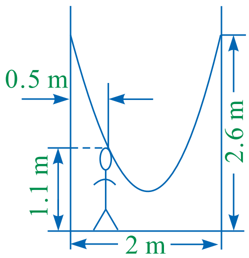
对上面的抛物线形水流问题，请以地平线 ACF 为横轴，以 F 为原点建立直角坐标系，并解决相应的问题.

习　题

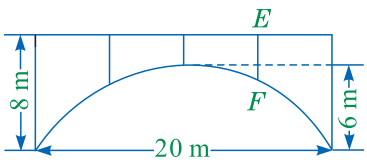
A　组

1．如图，在相距 2 m 的两棵树上拴了一根绳子做成一个简易秋千，拴绳子

的地方都高出地面 2.6 m，绳子自然下垂近似呈抛物线形. 当身高 1.1 m 的小妹距较近的那棵树 0.5 m 时，头部刚好接触到绳子，则绳子的最低点距地面的距离为________ m.



（第 1 题）



（第 2 题）

2. 如图，一座拱桥的轮廓呈抛物线形，拱高 6 m，跨度为 20 m，相邻两立柱间的距离均为 5 m.

(1) 建立适当的直角坐标系，求这条抛物线的表达式.

(2) 求立柱 EF 的长.

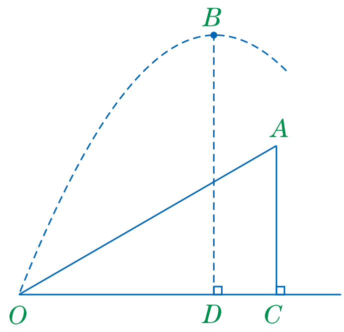
(3) 拱桥下面拟铺设行车道，要保证高 3 m 的汽车能够通过(车顶与桥拱的距离不小于 0.3 m)，行车道最宽可铺设多少米?

B 组

如图，一高尔夫球员从山坡下的点 O 处打出一球，球向山坡上的球洞点 A 处飞去，球的飞行路线为抛物线. 如果不考虑空气阻力，当球达到最大高度12 m时，球移动的水平距离为 9 m. 已知山坡 OA 与水平方向 OC 的夹角为 30°，O，A 两点间的距离为 $8\sqrt{3}$ m.

(1) 建立适当的直角坐标系，求球的飞行路线所在抛物线的函数表达式.

(2) 这一杆能否把高尔夫球从点 O 处直接打入点 A 处球洞?



对于二次函数 $y=ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$ 来说，当 $a>0$，且 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最小}=\frac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$，且 $x=-\frac{b}{2a}$ 时，$y_{最大}=\frac{4ac-b^2}{4a}$. 二次函数的这一特征，使它成为解决许多求“最小值”或“最大值”问题的重要工具.

例 2 用总长度为 24 m 的不锈钢材料制成如图 30-4-6 所示的外观为矩形的框架，其横档和竖档分别与 AD，AB 平行. 设 $AB=x$ m，当 x 为多少时，矩形框架 $ABCD$ 的面积 S 最大？最大面积是多少平方米？

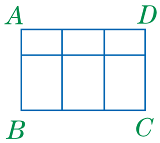


图 30-4-6

解：∵ $S=\dfrac{24-4x}{3}\cdot x=-\dfrac{4}{3}x^2+8x=-\dfrac{4}{3}(x-3)^2+12$，

$a=-\dfrac{4}{3}<0$，

∴ 当 $x=3$ 时，S 有最大值，且 $S_{最大}=12\ \mathrm{m}^2$.

答：当 $x=3$ 时，矩形框架 $ABCD$ 的面积最大，最大面积为 $12\ \mathrm{m}^2$.

例 3 一工艺师生产的某种产品按质量分为 9 个档次. 第 1 档次(最低档次)的产品一天能生产 80 件，每件可获利润 12 元. 产品每提高一个档次，每件产品的利润增加 2 元，但一天产量减少 4 件. 如果只从生产利润这一角度考虑，他生产哪个档次的产品，可获得最大利润？

解：设生产 x 档次的产品时，每天所获得的利润为 w 元，则

$$\begin{aligned}w&=[12+2(x-1)][80-4(x-1)]\\&=(10+2x)(84-4x)\\&=-8x^2+128x+840\\&=-8(x-8)^2+1\ 352.\end{aligned}$$

当 $x=8$ 时，w 有最大值，且 $w_{最大}=1\ 352$.

