数学奥林匹克小丛书

第三版

高中卷 6

Mathematical Olympiad Series

复数与向量

张思汇　编著

华东师范大学出版社

数学奥林匹克小丛书（第三版）编委会

冯志刚	国家督学、上海中学特级教师、正高级教师、多届IMO中国队副领队
葛　军	博士、中国数学奥林匹克高级教练、南京师范大学兼职教授、江苏省中学数学教学研究会副理事长
孔令志	华东师范大学出版社教辅分社副社长、《数学奥林匹克小丛书》项目编辑
冷岗松	国家集训队教练、上海大学教授、博士生导师
李胜宏	第44届IMO中国队领队、浙江大学教授、博士生导师
李伟固	国家集训队教练、北京大学教授、博士生导师
刘鸿坤	第31、32届IMO中国队副领队、华东师范大学教授
刘诗雄	华南师范大学中山附属中学校长、中学数学特级教师、中国数学奥林匹克高级教练
倪　明	华东师范大学出版社教辅分社社长、编审 、《数学奥林匹克小丛书》总策划
瞿振华	第59届IMO中国队领队、国家集训队教练、华东师范大学副教授
单　墫	第30、31届IMO中国队领队、南京师范大学教授、博士生导师
吴建平	中国数学会普及工作委员会原主任、中国数学奥林匹克委员会原副主席
熊　斌	华东师范大学教授、博士生导师、多届IMO中国队领队
姚一隽	第55、58届IMO中国队领队、复旦大学教授、博士生导师
余红兵	国家集训队教练、苏州大学教授、博士生导师
张景中	中国科学院院士、中国教育数学学会名誉理事长
朱华伟	第50届IMO中国队领队、中国教育数学学会常务副理事长、博士生导师

总　序

数学竞赛像其他竞赛活动一样,是青少年学生的一种智力竞赛.在类似的以基础科学为竞赛内容的智力竞赛活动中,数学竞赛的历史最悠久、国际性强,影响也最大.我国于1956年开始举行数学竞赛,当时最有威望的著名数学家华罗庚、苏步青、江泽涵等都积极参加领导和组织竞赛活动,并组织出版了一系列青少年数学读物,激励了一大批青年学生立志从事科学事业.我国于1986年起参加国际数学奥林匹克,多次获得团体总分第一,并于1990年在北京成功地举办了第31届国际数学奥林匹克,这标志着我国数学竞赛水平在国际上居领先地位,为各国科学家与教育家所瞩目.

我国数学竞赛活动表明,凡是开展好的地区和单位,都能大大激发学生的学习数学的兴趣,有利于培养创造性思维,提高学生的学习效率.这项竞赛活动,将健康的竞争机制引进数学教学过程中,有利于选拔人才.由数学竞赛选拔的优胜者,既有扎实广泛的数学基础,又有刻苦钻研、科学的学习方法,其中的不少青年学生将来会成为出色的科学工作者.在美国,数学竞赛的优胜者中后来成名如米尔诺(J. W. Milnor)、芒福德(D. B. Mumford)、奎伦(D. Quillen)等都是菲尔兹数学奖的获得者;在波兰,著名数论专家辛哲尔(A. Schinzel)学生时代是一位数学竞赛优胜者;在匈牙利,著名数学家费叶尔(L. Fejér)、里斯(M. Riesz)、舍贵(G. Szegö)、哈尔(A. Haar)、拉多(T. Radó)等都曾是数学竞赛获奖者.匈牙利是开展数学竞赛活动最早的国家,产生了同它的人口不成比例的许多大数学家!

在IMO获得奖牌的学生中,日后有不少成为大数学家.例如,获菲尔兹奖的数学家有:玛古利斯(G. Margulis,俄罗斯,1978年)、德里费尔德(V. Drinfeld,乌克兰,1990年)、约克兹(J. G. Yoccoz,法国,1994年)、博切尔兹(R. Borcherds,英国,1998年)、高尔斯(T. Gowers,英国,1998年)、拉福格(L. Lafforgue,法国,2002年)、佩雷尔曼(G. Perelman,俄罗斯,2006年)、陶哲轩(Terence Tao,澳大利亚,2006年)、吴宝珠(Bao Chau Ngo,越南,2010年)、林登施特劳斯(E. Lindenstrauss,以色列,2010年)、斯米尔诺夫(S. Smirnov,俄罗斯,2010年)、米尔扎哈尼(M. Mirzakhani,女,伊朗,2014年)、

阿维拉(A. Avila,巴西,2014 年)、舒尔茨(P. Scholze,德国,2018 年)、文卡特什(A. Venkatesh,澳大利亚,2018 年).

在开展数学竞赛的活动同时,各学校能加强联系,彼此交流数学教学经验,从这种意义上来说,数学竞赛可能成为数学课程改革的“催化剂”,成为培养优秀人才的有力措施.

不过,在数学竞赛活动中,应当注意普及与提高相结合,而且要以普及为主,使竞赛具有广泛的群众基础,否则难以持久.

当然,现在有些人过于关注数学竞赛的成绩,组织和参与都具有很强的功利目的,过分扩大数学竞赛的作用,这些都是不正确的,违背了开展数学竞赛活动的本意.这些缺点有其深层次的社会原因,需要逐步加以克服,不必因为有某些缺点,就否定这项活动.

我十分高兴看到这套《数学奥林匹克小丛书》的正式出版.这套书,规模大、专题细.据我所知,这样的丛书还不多见.这套书不仅对数学竞赛中出现的常用方法作了阐述,而且对竞赛题作了精到的分析解答,不少出自作者自己的研究所得,是一套很好的数学竞赛专题教程,也是中小学生和教师的参考书.

这套小丛书的作者都是数学竞赛教学和研究人员,不少是国家集训队的教练和国家队的领队.他们为我国开展数学竞赛的活动和我国学生在 IMO 上取得成绩、为国争光作出了贡献,为这套书尽早面世付出了艰辛的劳动.华东师大出版社在出版《奥数教程》和《走向 IMO》等竞赛图书基础上,策划组织了这套丛书,花了不少心血.我非常感谢作者们和编辑们在这方面所做的工作,并衷心祝愿我国的数学竞赛活动开展得越来越好.

王元

王元,著名数学家,中国科学院院士,曾任中国数学会理事长、中国数学奥林匹克委员会主席.

前　　言

在现行的高中数学教材中，复数和向量以相对独立的章节出现，学习的内容相对较少，学生对知识的掌握也较为呆板，一旦遇到较为综合的问题往往束手无策. 事实上，复数与向量的综合性很强，它们把代数、三角和几何以很自然的方式糅合在了一起，在解题中往往起到桥梁的作用，因而在高中数学中是十分重要的内容.

本书主要涉及与复数、向量有关的内容，作者希望通过本书使读者对复数、向量有比教材内容更深层次的认识. 全书分为基础篇和提高篇两部分，一共九个章节，可供高中学生作为高考及自主招生考试的参考资料，也可供数学奥林匹克爱好者开拓数学视野、提高竞赛解题能力之用.

与上一版相比，这一版本在内容上做了一定的改动. 基础篇共分五个章节. 在前三个章节中，介绍了复数最基本的代数形式及其四则运算、复数的模及幅角的一些基本性质，由此引申出复数的三角形式、指数形式及复数乘除法的几何意义，此外还介绍了一些与复数有关的方程问题；第四章和第五章，介绍了向量的加减法、数乘、数量积及其应用.

