# 第 三 章　连 续 函 数

## § 3.1 连续和间断

**定义**　$f(x)$ 定义在 $(a,b)$，$x_0 \in (a,b)$，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \to f(x_0)$，则称函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续，$x_0$ 称为连续点，否则称 $x_0$ 为间断点。

函数 $f(x)$ 在 $x_0 \in (a,b)$ 连续也可用 $e-d$ 语言来叙述：$f(x)$ 定义于 $(a,b)$，$x_0 \in (a,b)$，若 $\forall e > 0$，$\exists d > 0$，使得当 $x \in (a,b)$ 且 $|x - x_0| < d$ 时，有

$$|f(x) - f(x_0)| < e,$$

则称 $f(x)$ 在点 $x_0$ 连续。

等价地也可表述为 $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \to f(x_0 - 0)$，$\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \to f(x_0 + 0)$ 且

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0),$$

即如果 $f(x)$ 在 $x_0$ 左右极限都存在，且等于该点函数值，称 $f(x)$ 在该点连续。

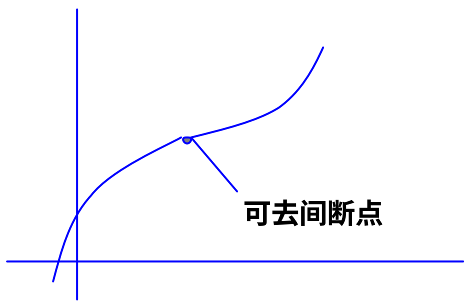
**间断点可分为三类**

**定义**　(1) 若函数在 $x_0$ 点左右极限存在且相等，但不等于该点的函数值，则称 $x_0$ 为可去间断点。

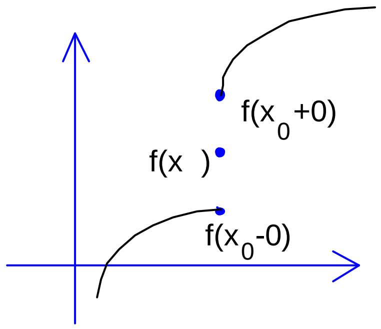
(2) 若函数在 $x_0$ 点左右极限存在，但不相等，称 $x_0$ 为第一类间断点。

(3) 若函数在 $x_0$ 点的左右极限至少有一个不存在，称 $x_0$ 为第二类间断点。

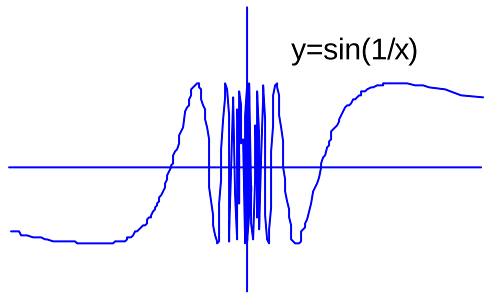
在可去间断点 $x_0$ 上，我们修改 $f(x)$ 在 $x_0$ 定义，$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0)$，则它就变成在 $x_0$ 连续的函数了，这就是“可去”的意思。这不是本质间断的。另两类间断点才是本质的。




可去间断点




**第一类间断点**




**第二类间断点**

**例**

**（i）** $f(x)=\begin{cases} x, & x\text{为有理数，} \\ 0, & x\text{为无理数。} \end{cases}$ $x=0$**是连续点，其余都是第二类间断点。**

**（ii）** $f(x)=\begin{cases} 2, & x=1 \\ 1, & x\neq 1 \end{cases}$ $x=1$**是可去间断点。**

**（iii）** $f(x)=\begin{cases} arctg\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0 \quad, & x=0. \end{cases}$ $x=0$**是第一类间断点。**

**（iv）** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$ $x=0$**是第二类间断点。**

**（v）** $f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0 \quad, & x=0. \end{cases}$ $x=0$**是第二类间断点。**

**（vi）** Dirichlet **函数** $D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{为有理数，} \\ 0\text{，} & x\text{为无理数。} \end{cases}$ **每一点都是第二类间断点。**