答：该工艺师生产第 8 档次的产品，可使每天获得的利润最大，最大利润为 1 352 元.

做一做

某种燃气灶的开关旋钮可从 0° 旋转到 90°. 为测试开关旋钮在不同角度的燃气用量，在相同条件下，用开关旋钮的 5 个不同角度分别烧开一壶水，得到下列对应值：

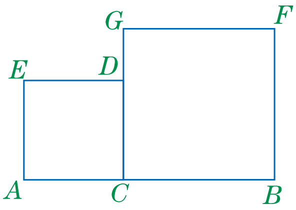
开关旋钮旋转过的角度	20°	50°	70°	80°	90°
烧开一壶水所用燃气量/dm^3	73	67	83	97	115

(1) 若所用燃气量是开关旋钮转过角度的二次函数，求这个二次函数的表达式.

(2) 当开关旋钮转过多少度时，烧开一壶水所用燃气量最少？

练 习

如图，已知 $AB=2$，点 C 在线段 AB 上，四边形 $ACDE$ 和四边形 $CBFG$ 都是正方形. 设 $BC=x$.



（1）$AC=$________.

（2）设正方形 $ACDE$ 和正方形 $CBFG$ 的总面积为 S，用 x 表示 S 的函数表达式为 $S=$________.

（3）总面积 S 有最大值还是最小值？这个最大值或最小值是多少？

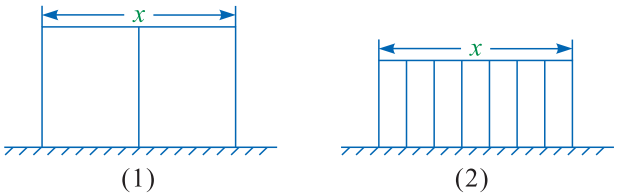
（4）当总面积 S 取最大值或最小值时，点 C 在 AB 的什么位置？

习 题

A 组

1. 用 60 m 长的篱笆围成一个一边靠墙、中间用篱笆隔开的矩形养鸡场.

（1）如果中间只有一道篱笆，如图(1)，并设矩形一边长为 x m，那么当 x 为何值时，养鸡场的面积最大？



（第 1 题）

（2）如果养鸡场中间有 6 道篱笆，如图(2)，并设矩形一边长为 x m，那么当 x 为何值时，养鸡场的面积最大？

2. 某产品的成本是 120 元/件，在试销阶段，当产品的售价为 x(元/件)时，日销量为 $(200-x)$ 件.

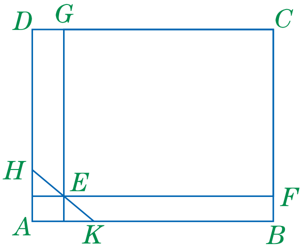
（1）写出用售价 x(元/件)表示每日的销售利润 y(元)的表达式.

（2）当日销售利润是 1 500 元时，产品的售价是多少？日销量是多少件？

（3）当售价定为多少时，日销售利润最大？最大日销售利润是多少元？

B 组

1. 某社区为了美化环境，准备在一块矩形土地 $ABCD$ 上修建一个矩形休闲广场 $EFCG$. 为了使三角形文物保护区 AKH 不被破坏，休闲广场的顶点 E 不能在文物保护区内. 已知 $AB=52$ m，$AD=40$ m，$AK=12$ m，$AH=9$ m.