提高篇共分四个章节. 第六章介绍了向量积的定义及基本性质，进一步介绍了空间平面方程与直线方程，并初步介绍了一些空间解析几何内容；第七章主要介绍单位根以及它的应用；第八章中将讨论涉及复数的模及幅角的一些较高难度的问题；第九章中介绍了一些复数与向量的应用，并选讲了一些数学竞赛问题作为前述章节的总结.

每章的例题在编排次序上基本遵循由浅入深、由易到难的原则. 基础篇中例题难度基本由课本题、高考题、高中数学联赛一试题这三个梯度拾阶而上，有少量例题达到高中数学联赛加试题难度，提高篇中例题难度较基础篇稍高一些.

每章的最后配备了一定数量的习题，供读者用来检测自己在学习该章内容后的掌握情况，同时也作为例题的补充，在全书的最后给出了每章习题的解答. 希望读者做习题时先不要看解答，自己思考一段时间后再对比自己的做法与解答的做法的异同点，认真总结归纳，以促进解题能力的提高.

本书中的内容为笔者多年来在命题、解题及竞赛教学中的一些积累与感悟,谨以此书献给努力拼搏的莘莘学子,愿您一书在手,不再为茫茫题海所困扰,迅速提高学习效率及学习成绩,取得成功.

张思汇

2019 年 12 月

目　　录

基　础　篇

提　高　篇

基础篇

1 复数的概念及代数运算

复数概念的引入最初是为了求解

$$x^2+1=0$$

这样的没有实根的方程，因此复数集可以看作实数集的一个自然的扩充. 为此，首先引进一个“新数”i，使它满足

$$i^2=-1,$$

即 i 适合方程 $x^2+1=0$. 这个新数 i 称为虚数单位. 将 i 添加到实数集中去，定义：形如 $z=a+bi$(a、b 均是实数) 的表达式称为一个复数. 其中的 a 和 b 分别叫做复数 z 的实部和虚部，分别记作

$$a=\mathrm{Re}(z),\ b=\mathrm{Im}(z).$$

一、复数 $z=a+bi(a,\ b\in\mathbf{R})$ 的分类

当虚部 $b=0$ 时，复数 z 是实数；
当虚部 $b\neq 0$ 时，复数 z 是虚数；
当虚部 $b\neq 0$，且实部 $a=0$ 时，复数 z 是纯虚数.
如果记

R——实数集　　**C**——复数集
P——虚数集　　**T**——纯虚数集

就有关系

$$\mathbf{R}\cap\mathbf{P}=\varnothing\quad \mathbf{R}\cup\mathbf{P}=\mathbf{C}\quad \mathbf{T}\subsetneqq\mathbf{P}\subsetneqq\mathbf{C}$$

二、复数相等的充要条件

对于两个复数 $z_1=a+bi(a,\ b\in\mathbf{R})$，$z_2=c+di(c,\ d\in\mathbf{R})$，二者相等的充要条件是 $a=c$ 且 $b=d$，即

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c, \\ b=d. \end{cases}$$

复数相等的充要条件是复数问题化归为实数问题的理论依据,“化虚为实”是解决复数问题的通性通法.

三、复数的运算法则

对于两个复数 $a+bi$、$c+di(a, b, c, d \in \mathbf{R})$.

加法:$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$;

减法:$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$;

乘法:$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$;

除法:$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2}+\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}i(c+di \neq 0)$.

四、复数的运算定律

复数的加法满足交换律、结合律,也就是说,对于任何复数 z_1、z_2、z_3,均有

$$z_1+z_2=z_2+z_1,$$

$$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

复数的乘法满足交换律、结合律,以及乘法对于加法的分配律. 也就是说,对于复数 z_1、z_2、z_3,均有

$$z_1z_2=z_2z_1,$$

$$(z_1z_2)z_3=z_1(z_2z_3),$$

$$z_1(z_2+z_3)=z_1z_2+z_1z_3.$$

五、共轭复数的性质

当两个复数的实部相等,虚部互为相反数时,就称其互为共轭复数. 特别地,若复数的虚部不为零时,也称作互为共轭虚数. 对于复数 $z=a+bi(a, b \in \mathbf{R})$,它的共轭复数用 $\bar{z}=a-bi(a, b \in \mathbf{R})$ 表示.

共轭复数有如下基本性质:

(1) $\overline{z_1 \pm z_2}=\overline{z_1} \pm \overline{z_2}$;

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\ \overline{z_2}$;

(3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq 0)$;

(4) $\overline{z^n}=(\bar{z})^n$;

(5) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$, $z-\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$;

(6) $\bar{\bar{z}}=z$;

(7) z 是实数的充要条件是 $\bar{z}=z$; z 是纯虚数的充要条件是 $\bar{z}=-z$ 且 $z\neq 0$.

六、复数的几何形式

复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$ 与复平面上的点 $Z(a,b)$ 是一一对应的,点 $Z(a,b)$ 和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 也构成一一对应关系,点 Z 和向量 $\overrightarrow{OZ}$ 均是复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的几何形式. 向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模 r 称为复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的模 $|z|$, 即

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}.$$

这种对应关系的构建,揭示了复数问题与向量问题之间的相互转化,说明了向量方法是解决复数问题的一条有效途径.

关于复数的模,有如下的基本性质:

(1) $z\bar{z}=|z|^2=|\bar{z}|^2$;

(2) $||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1\pm z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$;

(3) $|z|\geqslant\max\{|\mathrm{Re}(z)|,|\mathrm{Im}(z)|\}$.

例 1 已知 $z_1=(m-3)+(m-1)\mathrm{i}$, $z_2=(2m-5)+(m^2+m-2)\mathrm{i}$, 且 $z_1>\overline{z_2}$,试求实数 m 的值.

解析 由 $z_1>\overline{z_2}$ 知,z_1、$\overline{z_2}$ 均为实数,即有

$$\begin{cases}m-1=0,\\-(m^2+m-2)=0,\end{cases}$$

解得 $m=1$.

因为 $z_1>\overline{z_2}$,所以 $m-3>2m-5$,即 $m<2$. 而 $m=1$ 适合 $m<2$.

故所求 $m=1$.

注 解题的突破口在于发现“z_1、$\overline{z_2}$均为实数”这一隐含条件.

例 2 设复数 z 满足 $z+9=10\bar{z}+22\mathrm{i}$. 求 $|z|$ 的值.

解析 设 $z=a+b\mathrm{i}$, $(a,b\in\mathbf{R})$. 由条件得

$$(a+9)+b\mathrm{i}=10a+(-10b+22)\mathrm{i}.$$

比较两边实虚部可得

$$\begin{cases}a+9=10a,\\ b=-10b+22.\end{cases}$$

解得 $a=1$, $b=2$. 故 $z=1+2\mathrm{i}$,进而 $|z|=\sqrt{5}$.

例 3 已知非零复数 a、b、c 满足 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}$,试求 $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的一切可能值.

解析 设 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{a}=k$,则 $a=bk$, $b=ck$, $c=ak$, 也就有 $c=ak$, $b=ak\cdot k=ak^2$, $a=ak^2\cdot k=ak^3$. 因为 $a\neq 0$, 所以有 $k^3=1$,解得 $k=1$ 或 $k=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

所以 $$\frac{a+b-c}{a-b+c}=\frac{a+ak^2-ak}{a-ak^2+ak}=\frac{1+k^2-k}{1-k^2+k}.$$

若 $k=1$,则原式 $=1$;

若 $k=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,则原式 $=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$;

若 $k=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,则原式 $=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

综上所述, $\frac{a+b-c}{a-b+c}$ 的一切可能值为 1、$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 和 $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

注 连等式设 k 是常用的解题技巧.