**（vii）** Riemann **函数** $R(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}\text{为有理数，} \\ 0\text{，} & x\text{为无理数。} \end{cases}$ **所有有理点为可去间断点，无理点为连续点。**

**定义** **若** $f(x)$ **在区间上每一点连续（闭区间情况端点单侧连续），则称函数在区间上连续。**

**定理** $f(x)$ **在** $(a,b)$ **上单调，则** $f(x)$ **只有第一类间断点。**

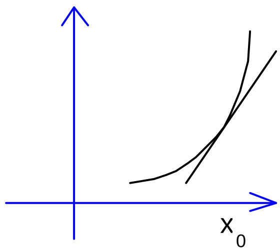
**证** **无妨设** $f(x)$ **在** $(a,b)$ **单调上升，** $\forall x_0\in(a,b)$ **，当** $x\to x_0-0$ **时，函数值** $f(x)$ **单**

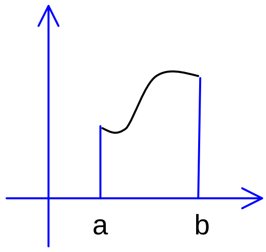
调上升，有上界 $f(x_0)$，所以极限存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0)\le f(x_0)$。

同理 $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)\ge f(x_0)$。

若 $f(x_0-0)=f(x_0+0)$，$x_0$ 为 $f(x)$ 连续点，若 $f(x_0-0)<f(x_0+0)$，$x_0$ 为第一类间断点。

连续函数是一类 " 比较好 " 的函数，是研究微积分的基础。




微分或导数是求曲线 $f(x)$ 在 $x_0$ 点切线的斜率，函数在 $x_0$ 连续，是切线存在的必要条件。积分是求区间 $[a,b]$ 上曲线 $f(x)$ 下面的一块曲边梯形的面积，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，是面积存在的充分条件，连续不是可微的充要条件，也不是可积的充要条件，是介乎中间的一类函数，其直观意义是 " 不间断 "，即不被剪开，也不被振断。

## §3.2　连续函数的性质

**1. 定理 1**　$f(x)$ 定义在 $U(x_0)$ 上，在 $x_0$ 点连续，$f(x_0)>0$，则 $\exists d>0$ 使 $f(x)>0$，$x\in U(x_0,d)$，(湮符号性质)。

**定理 2**　设 $f(x)$，$g(x)$ 在点 $x_0$ 连续，则

(1)　$f(x)\pm g(x)$ 在 $x_0$ 点连续；

(2)　$f(x)\cdot g(x)$ 在 $x_0$ 点连续；

(3)　若 $g(x_0)\ne 0$，$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x_0$ 点连续。

**推论**　若 $f$，$g\in C[a,b]$，则 $f(x)\pm g(x)\in C[a,b]$，$f(x)\cdot g(x)\in C[a,b]$，又若 $\forall x\in[a,b], g(x)\ne 0,\ \dfrac{f(x)}{g(x)}\in C[a,b]$。

连续是用极限定义的，本推论是极限四则运算定理的直接结果，不证自明。

**定理 3** 设 $y=f(t)$ 在 $t=t_0$ 点连续，$t=g(x)$ 在 $x=x_0$ 点连续，且 $t_0=g(x_0)$，则 $y=f[g(x)]$ 在 $x=x_0$ 点连续。

这是复合函数求极限定理的直接结果，因其证明方法具有典型性，这里我们还是给出其证明。

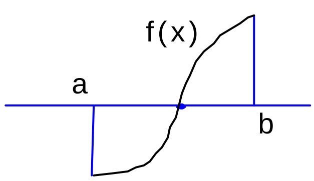
**证** $\forall e>0$，由 $f(t)$ 在 $t_0$ 连续，$\exists h>0$，使得当 $|t-t_0|<h$ 时，有 $|f(t)-f(t_0)|<e$.