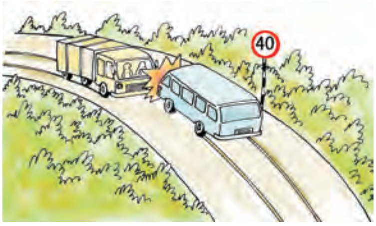
（第 1 题）

   (1) 当 E 为 HK 的中点时，休闲广场的面积是多少平方米？

   (2) 当点 E 在 HK 上什么位置时，休闲广场的面积最大？最大面积是多少平方米？

2. 某食品零售店为食品厂代销一种面包，未售出的面包可退回厂家. 统计销售情况时发现，当这种面包的价格定为 7 角/个时，每天可卖出160 个. 在此基础上，这种面包的单价每提高 1 角，该零售店每天就会少卖出 20 个. 已知该零售店每个面包的成本是 5 角. 当面包单价定为多少角时，该零售店每天销售这种面包获得的利润最大？最大利润为多少？

做一做



汽车在行驶中，由于惯性作用，刹车后还要向前滑行一段距离才能停住，这段距离叫做刹车距离. 刹车距离是分析和处理道路交通事故的一个重要因素. 有一个道路交通事故案例：甲、乙两车在限速为 40 km/h 的湿滑弯道上相向而行，待望见对方，同时刹车时已经晚了，两车还是相撞了. 事后经现场勘察，测得甲车的刹车距离为 12 m，乙车的刹车距离超过 10 m，但小于 12 m. 根据有关资料，在这样的湿滑路面上，甲车的刹车距离 $s_{甲}$(m)与车速 x(km/h)之间的关系为 $s_{甲}=0.1x+0.01x^2$，乙车的刹车距离 $s_{乙}$(m)与车速 x(km/h)之间的关系为 $s_{乙}=\frac{1}{4}x$.

(1) 甲车刹车前的行驶速度是多少千米/时？甲车是否违章超速？

(2) 乙车刹车前的行驶速度在什么范围内？乙车是否违章超速？

已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的某一个函数值 $y=m$，就可利用一元二次方程 $ax^2+bx+c=m$ 确定与它对应的 x 的值.

例 4 如图 30－4－7，已知边长为 1 的正方形 $ABCD$，在 BC 边上有一动点 E，连接 AE，作 $EF\perp AE$，交 CD 边于点 F.

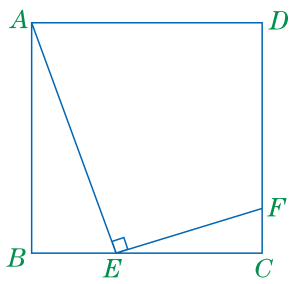


图 30－4－7

（1）CF 的长可能等于 $\frac{3}{4}$ 吗？

（2）点 E 在什么位置时，CF 的长为 $\frac{3}{16}$？

解：设 $BE=x$，$CF=y$.

∵ $\angle BAE=\angle CEF$，

∴ $\mathrm{Rt}\triangle ABE\backsim\mathrm{Rt}\triangle ECF$.

∴ $\frac{BE}{CF}=\frac{AB}{EC}$，即 $\frac{x}{y}=\frac{1}{1-x}$.

∴ $y=-x^2+x=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$.

（1）∵ $y_{最大}=\frac{1}{4}$，

∴ CF 的长不可能等于 $\frac{3}{4}$.

（2）设 $-x^2+x=\frac{3}{16}$，即 $16x^2-16x+3=0$.

解得 $x_1=\frac{1}{4}$，$x_2=\frac{3}{4}$.

∴ 当 BE 的长为 $\frac{1}{4}$ 或 $\frac{3}{4}$ 时，均有 CF 的长为 $\frac{3}{16}$.

练　习

当路况良好时，在干燥的路面上，某种汽车的刹车距离 s(m)与车速 v(km/h)之间的关系如下表：

v/(km/h)	…	40	60	80	100	120	…
s/m	…	2	4.2	7.2	11	15.6	…

（1）在平面直角坐标系中描出每对(v, s)所对应的点，并用平滑的曲线顺次连接各点.

（2）利用图像验证刹车距离 s(m)与车速 v(km/h)是否具有如下关系：

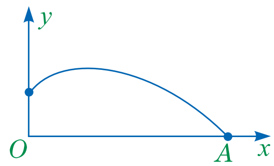
$$s=\frac{1}{1\ 000}v^2+\frac{1}{100}v.$$

（3）求 $s=9$ m 时的车速 v.