例 4 设复数 z 满足 $|z|=1$,使得关于 x 的方程 $zx^2+2\bar{z}x+2=0$ 有实根,求所有这样的复数 z 的和.

解析 设 $z=a+b\mathrm{i}\quad(a, b\in\mathbf{R}, a^2+b^2=1)$,仍记原方程的实根为 x. 将原方程改为 $(a+b\mathrm{i})x^2+2(a-b\mathrm{i})x+2=0$,分离实部与虚部后等价于

$$ax^2+2ax+2=0, \qquad ①$$

$$bx^2-2bx=0. \qquad ②$$

若 $b=0$,则 $a^2=1$,但当 $a=1$ 时,① 无实数解,从而 $a=-1$,此时存在实数 $x=-1\pm\sqrt{3}$ 满足 ①、②,故 $z=-1$ 满足条件.

若 $b\neq 0$,则由 ② 知 $x\in\{0, 2\}$,但显然 $x=0$ 不满足 ①,故只能是 $x=$

2,代入 ① 解得 $a=-\frac{1}{4}$,进而 $b=\pm\frac{\sqrt{15}}{4}$,相应有 $z=\frac{-1\pm\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}$.

综上,满足条件的所有复数 z 之和为 $-1+\frac{-1+\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}+\frac{-1-\sqrt{15}\mathrm{i}}{4}=-\frac{3}{2}$.

例 5 已知两个复系数函数

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k},\ g(x)=\sum_{k=0}^{n}b_kx^{n-k},$$

其中 $a_0=b_0=1$,$\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}b_{2k}$ 和 $\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}b_{2k-1}$ 均为实数.若 $g(x)=0$ 的所有根的平方的相反数是 $f(x)=0$ 的全部根,求证:$\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k$ 是实数.

解析 设方程 $g(x)=0$ 的 n 个根为 $x_k(k=1,2,\cdots,n)$,则方程 $f(x)=0$ 的 n 个根为 $-x_k^2(k=1,2,\cdots,n)$,于是,有

$$g(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k),\ f(x)=\prod_{k=1}^{n}(x+x_k^2).$$

从而
$$\begin{aligned}f(-1)&=\prod_{k=1}^{n}(-1+x_k^2)\\&=\prod_{k=1}^{n}(-1-x_k)\prod_{k=1}^{n}(1-x_k)\\&=g(-1)g(1).\end{aligned}\qquad ①$$

因为 $$g(1)=\sum_{k=0}^{n}b_k=b_0+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}b_{2k}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}b_{2k-1},$$

$$g(-1)=\sum_{k=0}^{n}b_k(-1)^{n-k}=(-1)^nb_0+(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}b_{2k-1}+(-1)^{n-2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}b_{2k},$$

$$\begin{aligned}f(-1)&=\sum_{k=0}^{n}a_k(-1)^{n-k}\\&=(-1)^na_0+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}a_k\\&=(-1)^n+(-1)^n\sum_{k=1}^{n}(-1)^ka_k,\end{aligned}$$

所以
$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k a_k=(-1)^n f(-1)-1. \qquad ②$$

由题设条件知 $g(-1)$、$g(1)$ 均是实数，注意到等式 ①，可知 $f(-1)$ 亦是实数，从而 ② 式的右端为实数. 也即 $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k a_k$ 为实数，证毕.

注 考虑 $f(-1)$ 是本题的关键，它建立了 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个关系.

例 6 设 A、B、C 分别是复数 $z_0=a\mathrm{i}$，$z_1=\dfrac{1}{2}+b\mathrm{i}$，$z_2=1+c\mathrm{i}$ 对应的不共线的三点(a、b、c 都是实数).

证明：曲线 $z=z_0\cos^4 t+2z_1\cos^2 t\sin^2 t+z_2\sin^4 t(t\in\mathbf{R})$ 与 $\triangle ABC$ 中平行于 AC 的中位线只有一个公共点，并求出此点.

解析 设 D、E 分别为 AB、BC 的中点，则 D、E 对应的复数分别为
$$\frac{1}{2}(z_0+z_1)=\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i},\ \frac{1}{2}(z_1+z_2)=\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}\mathrm{i}.$$

于是，线段 DE 上的点对应的复数 z 满足
$$z=\lambda\left(\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i}\right)+(1-\lambda)\left(\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}\mathrm{i}\right),\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1.$$
代入曲线方程
$$z=z_0\cos^4 t+2z_1\cos^2 t\sin^2 t+z_2\sin^4 t,$$
对比两边实部和虚部，得
$$\begin{cases}\dfrac{3}{4}-\dfrac{\lambda}{2}=\sin^2 t\cos^2 t+\sin^4 t,\\[2mm] \dfrac{1}{2}[\lambda a+b+(1-\lambda)c]=a\cos^4 t+2b\sin^2 t\cos^2 t+c\sin^4 t.\end{cases}$$

两式中消去 λ，得
$$\begin{aligned}\frac{3}{4}(a-c)+\frac{b+c}{2}&=a\cos^4 t+(2b+a-c)\sin^2 t\cos^2 t+a\sin^4 t\\&=a(1-2\sin^2 t\cos^2 t)+(2b+a-c)\sin^2 t\cos^2 t\\&=a+(2b-a-c)\sin^2 t\cos^2 t.\end{aligned}$$

于是
$$(2b-a-c)\left(\sin^2 t\cos^2 t-\frac{1}{4}\right)=0.$$

若 $2b-a-c=0$，则 $z_1=\dfrac{1}{2}(z_0+z_2)$，因此 A、B、C 三点共线，与假设

矛盾！所以 $2b-a-c\neq 0$，故 $\sin^2 t\cos^2 t=\frac{1}{4}$，从而 $\sin^2 t(1-\sin^2 t)=\frac{1}{4}$，即 $\left(\sin^2 t-\frac{1}{2}\right)^2=0$，$\sin^2 t=\frac{1}{2}$.

故 $\frac{3}{4}-\frac{\lambda}{2}=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$，即有 $\lambda=\frac{1}{2}\in[0,1]$.

这表明曲线与 $\triangle ABC$ 的平行于 AC 的中位线只有一个交点，这个交点对应的复数为

$$\begin{aligned}z&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{a+b}{2}\mathrm{i}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{b+c}{2}\mathrm{i}\right)\\&=\frac{1}{2}+\frac{a+c+2b}{4}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例 7 设 $z=\sum_{k=1}^{n}z_k^2$，$z_k=x_k+y_k\mathrm{i}(x_k, y_k\in\mathbf{R}, k=1, 2, \cdots, n)$，$p$ 是 z 的平方根的实部，求证：$|p|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|x_k|$.

解析 设 $p+q\mathrm{i}(p, q\in\mathbf{R})$ 是 z 的平方根，由

$$(p+q\mathrm{i})^2=\sum_{k=1}^{n}z_k^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-y_k^2)+2\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}x_ky_k,$$

得
$$p^2-q^2=\sum_{k=1}^{n}(x_k^2-y_k^2),\ pq=\sum_{k=1}^{n}x_ky_k. \qquad ①$$

用反证法，假设 $|p|>\sum_{k=1}^{n}|x_k|$，则

$$p^2>\left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|\right)^2\geqslant\sum_{k=1}^{n}x_k^2,$$

由此推出

$$q^2>\sum_{k=1}^{n}y_k^2. \qquad ②$$

由①、②，可得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}x_ky_k\right)^2=p^2q^2>\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}y_k^2\right),$$

这与柯西不等式相矛盾！

故 $|p| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$，证毕.