习　题

A　组

1. 如图，一名男生推铅球，铅球行进高度 y(m)与水平距离 x(m)之间的关系为 $y=-\frac{1}{12}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$.



（第 1 题）

（1）求铅球被推出的水平距离.

（2）通过计算判断铅球行进高度能否达到 4 m.

2. 某工艺品厂生产一款工艺品. 已知这款工艺品的生产成本为 60 元/件. 经市场调研发现，这款工艺品每天的销售量 y(件)与售价 x(元/件)之间存在着如下表所示的一次函数关系：

售价 x/(元/件)	…	70	90	…
销售量 y/件	…	3 000	1 000	…

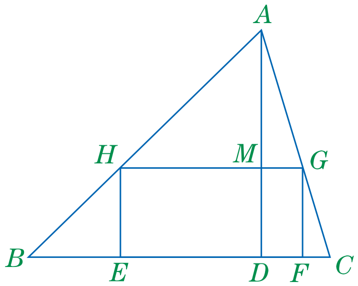
（1）求销售量 y(件)与售价 x(元/件)之间的函数关系式.

（2）求每天的销售利润 w(元)与售价 x(元/件)之间的函数关系式.

（3）如何定价才能使该工艺品厂每天获得的销售利润为 40 000 元?

B 组

如图，$\triangle ABC$ 是一块铁皮余料. 已知底边 $BC=160$ cm，高 $AD=120$ cm. 在铁皮余料上截取一个矩形 $EFGH$，使点 H 在 AB 上，点 G 在 AC 上，点 E，F 在 BC 上，AD 交 HG 于点 M.



(1) 设 $HG=y$ cm，$HE=x$ cm，试确定用 x 表示 y 的函数表达式.

(2) 当 x 为何值时，矩形 $EFGH$ 的面积 S 最大?

(3) 以面积最大时的矩形 $EFGH$ 为侧面，围成一个无底圆桶，怎样围，圆桶的体积较大? 请说明理由. (接缝处忽略不计，结果可保留 π)

30.5 二次函数与一元二次方程的关系

二次函数和一元二次方程有着紧密的联系．现在，我们就来探究它们之间的关系．

观察与思考

如图 30－5－1，已知同一直角坐标系中抛物线 $y=x^2+2x-3$，$y=x^2-6x+9$，$y=x^2-4x+6$.

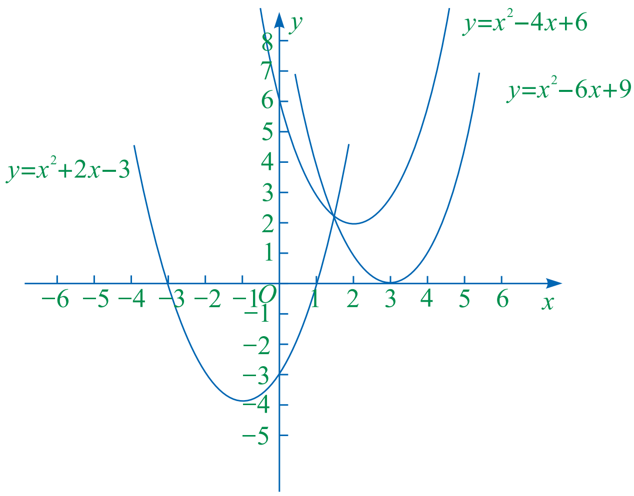


图 30－5－1

（1）这三条抛物线和 x 轴相交（或不相交）的情况分别是怎样的？

（2）当 $y=0$ 时，这三条抛物线的表达式对应的方程分别是 $x^2+2x-3=0$，$x^2-6x+9=0$，$x^2-4x+6=0$，它们根的情况分别是怎样的？

（3）上述三个方程根的情况与它们所对应的三条抛物线和 x 轴相交（或不相交）的情况具有怎样的关系？

一般地，抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 和 x 轴相交（或不相交）的情况与一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的情况有如下对应关系：

抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 与 x 轴的位置关系	有两个公共点	有一个公共点	无公共点
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 根的情况	有两个不相等的实根	有两个相等的实根	没有实根

做一做

不画图像，说明下列抛物线和 x 轴相交(或不相交)的情况.

(1) $y=x^2-2x-1$； (2) $y=-2x^2+7x-7$； (3) $y=4x^2-12x+9$.

根据抛物线和 x 轴相交(或不相交)的情况与其对应的一元二次方程根的情况的关系，以及二次函数随自变量增大而增大(或减小)的性质，可以借助二次函数来求一元二次方程根的近似值.

例 求方程 $x^2-2x-6=0$ 较小根的近似值.（结果精确到 0.1）

解：如图 30-5-2，画出二次函数 $y=x^2-2x-6$ 的图像.

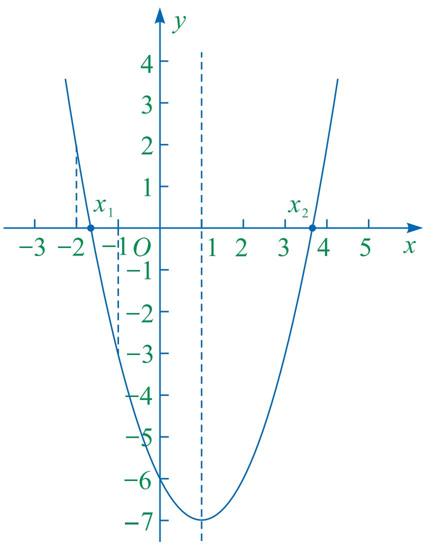


图 30-5-2

观察画出的抛物线，设它与 x 轴的交点的横坐标为 x_1 和 x_2，不妨设 $x_1<x_2$.

现在来求 x_1 的近似值.

(1) 容易看出：

当 $x=-2$ 时，$y>0$；当 $x=-1$ 时，$y<0$，且在 $-2<x<-1$

范围内，y 随 x 的增大而减小，所以

$$-2<x_1<-1.$$

(2) 取 -2 和 -1 的中间数 -1.5（中间数为 $\frac{-2-1}{2}$），代入表达式中试值.

当 $x=-1.5$ 时，$y=(-1.5)^2-2\times(-1.5)-6=-0.75<0$；当 $x=-2$ 时，$y>0$. 在 $-2<x<-1.5$ 范围内，y 随 x 的增大而减小，所以

$$-2<x_1<-1.5.$$

(3) 取 -2 和 -1.5 的中间数 -1.75，代入表达式中试值.

当 $x=-1.75$ 时，$y=(-1.75)^2-2\times(-1.75)-6=0.5625>0$；当 $x=-1.5$ 时，$y<0$. 在 $-1.75<x<-1.5$ 范围内，y 随 x 的增大而减小，所以

$$-1.75<x_1<-1.5.$$

(4) 取 -1.75 和 -1.5 的中间数 -1.625，代入表达式中试值.

当 $x=-1.625$ 时，$y=(-1.625)^2-2\times(-1.625)-6=-0.109375<0$；当 $x=-1.75$ 时，$y>0$. 在 $-1.75<x<-1.625$ 范围内，y 随 x 的增大而减小，所以

$$-1.75<x_1<-1.625.$$

$x_1\approx-1.7$ 即为精确到 0.1 的近似值.

练　习

求例题中 x_2 精确到 0.1 的近似值.

习　题

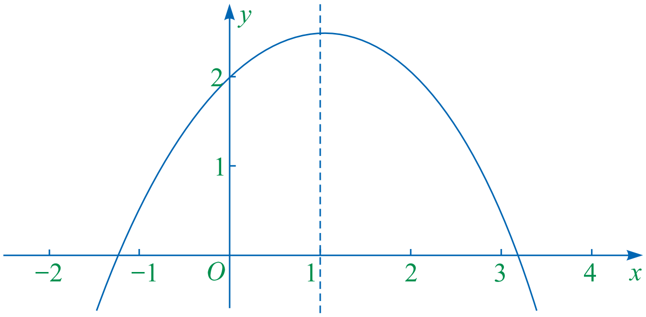
A　组

1. 指出下列函数的图像与 x 轴相交（或不相交）的情况，并说明理由.