例8 是否存在 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，使 $z^2+8z+9=(z-\tan\theta)(z-\tan 3\theta)$ 对一切复数 z 恒成立?

解析 结论是否定的.

用反证法，假设存在一个 $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，使题中的等式对一切复数 z 成立.

特别地，取 $z=\mathrm{i}$，得

$$\begin{aligned} 8+8\mathrm{i} &= (\mathrm{i}-\tan\theta)(\mathrm{i}-\tan 3\theta) \\ &= \mathrm{i}(1+\mathrm{i}\tan\theta)\cdot \mathrm{i}(1+\mathrm{i}\tan 3\theta) \\ &= -\frac{(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)(\cos 3\theta+\mathrm{i}\sin 3\theta)}{\cos\theta\cos 3\theta} \qquad (*) \\ &= -\frac{\cos 4\theta+\mathrm{i}\sin 4\theta}{\cos\theta\cos 3\theta} \end{aligned}$$

从而，有 $\tan 4\theta=1$，$\cos 4\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

比较(*)式的实部，便有

$$8=-\frac{\cos 4\theta}{\cos\theta\cos 3\theta}=-\frac{2\cos 4\theta}{\cos 4\theta+\cos 2\theta},$$

$$\cos 4\theta+\cos 2\theta=-\frac{1}{4}\cos 4\theta,$$

$$-\frac{5}{4}\cos 4\theta=\cos 2\theta,$$

$$\frac{25}{16}\cos^2 4\theta=\cos^2 2\theta=\frac{1+\cos 4\theta}{2},$$

即有

$$25\cos^2 4\theta=8(1+\cos 4\theta).$$

将 $\cos 4\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ 代入上式，显然左端是有理数，而右端是无理数，矛盾. 故不存在这样的 θ，使等式恒成立.

习 题 1

1 已知 $f(x)=ax^2+bx$（a、b 为非零实数），存在一个虚数 x_1，使 $f(x_1)$ 为实数 $-c$，则 b^2-4ac 与 $(2ax_1+b)^2$ 的关系是（　　）.

(A) 不能比较大小　　(B) $b^2-4ac>(2ax_1+b)^2$

(C) $b^2-4ac=(2ax_1+b)^2$　　(D) $b^2-4ac<(2ax_1+b)^2$

2 若 z_1，z_2，$z_3\in\mathbf{C}$，则 $z_1=z_2=z_3$ 是 $(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2=0$ 成立的（　　）.

(A) 充分但不必要条件　　(B) 必要但不充分条件

(C) 充分且必要条件　　(D) 既不充分也不必要条件

3 已知实数 a、x、y 满足 $a^2+(4+\mathrm{i})a+2xy+(x-y)\mathrm{i}=0$，则点 (x, y) 的轨迹是（　　）.

(A) 直线　　(B) 圆心在原点的圆

(C) 圆心不在原点的圆　　(D) 椭圆

4 已知复数 z_1、z_2 满足 $2z_1^2+z_2^2=2z_1z_2$，且 z_1+z_2 为纯虚数，求证：复数 $3z_1-2z_2$ 是实数.

5 已知 $a\in\mathbf{R}$，试问：复数

$$z=(a^2-2a+3)-(a^2-2a+2)\mathrm{i}$$

所对应的点在第几象限？复数 z 所对应点的轨迹是什么？

6 设 z_1，$z_2\in\mathbf{C}$，且 $z_1z_2\neq 0$，$A=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$，$B=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2$，试问：$A$ 与 B 能否比较大小关系？若能，请指明大小关系；若不能，请说明理由.

7 求证：$\left[(2a-b-c)+(b-c)\sqrt{3}\mathrm{i}\right]^3=\left[(2b-c-a)+(c-a)\sqrt{3}\mathrm{i}\right]^3$.

8 已知 $\dfrac{z}{z-2}$ 是纯虚数，求复数 z 在复平面内对应点轨迹的方程.

2 复数的模与幅角(一)

关于复数的模的概念,在第一章中已有定义.在复数的三角形式表示中,出现了复数的辐角的概念.下面给出复数辐角的定义和一些性质.

设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R})$ 所对应的向量为$\overrightarrow{OZ}$,我们称始边是 x 轴正半轴,终边是$\overrightarrow{OZ}$ 的角为复数 z 的辐角,记为 $\operatorname{Arg} z$. 在$[0,\ 2\pi)$ 内的辐角叫做复数 z 的辐角主值,记为 $\arg z$. 且有

$$\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi(k\in\mathbf{Z}).$$

当 $a\in\mathbf{R}_+$ 时,有

$$\arg a=0,\ \arg(-a)=\pi,$$

$$\arg(a\mathrm{i})=\frac{\pi}{2},\ \arg(-a\mathrm{i})=\frac{3\pi}{2}.$$

0 的辐角是任意的.

非零复数与它的模和辐角主值构成一一对应关系.两个非零复数相等,当且仅当它们的模与幅角主值分别相等.

关于复数辐角的运算,有如下结论:

$$\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg}(z_1)+\operatorname{Arg}(z_2),$$

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\operatorname{Arg}(z_1)-\operatorname{Arg}(z_2)(z_2\neq 0),$$

$$\operatorname{Arg}(z^n)=n\operatorname{Arg}(z)(n\in\mathbf{Z}).$$

若复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,\ b\in\mathbf{R},\ ab\neq 0)$,则

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{b}{a}, & \text{点}(a,\ b)\text{ 在第 Ⅰ 象限},\\ \pi+\arctan\dfrac{b}{a}, & \text{点}(a,\ b)\text{ 在第 Ⅱ、Ⅲ 象限},\\ 2\pi+\arctan\dfrac{b}{a}, & \text{点}(a,\ b)\text{ 在第 Ⅳ 象限}.\end{cases}$$

有了上述准备工作,我们可以定义复数的三角形式:

设复数 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$ 的模等于 r,辐角等于 θ,则称 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 为复数 $z=a+b\mathrm{i}(a, b\in\mathbf{R})$ 的三角形式. 由欧拉公式 $\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 知:$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 称为 z 的指数形式.

以下介绍复数在三角形式下的乘法、乘方、除法、开方等运算的法则.

一、复数的乘法与乘方

若 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$, 则

$$\begin{aligned} z_1z_2&=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)\\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)]. \end{aligned}$$

两个复数相乘,积的模等于各复数的模的积,积的辐角等于各复数的辐角的和.

若 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, $n\in\mathbf{N}^*$, 则

$$z^n=[r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta).$$

复数 n 次幂的模等于这个复数模的 n 次幂,它的辐角等于这个复数辐角的 n 倍,这个定理叫做棣莫佛(Abraham de Moivre, 1667–1754)定理.

二、复数的除法

若 $z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)$, 则

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2}&=\frac{r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2)}\\ &=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)]. \end{aligned}$$

两个复数相除,商的模等于被除数的模除以除数的模所得的商,商的辐角等于被除数的辐角减去除数的辐角.

三、复数的开方

复数 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的 $n(n\in\mathbf{N}^*)$ 次方根是

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)(k=0, 1, \cdots, n-1).$$

复数的 n 次方根是 n 个复数,它们的模都等于这个复数的模的 n 次算术根,它们的辐角分别等于这个复数的辐角与 2π 的 $0, 1, \cdots, n-1$ 倍的和的 n

分之一.