(1) $y=2x^2-3x$；　　(2) $y=-x^2+8x-16$；

(3) $y=3x^2+6x+4$；　　(4) $y=\frac{1}{2}x^2-x+3$.

2. 利用二次函数 $y=-\frac{1}{2}x^2+x+2$ 的图像和性质，求方程 $-\frac{1}{2}x^2+x+2=0$ 在 3 和 4 之间的根的近似值.（结果精确到 0.1）



（第 2 题）

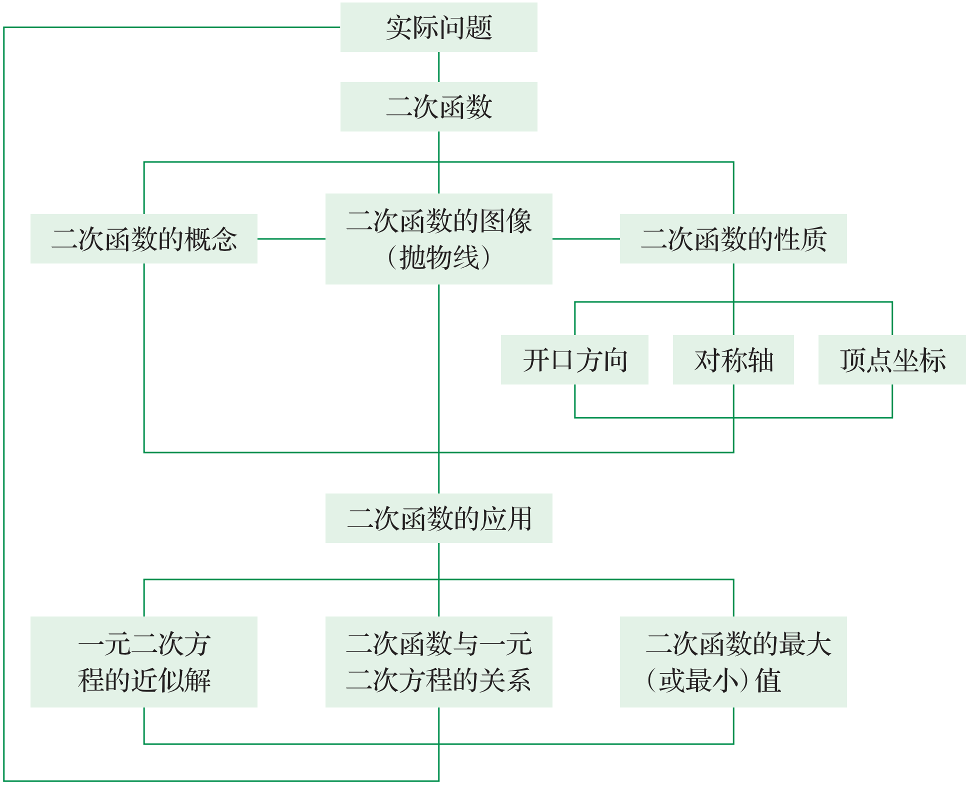
B 组

1. 求方程 $x^2-2x-2=0$ 的一个根的近似值.（结果精确到 0.1）

2. 借助 A 组第 2 题的图像，求方程 $-\frac{1}{2}x^2+x+2=0$ 在 -2 和 -1 之间的根的近似值.（结果精确到 0.1）

回顾与反思

一、知识结构



二、总结与反思

二次函数是又一类重要的函数模型．借助二次函数的图像，可以直观地了解二次函数的性质，并解决一些简单的实际问题．这充分体现了“数形结合”的重要思想．

1．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像是一条抛物线，这条抛物线关于直线 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 对称，它的顶点坐标为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\ \dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$．当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，两侧向上无限延伸，顶点是最低点；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，两侧向下无限延伸，顶点是最高点．

2．二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的性质可通过它的图像反映出来．回忆并填空：

当 $a>0$ 时，在对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的左侧，y 随 x 的增大而________；在

对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的右侧，y 随 x 的增大而________；当 $x=$________时，$y_{最小}=$________.

当 $a<0$ 时，在对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的左侧，y 随 x 的增大而________；在对称轴 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 的右侧，y 随 x 的增大而________；当 $x=$________时，$y_{最大}=$________.

3. 用待定系数法求二次函数的表达式，可以用不同的方法：一是已知三点的坐标，将其代入一般表达式 $y=ax^2+bx+c$ 中，求解关于 a，b，c 的三元一次方程组即可；二是已知两点的坐标和对称轴，将其代入表达式 $y=a(x-h)^2+k$中，即可求得.

4. 求一元二次方程的近似解，是利用一元二次方程与二次函数的关系，借助二次函数的图像确定一元二次方程解的范围，通过逐步逼近，直到找到符合精度要求的近似解为止.

5. 在用二次函数解决实际问题时，首先要对实际问题进行观察和分析，梳理并表达出相应的数量关系，以确定二次函数的表达式，进而利用二次函数的图像或性质解决实际问题.

三、注意事项

1. 在画二次函数的图像时，要在对称轴的两侧对称地选取若干个点.

2. 在解决与抛物线有关的实际问题时，要注意建立恰当的直角坐标系.

3. 在利用二次函数解决实际问题时，自变量的取值范围需要结合具体问题来确定.

复 习 题

A 组

1. 分别在同一直角坐标系内画出下列各组二次函数的图像，并根据图像写出抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标.

(1) $y=-\dfrac{1}{3}x^2+2$ 与 $y=-\dfrac{1}{3}x^2-2$.

(2) $y=\dfrac{1}{4}(x+1)^2$ 与 $y=\dfrac{1}{4}(x-1)^2$.

(3) $y=\frac{1}{3}(x+1)^2+3$ 与 $y=-\frac{1}{3}(x+1)^2+3$.

2. 写出下列抛物线的开口方向、对称轴和顶点坐标，并指出二次函数的最大(或最小)值.

(1) $y=x^2+2x-3$；　　(2) $y=-x^2+6x+2$；

(3) $y=2x^2-3x+5$；　　(4) $y=5x^2+6x$.

3. 画出二次函数 $y=-x^2+2x+3$ 的图像，并根据图像解答下列问题.

(1) 写出抛物线的对称轴、顶点坐标、与 x 轴和 y 轴的交点坐标.

(2) 当 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而增大？当 x 在什么范围内时，y 随 x 的增大而减小？

(3) 当 x 在什么范围内时，$y>0$？

(4) 当 x 在什么范围内时，$y<0$？

4. 二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的部分对应值如下表：

x	…	-3	-2	0	1	3	5	…
y	…	7	0	-8	-9	-5	7	…

则它的图像的对称轴为 $x=$________；当 $x=2$ 时，对应的函数值 $y=$________.

5. 根据下列条件，求出抛物线的表达式.

(1) 抛物线 $y=ax^2-4x+c$ 经过原点，与 x 轴交于另一点 $D(-4,0)$.

(2) 抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 的顶点坐标为(2，1).

(3) 抛物线 $y=ax^2+bx-3$ 经过点 $A(1,-4)$和 $B(2,-3)$.

6. 已知二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图像经过点 $A(-1,-1)$，$B(0,2)$，$C(1,3)$.

(1) 求这个二次函数的表达式.

(2) 画出这个二次函数的图像.

7. 求一元二次方程 $x^2+2x-10=0$ 正根的近似值.（结果精确到 0.1）

8. 在半径为 8 cm 的大圆中，挖去一个半径为 x cm 的小圆，剩下部分的面积为 y cm^2.

(1) 请写出用 x 表示 y 的函数表达式.

(2) 当 x 为何值时，剩下部分的面积是原来大圆面积的一半？

9. 小明要制作一个三角形的钢架模型. 在这个三角形中，长为 x cm 的边与这条边上的高之和为 60 cm. 设这个三角形的面积为 S cm^2.

(1) 请写出 S 与 x 之间的函数关系式.

(2) 当 x 等于多少时，这个三角形的面积 S 最大？最大面积是多少平方厘米？

10. 某种爆竹点燃后，其上升的高度 h(m)和时间 t(s)符合关系式 $h=v_0t-\frac{1}{2}gt^2(0<t\leqslant 2)$. 这种爆竹点燃后以 $v_0=20$ m/s 的初速度上升，g 取 10 m/s^2.