由此可知,方程 $x^n = b(b \in \mathbf{C})$ 的根的几何意义是复平面内的 n 个点,这些点均匀分布在以原点为圆心、以 $\sqrt[n]{|b|}$ 为半径的圆周上.

四、辐角的三角函数

设复数 $z = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,则

$$\cos n\theta = \mathrm{Re}(z^n) = \frac{z^{2n}+1}{2z^n};$$

$$\sin n\theta = \mathrm{Im}(z^n) = \frac{z^{2n}-1}{2z^n\mathrm{i}};$$

$$\tan n\theta = \frac{\mathrm{Im}(z^n)}{\mathrm{Re}(z^n)} = \frac{z^{2n}-1}{(z^{2n}+1)\mathrm{i}}.$$

例 1 求下列各复数的辐角主值:

(1) $z = \mathrm{i}\cos 100°$;

(2) $z = a + b\mathrm{i}(a, b \in \mathbf{R}, a^2 + b^2 \neq 0)$;

(3) $z = \sin 4(\cos 4 + \mathrm{i}\sin 4)$;

(4) $z = |\cos\theta| + \mathrm{i}|\sin\theta|, \theta \in \left(\frac{5}{2}\pi, 3\pi\right)$.

解析 (1) 因为 $\mathrm{i}\cos 100°$ 是纯虚数,且 $\cos 100° < 0$,所以

$$\arg(\mathrm{i}\cos 100°) = \frac{3}{2}\pi.$$

(2) 由于 a、b 不确定,需讨论,分六类:

当 $a > 0, b > 0$ 时,复数对应的点位于第一象限,由辐角主值的定义,$\tan\theta = \frac{b}{a}$,由反正切函数的定义知,$\arg z = \arctan\frac{b}{a}$.

当 $a < 0, b > 0$ 时,复数对应的点位于第二象限,

$$\arg z = \pi - \arctan\frac{b}{|a|} = \pi + \arctan\frac{b}{a}.$$

当 $a < 0, b < 0$ 时,复数对应的点位于第三象限,$\arg z = \pi + \arctan\frac{b}{a}$.

当 $a > 0, b < 0$ 时,复数对应的点位于第四象限,

$$\arg z = 2\pi - \arctan\frac{|b|}{a} = 2\pi + \arctan\frac{b}{a}.$$

当 $a=0$ 时，如果 $b>0$，$\arg z=\frac{\pi}{2}$；如果 $b<0$，$\arg z=\frac{3}{2}\pi$.

当 $b=0$ 时，如果 $a>0$，$\arg z=0$；如果 $a<0$，$\arg z=\pi$.

综上所述

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\frac{b}{a}, & (a>0,\ b\geqslant 0)\\ \pi+\arctan\frac{b}{a}, & (a<0)\\ 2\pi+\arctan\frac{b}{a}, & (a>0,\ b<0)\\ \frac{\pi}{2}, & (a=0,\ b>0)\\ \frac{3\pi}{2}. & (a=0,\ b<0)\end{cases}$$

(3) 不能错误地理解为 $4(4\in(0,\ 2\pi))$ 就是该复数的辐角主值，因为 $\sin 4<0$，已知的复数表达形式不是三角形式，事实上，

$$\begin{aligned}z&=\sin 4(\cos 4+\mathrm{i}\sin 4)\\&=-\sin 4[\cos(\pi+4)+\mathrm{i}\sin(\pi+4)].\end{aligned}$$

此时，不能错误地理解为 $4+\pi$ 是辐角主值(这是因为 $4+\pi>2\pi$)．该复数的辐角主值是：

$$(4+\pi)-2\pi=4-\pi.$$

(4) 首先把绝对值符号去掉，并“改造”成复数的三角形式：

$$\begin{aligned}z&=|\cos\theta|+\mathrm{i}|\sin\theta|=-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta\\&=\cos(\pi-\theta)+\mathrm{i}\sin(\pi-\theta),\ \theta\in\left(\frac{5\pi}{2},\ 3\pi\right)\end{aligned}$$

因为 $(\pi-\theta)\in\left(-2\pi,\ -\frac{3}{2}\pi\right)$，所以 $\arg z=(\pi-\theta)+2\pi=3\pi-\theta$.

例 2　化下列各复数为三角形式：

(1) $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i}$；

(2) $z=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)(r>0)$；

(3) $z=1+\mathrm{i}\tan\theta\left(\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right)$；

(4) $z=1+\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$.

解析　解决这类问题的关键是准确地掌握复数三角形式的四个外部特征：

模 $r\geqslant 0$——根据模的定义：向量$\overrightarrow{OZ}$的长度有 $r\geqslant 0$；

角相同——这是因为两个角表示的是同一个复数的辐角；

余弦在前，正弦在后——因为在 $a+b\mathrm{i}$ 中，a 是点$(a,\ b)$的横坐标，且 $a=r\cos\theta$，所以"余弦在前"；

"加"相连——由 $a+b\mathrm{i}$，自然有"加"相连.

(1) 因为 $|z|=2\sqrt{2}$，并且

$$\begin{cases}\sin\theta=\dfrac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=-\dfrac{1}{2},\\[2ex]\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{cases}$$

解得 $\theta=2k\pi+\dfrac{11}{6}\pi(k\in\mathbf{Z})$.

所以 $z=\sqrt{6}-\sqrt{2}\mathrm{i}$ 的三角形式是 $2\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{11}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{11}{6}\pi\right)$.

(2) $z=r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$

$\quad=r[\cos\theta+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$

$\quad=r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$.

事实上，$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 与 $r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)$ 互为共轭复数；它们在复平面上对应的向量关于实轴对称，因此，它们的模相等，有一对辐角互为相反数，即 $r(\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta)=r[\cos(-\theta)+\mathrm{i}\sin(-\theta)]$.

类似地有

$$r(-\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r[\cos(\pi-\theta)+\mathrm{i}\sin(\pi-\theta)],$$

$$-r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)=r[\cos(\pi+\theta)+\mathrm{i}\sin(\pi+\theta)],$$

$$r(\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta)=r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right],$$

等等.

(3) 利用三角函数公式

$$\begin{aligned}z&=1+\mathrm{i}\tan\theta\left(\theta\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}\right)\\&=1+\mathrm{i}\,\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{1}{\cos\theta}(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta).\end{aligned}$$

至此，不要以为它就是三角形式了，由于 θ 的取值范围不确定，$\dfrac{1}{\cos\theta}$ 可正可负，需讨论：

当 $\cos\theta>0$ 时，复数的三角形式是 $\sec\theta(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$；

当 $\cos\theta<0$ 时，复数的三角形式是 $-\sec\theta[\cos(\pi+\theta)+\mathrm{i}\sin(\pi+\theta)]$.

(4) $z=1+\cos\theta-\mathrm{i}\sin\theta$

$$\begin{aligned}&=2\cos^2\frac{\theta}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\\&=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)\\&=2\cos\frac{\theta}{2}\left[\cos\left(-\frac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\theta}{2}\right)\right].\end{aligned}$$

当 $\cos\dfrac{\theta}{2}\geqslant 0$ 时，复数的三角形式是 $2\cos\dfrac{\theta}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]$；

当 $\cos\dfrac{\theta}{2}<0$ 时，复数的三角形式是 $-2\cos\dfrac{\theta}{2}\left[\cos\left(\pi-\dfrac{\theta}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\pi-\dfrac{\theta}{2}\right)\right]$.

例 3 设复数 z、w 满足 $|z|=3$，$(z+\bar{w})(\bar{z}-w)=7+4\mathrm{i}$，其中 i 是虚数单位. $\bar{z}$、$\bar{w}$ 分别表示 z、w 的共轭复数，求 $(z+2\bar{w})(\bar{z}-2w)$ 的模.

解析 由运算性质，

$$7+4\mathrm{i}=(z+\bar{w})(\bar{z}-w)=|z|^2-|w|^2-(zw-\overline{zw}),$$

因为 $|z|^2$ 与 $|w|^2$ 为实数，$\mathrm{Re}(zw-\overline{zw})=0$. 故 $|z|^2-|w|^2=7$，$zw-\overline{zw}=-4\mathrm{i}$. 又 $|z|=3$，所以 $|w|^2=2$. 从而

$$\begin{aligned}(z+2\bar{w})(\bar{z}-2w)&=|z|^2-4|w|^2-2(zw-\overline{zw})\\&=9-8+8\mathrm{i}=1+8\mathrm{i}.\end{aligned}$$

因此，$(z+2\bar{w})(\bar{z}-2w)$ 的模为 $\sqrt{1^2+8^2}=\sqrt{65}$.

例 4 已知复数 z_1、z_2、z_3 满足 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，$|z_1+z_2+z_3|=r$，其中 r 是给定实数. 求 $\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}$ 的实部（用含 r 的式子表示）.

解析 记 $w=\dfrac{z_1}{z_2}+\dfrac{z_2}{z_3}+\dfrac{z_3}{z_1}$. 由复数模的性质可知

$$\overline{z_1}=\frac{1}{z_1},\ \overline{z_2}=\frac{1}{z_2},\ \overline{z_3}=\frac{1}{z_3}.$$

因此 $w=z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_3}+z_3\overline{z_1}$，于是

$$\begin{aligned}r^2 &= (z_1+z_2+z_3)(\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3})\\ &= |z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2+w+\bar{w}\\ &= 3+2\mathrm{Re}\,w,\end{aligned}$$

由此解得 $\mathrm{Re}\,w=\dfrac{r^2-3}{2}$.

例 5 设 α、β 为复数且 $|\alpha|=k$，证明：

$$\left|k|\beta|^{\frac{1}{2}}-\alpha\frac{\beta}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\right|^2=2k[k|\beta|-\mathrm{Re}(\alpha\beta)].$$

解析 给出两种证明方法.

方法 1：先证明另一个形式上简单一些的恒等式：

$$||w|-w|^2=2|w|(|w|-\mathrm{Re}\,w). \qquad ①$$

这是因为令 $w=a+\mathrm{i}b(a,b\in\mathbf{R})$，则左边即为$(\sqrt{a^2+b^2}-a)^2+b^2$，右边为 $2(a^2+b^2)-2a\sqrt{a^2+b^2}$，两边显然是相等的.

由此，令 $w=\alpha\dfrac{\beta}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}$，注意到$\left|\alpha\dfrac{\beta}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\right|=k|\beta|^{\frac{1}{2}}$ 即知题目中的恒等式是成立的，证毕.

方法 2：利用恒等式：$|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2-2\mathrm{Re}(\bar{\alpha}\beta)$，则

$$\begin{aligned}\left|k|\beta|^{\frac{1}{2}}-\alpha\frac{\beta}{|\beta|^{\frac{1}{2}}}\right|^2 &= (k|\beta|^{\frac{1}{2}})^2+(k|\beta|^{\frac{1}{2}})^2-2\mathrm{Re}(k\alpha\beta)\\ &= 2k[k|\beta|-\mathrm{Re}(\alpha\beta)],\end{aligned}$$

证毕.

注 事实上，证法 1 中的那个形式上简单一些的恒等式也可以由证法 2 中的那个恒等式推出. 这是一个熟知的结论，但是有相当多的学生不习惯，或者说不喜欢用这个式子，因为觉得这个式子破坏了对称性，不如 $|\alpha-\beta|^2=|\alpha|^2+|\beta|^2-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}$ 来得美观. 但在本题中，恰恰是这个实形式的恒等式对解题所起的作用要比对称形式的那个式子大(读者可以自行比较).

例 6 记 $A=\cos\dfrac{\pi}{11}+\cos\dfrac{3\pi}{11}+\cos\dfrac{5\pi}{11}+\cos\dfrac{7\pi}{11}+\cos\dfrac{9\pi}{11}$,

$$B=\sin\frac{\pi}{11}+\sin\frac{3\pi}{11}+\sin\frac{5\pi}{11}+\sin\frac{7\pi}{11}+\sin\frac{9\pi}{11},$$

求证：$A=\dfrac{1}{2}$，$B=\dfrac{1}{2}\cot\dfrac{\pi}{22}$.

解析 设 $z=\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}$，则

$$\begin{aligned}A+B\mathrm{i}&=z+z^3+z^5+z^7+z^9=\frac{z(1-z^{10})}{1-z^2}=\frac{z-z^{11}}{1-z^2}\\&=\frac{z-(\cos\pi-\mathrm{i}\sin\pi)}{1-z^2}=\frac{z+1}{1-z^2}=\frac{1}{1-z}\\&=\frac{1-\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}}{2-(z+\bar{z})}\\&=\frac{1-\cos\frac{\pi}{11}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{11}}{2\left(1-\cos\frac{\pi}{11}\right)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{11}}{1-\cos\frac{\pi}{11}}\mathrm{i}\\&=\frac{1}{2}+\mathrm{i}\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}.\end{aligned}$$

所以 $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{22}$，证毕.

例 7 求 $\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ$ 的值.

解析 引入复数，设 $z=\cos 20^\circ+\mathrm{i}\sin 20^\circ$，则

$$\bar{z}=\frac{1}{z}=\cos 20^\circ-\mathrm{i}\sin 20^\circ.$$

于是，有

$$\cos 20^\circ=\frac{z+\bar{z}}{2}=\frac{z^2+1}{2z},$$

$$\sin 20^\circ=\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}=\frac{z^2-1}{2z\mathrm{i}},$$

$$z^3=\cos 60^\circ+\mathrm{i}\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

所以

$$\begin{aligned}\tan 20^\circ+4\sin 20^\circ&=\frac{z^2-1}{(z^2+1)\mathrm{i}}+4\cdot\frac{z^2-1}{2z\mathrm{i}}=\frac{2z^4+z^3-z-2}{\mathrm{i}(z^3+z)}\\&=\frac{2\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)z+\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)-z-2}{\mathrm{i}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}+z\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\left(zi + \frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{2}i + zi - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{3}.$$

故 $\tan 20^\circ + 4\sin 20^\circ = \sqrt{3}$.

注 （1）以上两题阐明了复数与三角的联系.

（2）下面给出一组求值题，有趣的是，它们的值均为$\sqrt{3}$.

$\cot 10^\circ - 4\cos 10^\circ$；

$\cot 20^\circ - \sec 10^\circ$；

$\csc 40^\circ + \tan 10^\circ$；

$4\sin 40^\circ - \tan 40^\circ$.

例 8 已知数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$，对大于 1 的整数 n，均成立

$$a_n = a_{n-1}\cos\theta - b_{n-1}\sin\theta, \quad ①$$

$$b_n = a_{n-1}\sin\theta + b_{n-1}\cos\theta, \quad ②$$

且 $a_1 = 1$，$b_1 = \tan\theta$，其中 θ 为已知锐角，试求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的通项公式.

解析 引入复数，构造等比数列.