(1) 这种爆竹在地面上点燃后，经过多长时间距地面 15 m?

(2) 在爆竹点燃后的 1.5 s 至 1.8 s 这段时间内，爆竹是上升还是下降？请说明理由.

B 组

1. 已知二次函数的图像过点$\left(0,\ \frac{3}{2}\right)$，顶点坐标为$(-1,\ 2)$.

(1) 求这个二次函数的表达式.

(2) 求证：对任意实数 m，点 $M(m,\ -m^2)$都不在这个二次函数的图像上.

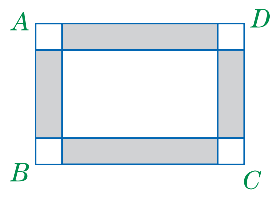
2. 抛物线 $y=-x^2+2nx+n^2-9$(n 为常数)经过坐标原点且顶点在第一象限. 试确定该抛物线所对应的函数关系式，并写出其顶点坐标.

3. 某汽车租赁公司现有汽车 100 辆. 当每辆汽车的月租金为 3 000 元时，能够全部租出；每辆汽车的月租金每提高 50 元，不能租出的汽车将增加 1 辆. 每辆未租出的汽车月维护费为 100 元.

(1) 请用每辆汽车的月租金 x(元)表示汽车租赁公司的月收益 y(元).

(2) 当每辆汽车的月租金为多少元时，汽车租赁公司的月收益最大？最大月收益是多少元？

4. 现用地砖铺设长方形广场的地面 $ABCD$，已知长方形广场地面的长为 100 m，宽为 80 m. 图案设计如图所示，广场的四角均为小正方形，阴影部分为四个长方形，四个长方形的宽都等于小正方形的边长. 阴影部分铺绿色地砖，其余部分铺白色地砖.



（第 4 题）

(1) 如果要使铺白色地砖的面积为 5 200 m^2，那么长方形广场四角的小正方形的边长应为多少米?

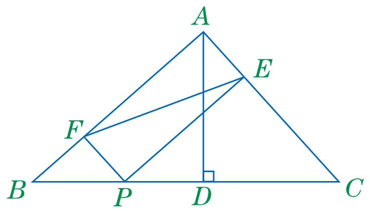
(2) 如果铺白色地砖需要的费用为 30 元/平方米，铺绿色地砖需要的费用为20 元/平方米，那么当广场四角小正方形的边长为多少米时，铺广场地面的总费用最少? 最少费用是多少元?

C 组

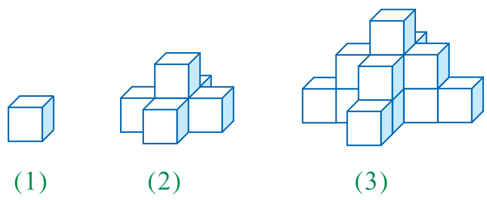
1. 如图，在$\triangle ABC$ 中，$BC=2$，BC 边上的高 $AD=1$，P 是 BC 边上任意一点，$PE/\!/AB$，交 AC 于点 E，$PF/\!/AC$，交 AB 于点 F. 设 $BP=x$，$\triangle PEF$ 的面积为 $S_{\triangle PEF}$.

(1) 写出用 x 表示 $S_{\triangle PEF}$ 的表达式.

(2) x 为何值时，$S_{\triangle PEF}$ 最大?



(第 1 题)



(第 2 题)

2. 用同样大小的正方体木块依次堆放成如图(1)、图(2)、图(3)所示的实心几何体，并按照这样的规律继续堆放下去. 设第 n 个图形中含有正方体木块 s 个.

(1) 填表：

n	1	2	3	4	…
s					…

(2) 已知 s 是 n 的二次函数，求这个二次函数的表达式.

(3) 第 10 个图形中的正方体木块有多少个?

(4) 是否存在某个图形，它对应的几何体由 1 770 个正方体木块组成? 若存在，指出它是第几个图形；若不存在，请说明理由.