设 $z_n = a_n + b_n i(a_n, b_n \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}_+)$，则

$$\begin{aligned} \frac{z_n}{z_{n-1}} &= \frac{(a_{n-1}\cos\theta - b_{n-1}\sin\theta) + (a_{n-1}\sin\theta + b_{n-1}\cos\theta)i}{a_{n-1} + b_{n-1}i} \\ &= \frac{(\cos\theta + i\sin\theta)(a_{n-1} + b_{n-1}i)}{a_{n-1} + b_{n-1}i} \\ &= \cos\theta + i\sin\theta, \end{aligned}$$

这说明复数列 $\{z_n\}$ 是以 $z_1 = 1 + i\tan\theta$ 为首项，以 $q = \cos\theta + i\sin\theta$ 为公比的等比数列，于是，有

$$\begin{aligned} z_n &= (1 + i\tan\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1} \\ &= \sec\theta(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)^{n-1} \\ &= \sec\theta(\cos\theta + i\sin\theta)^n \\ &= (\cos n\theta + i\sin n\theta)\sec\theta, \end{aligned}$$

故 $a_n = \sec\theta\cos n\theta$，$b_n = \sec\theta\sin n\theta$.

注 这是复数与数列的结合.

习 题 2

1 设 z 是模为 1 的复数,则函数 $f(z)=z^2+\dfrac{1}{z^2}$ 的最小值(　　).

(A) 是 0　　(B) 是 -2　　(C) 是 2　　(D) 不存在

2 已知 $|z_1|=|z_2|=1$, $z_1+z_2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,求复数 z_1、z_2.

3 已知非零复数 z 满足 $|z-\mathrm{i}|=1$,且 $\arg z=\theta$, 求

(1) θ 的取值范围;(2)复数 z 的模(用 θ 表示);(3)复数 $z^2-z\mathrm{i}$ 的辐角.

4 已知等边$\triangle ABC$ 的两个顶点坐标是 $A(2, 1)$, $B(3, 2)$,求顶点 C 的对应坐标.

5 已知 z_1, $z_2\in\mathbf{C}$,且 $|z_1|=2$, $|z_2|=9$, $|5z_1-z_2|=9$.

试求 $|5z_1+z_2|$ 的值.

6 已知 $|z|=1$, $z^{11}+z=1$,求复数 z.

7 已知复数 z_1、z_2 满足 $|z_1|=|z_2|=1$.

(1) 若 $z_1-z_2=\dfrac{\sqrt{6}}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{i}$,求 z_1、z_2 的值;

(2) 若 $z_1+z_2=\dfrac{12}{13}-\dfrac{5}{13}\mathrm{i}$,求 z_1z_2 的值.

8 求证: $\sin(4\arcsin x)=4x\cdot\sqrt{1-x^2}\cdot(1-2x^2)$. $(|x|\leqslant 1)$

9 设复数 z_1、z_2、z_3 不全为实数, $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, $2(z_1+z_2+z_3)-3z_1z_2z_3\in\mathbf{R}$,证明 $\max\{\arg z_1, \arg z_2, \arg z_3\}\geqslant\dfrac{\pi}{6}$.

3 复数与方程

在复数集中,有关方程的试题常考常新,对于复系数方程,其韦达定理仍然适用,而实系数方程的虚根以共轭形式成对出现.

一、实系数方程在复数集上的根

实系数方程 $ax^2+bx+c(a\neq 0,\ b^2-4ac<0)$ 在复数集 $\mathbf{C}$ 中有两个根为

$$x=\frac{-b\pm \mathrm{i}\sqrt{-(b^2-4ac)}}{2a}.$$

二、复平面上的曲线方程

如果复数 z 对应着复平面上一点 $Z(x,\ y)$,z_0,z_1,z_2 对应复平面上的定点 Z_0,Z_1,Z_2,就可得出一些常用曲线的复数形式的方程:

(1) 方程 $|z-z_0|=r$ 表示以 Z_0 为圆心、r 为半径的圆.

(2) 方程 $|z-z_1|=|z-z_2|$ 表示线段 Z_1Z_2 的垂直平分线.

(3) 方程 $|z-z_1|+|z-z_2|=2a(a>0,\ 2a>|Z_1Z_2|)$ 表示以 Z_1、Z_2 为焦点,a 为长半轴的椭圆.

若 $2a=|Z_1Z_2|$,则此方程表示以 Z_1、Z_2 为端点的线段.

(4) 方程 $||z-z_1|-|z-z_2||=2a(0<2a<|Z_1Z_2|)$ 表示以 Z_1、Z_2 为焦点,实轴长为 $2a$ 的双曲线.

(5) 复平面上的特殊区域.

用一些复数模的不等式,就可表示复平面上的特殊区域.

1) $|z-z_0|<r$ 表示以 Z_0 为圆心,r 为半径的圆的内部(不包括周界).

2) $r\leqslant|z-z_0|\leqslant R$ 表示以 Z_0 为圆心,半径不小于 r 且不大于 R 的圆环(包括周界).

3) $\mathrm{Re}(z)>0$ 表示复平面的右半平面,$\mathrm{Im}(z)<0$ 表示复平面的下半平面.

例 1　设 z、ω、λ 为复数，$|\lambda| \neq 1$，解关于 z 的方程：$\bar{z} - \lambda z = \omega$.

解析　方程两边取共轭得，$\overline{\bar{z} - \lambda z} = \bar{\omega}$，即 $z - \bar{\lambda}\,\bar{z} = \bar{\omega}$. 两边同乘 λ 得

$$\lambda z - |\lambda|^2\,\bar{z} = \lambda\bar{\omega}, \quad ①$$

又因为

$$\bar{z} - \lambda z = \omega. \quad ②$$

所以①＋②可得 $\bar{z}(1 - |\lambda|^2) = \omega + \lambda\bar{\omega}$，取共轭得 $z(1 - |\lambda|^2) = \bar{\omega} + \bar{\lambda}\omega$. 因为 $|\lambda| \neq 1$，所以 $z = \dfrac{\bar{\lambda}\omega + \bar{\omega}}{1 - |\lambda|^2}$.

注　在解复数方程的问题中，适当地取模或者共轭往往会简化很多计算过程.

例 2　已知关于 z 的实系数方程 $z^2 - 2pz + q = 0\,(p \neq 0)$ 的两虚根 z_1、z_2 在复平面内的对应点为 F_1、F_2，求以 F_1、F_2 为两焦点，且经过原点的椭圆的普通方程.

解析　由原方程有两个虚根可知：$\Delta = 4p^2 - 4q < 0$，因此 $q > p^2 > 0$.

设 $z_1 = a + b\mathrm{i}\,(a, b \in \mathbf{R})$，则 $z_2 = a - b\mathrm{i}$.

由韦达定理得，$\begin{cases} z_1 + z_2 = 2a = 2p, \\ z_1 z_2 = a^2 + b^2 = q, \end{cases}$

于是 $a = p$，$|OF_1| = |OF_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{q}$（如图 3－1）.

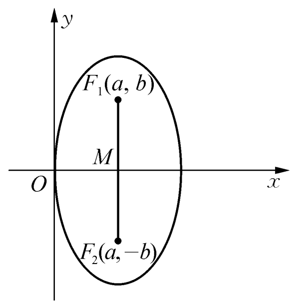

图 3－1

显然，椭圆的半短轴长 $= |OM| = |a| = |p|$，半焦距 $= |b|$，则半长轴长 $= \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{q}$，而椭圆的中心为 $(a, 0)$，即 $(p, 0)$.

所以椭圆的普通方程为 $\dfrac{(x - p)^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q} = 1$.

例 3　已知实系数方程

$$x^3 + 2(k - 1)x^2 + 9x + 5(k - 1) = 0$$

有一个模为 $\sqrt{5}$ 的虚根. 求 k 的值，并解此方程.

解析　因为 $x^3 + 2(k-1)x^2 + 9x + 5(k-1) = 0$，① 由虚根成对原理，可知 ① 有一个实根和两个模长为 $\sqrt{5}$ 的共轭虚根，设这三个根为 $a + b\mathrm{i}$、$a - b\mathrm{i}$、$c\,(a, b, c \in \mathbf{R})$，则

$$a^2 + b^2 = 5. \quad ②$$

由韦达定理，有

$$\begin{cases}(a+bi)+(a-bi)+c=-2(k-1),\\(a+bi)(a-bi)+c(a+bi)+c(a-bi)=9,\\(a+bi)(a-bi)c=-5(k-1).\end{cases}$$

结合②整理得

$$2a+c=-2(k-1), \tag{③}$$

$$ac=2, \tag{④}$$

$$c=-k+1. \tag{⑤}$$

由③、⑤知 $c=1-k$，$a=\frac{1}{2}(1-k)$，并将其代入②，可得 $k=-1$ 或 3.

再求解方程①知：当 $k=-1$ 时，①的解为 $1+2i$，$1-2i$，2；当 $k=3$ 时，①的解为 -2，$-1+2i$，$-1-2i$.

注 利用实系数方程虚根成对是本题的关键.

例 4 设复数 z_1、z_2 满足 $\mathrm{Re}(z_1)>0$，$\mathrm{Re}(z_2)>0$，且 $\mathrm{Re}(z_1^2)=\mathrm{Re}(z_2^2)=2$（其中 $\mathrm{Re}(z)$ 表示复数 z 的实部）.

（1）求 $\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值；

（2）求 $|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|$ 的最小值.

解析 （1）对 $k=1,2$，设 $z_k=x_k+y_ki(x_k, y_k\in\mathbf{R})$，由条件知

$$x_k=\mathrm{Re}(z_k)>0,\ x_k^2-y_k^2=\mathrm{Re}(z_k^2)=2.$$

因此

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1z_2)&=\mathrm{Re}[(x_1+y_1i)(x_2+y_2i)]=x_1x_2-y_1y_2\\&=\sqrt{(y_1^2+2)(y_2^2+2)}-y_1y_2\\&\geqslant(|y_1y_2|+2)-y_1y_2\geqslant 2.\end{aligned}$$

又当 $z_1=z_2=\sqrt{2}$ 时，$\mathrm{Re}(z_1z_2)=2$，这表明 $\mathrm{Re}(z_1z_2)$ 的最小值为 2.

（2）对 $k=1,2$，将 z_k 对应到平面直角坐标系 xOy 中的点 $P_k(x_k, y_k)$. 记 P'_2 是 P_2 关于 x 轴的对称点，则 P_1，P'_2 均位于双曲线 $C: x^2-y^2=2$ 的右支上.

设 F_1、F_2 分别是 C 的左、右焦点，易知 $F_1(-2, 0)$、$F_2(2, 0)$.

根据双曲线的定义，有

$$|P_1F_1|=|P_1F_2|+2\sqrt{2},$$

$$|P_2'F_1| = |P_2'F_2| + 2\sqrt{2},$$

进而得

$$\begin{aligned}|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2| &= |z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|z_1-\overline{z_2}| \\ &= |P_1F_1|+|P_2'F_1|-|P_1P_2'| \\ &= 4\sqrt{2}+|P_1F_2|+|P_2'F_2|-|P_1P_2'| \\ &\geqslant 4\sqrt{2},\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 F_2 位于线段 P_1P_2' 上(例如,当 $z_1=z_2=2+\sqrt{2}\mathrm{i}$ 时,F_2 恰是 P_1P_2' 的中点.)

综上可知,$|z_1+2|+|\overline{z_2}+2|-|\overline{z_1}-z_2|$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$.

例 5 设复平面上一个正方形的四个顶点对应的复数恰好是某个整系数一元四次方程 $x^4+px^3+qx^2+rx+s=0$ 的四个根.求这个正方形面积的最小值.

解析 设正方形的中心 A 对应的复数是 a,该正方形的顶点均匀分布在一个圆周上,它们对应的复数是方程 $(x-a)^4=b$ 的解,其中的 b 是某个复数.于是

$$\begin{aligned}&x^4+px^3+qx^2+rx+s \\ =&(x-a)^4-b \\ =&x^4-4ax^3+6a^2x^2-4a^3x+a^4-b.\end{aligned}$$

通过对比系数,可知 $-a=\dfrac{p}{4}$ 是有理数,再结合 $-4a^3=r$ 是整数,便知 a 是整数.于是,由 $a^4-b=s$ 是整数,可知 b 亦是整数.

以上的讨论表明,正方形顶点对应的复数是整系数方程 $(x-a)^4=b$ 的根,其外接圆半径 $\sqrt[4]{|b|}$ 不小于 1.于是,正方形的面积不小于 $(\sqrt{2})^2=2$.而方程 $x^4=1$ 的四个根在复平面上对应于一个正方形的顶点,此正方形面积为 2.故所求正方形面积的最小值是 2.

例 6 已知复数 z 满足 $11z^{100}+10\mathrm{i}z^{99}+10\mathrm{i}z-11=0$,求证:$|z|=1$.

解析 将已知复数方程变形为 $z^{99}=\dfrac{11-10\mathrm{i}z}{11z+10\mathrm{i}}$.

用反证法.

设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$,则

图书在版编目(CIP)数据

复数与向量 / 张思汇编著. —2 版. —上海：华东师范大学出版社，2019
（数学奥林匹克小丛书：第三版. 高中卷）
ISBN 978-7-5675-9519-4

Ⅰ. ①复… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①中学数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2019)第 220587 号

数学奥林匹克小丛书(第三版)·高中卷
复数与向量(第二版)

编　　著　张思汇
总 策 划　倪　明
责任编辑　孔令志
特约审读　徐惟简
责任校对　时东明
装帧设计　高　山
责任发行　颜星华

出版发行　华东师范大学出版社
社　　址　上海市中山北路 3663 号　邮编 200062
网　　址　www.ecnupress.com.cn
电　　话　021-60821666　行政传真 021-62572105
客服电话　021-62865537　门市(邮购)电话 021-62869887
地　　址　上海市中山北路 3663 号华东师范大学校内先锋路口
网　　店　http://hdsdcbs.tmall.com

印 刷 者　山东韵杰文化科技有限公司
开　　本　787×1092　16 开
插　　页　1
印　　张　7
字　　数　122 千字
版　　次　2020 年 4 月第二版
印　　次　2020 年 4 月第一次
印　　数　1—30 100
书　　号　ISBN 978-7-5675-9519-4
定　　价　20.00 元

出 版 人　王　焰

（如发现本版图书有印订质量问题，请寄回本社客服中心调换或电话 021-62865537 联系）

华东师大社主办的 QQ 群（部分）：

1. 华师—小学奥数教练 2 群，群号：689181206
2. 华师—初中数学教师 2 群，群号：112892422
3. 华师—中学奥数教练群，群号：545921244
4. 华师—高中数学教师群，群号：319118349
5. 华师—初中理科学生群，群号：609160454
6. 华师—高中理科学生群，群号：455685245

欢迎广大师生加入相应的群中。