对于 $h>0$，由 $g(x)$ 在 $x_0$ 连续，$\exists d>0$，使得当 $|x-x_0|<d$ 时，有 $|g(x)-g(x_0)|=|t-t_0|<h$。所以当 $|x-x_0|<d$ 时，有 $|f(t)-f(t_0)|=|f[g(x)]-f[g(x_0)]|<e$，即 $f[g(x)]$ 在 $x_0$ 点连续。

**推论** 若 $g(x)\in C(a,b)$，值域包含于 $(a,b)$，$f(t)\in C(a,b)$，则 $f[g(x)]\in C(a,b)$

2．下面我们给出闭区间上连续函数的基本性质定理，这里我们给出证明，但目前不要求同学们掌握，到第三册我们还会回到这个课题。

**定理**（**Bolzano-Cauchy** 第一定理）设 $f(x)\in C[a,b]$，$f(a)\cdot f(b)<0$，则 $\exists x\in(a,b)$，使得 $f(x)=0$。




一条不间断的绳子，两头夹住，一头正，一头负，总有一点 $x$ 使得 $f(x)=0$。

**证明**：不妨设 $f(a)<0$，$f(b)>0$。用中点 $c_0=\dfrac{a+b}{2}$ 将 $[a,b]$ 一分为二，得两区间 $[a,c_0]$ 和 $[c_0,b]$。若 $f(c_0)=0$，取 $x=c_0$ 即可。不然若 $f(c_0)>0$，取 $[a_1,b_1]=[a,c_0]$；若 $f(c_0)<0$，取 $[a_1,b_1]=[c_0,b]$，这保证

$$f(a_1)<0,\qquad f(b_1)>0。$$

再用中点 $c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$ 将 $[a_1,b_1]$ 一分为二，如上面方法选 $[a_2,b_2]$，$\Lambda$。如此下去，在某一步如有 $f(c_n)=0$，取 $x=c_n$ 即可，否则我们得到一区间串 $[a_n,b_n]$，满足

1） $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，$n=1,2,3,\Lambda$；

2） $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b-a) \to 0$，当 $n \to \infty$ 时；

3） $f(a_n) < 0 < f(b_n)$。

由区间套定理，存在 $x \in [a_n, b_n]$，使得

$$\lim_{n\to\infty} a_n = x = \lim_{n\to\infty} b_n。$$

再由 3）及连续函数性质，有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \le 0，$$

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \ge 0，$$

从而 $f(x) = 0$。

**定理（Bolzano-Cauchy 第二定理）** 设 $f(x) \in C[a,b]$，值 $h$ 介于 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间，则 $\exists x \in [a,b]$，使得 $f(x) = h$。

**证** 不妨设 $h \ne f(a), f(b)$， 作 $F(x) = f(x) - h$， $F(x) \in C[a,b]$ 且 $F(b) \cdot F(a) < 0$，则由 Bolzano-Cauchy 第一定理 $\exists x \in (a,b)$，使 $F(x) = 0$，即 $f(x) = h$。

**定理（Weierstrass 第一定理）** $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界。

**证明：** 如若不然，$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，$\forall n \in \mathbf{N}$，$\exists x_n \in [a,b]$，使得 $|f(x_n)| > n$，对于序列 $\{x_n\}$，它有上下界 $a \le x_n \le b$，波尔察诺子序列定理告诉我们 $\exists x_{n_k}$ 使得 $x_{n_k} \to x_0 \in [a,b]$，由 $f(x)$ 在 $x_0$ 连续，及 $|f(x_{n_k})| > n_k$ 有

$$|f(x_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(x_{n_k})| = +\infty，$$

矛盾。

**定理（Weierstrass 第二定理）** $f(x) \in C[a,b]$，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上达到上、下确界。

**证** 令 $M = \sup_{a \le x \le b}\{f(x)\}$， $M < +\infty$，如果 $f(x)$ 达不到 $M$，则恒有 $f(x) < M$。

考虑函数 $j(x) = \frac{1}{M - f(x)}$，则 $j(x) \in C[a,b]$，因而有界，即 $j(x) \le m \quad (m > 0)$，

**从而** $f(x) \le M - \frac{1}{m} < M$ **，这与** $M$ **是上确界矛盾，因此** $\exists \bar{x} \in [a,b]$ **，使得** $f(\bar{x}) = M$ **。**

**类似地可以证明达到下确界。**

## 3．一致连续性

**定义** **设** $f(x)$ **定义在区间** $I$ **上，** $\forall e > 0$，$\exists d = d(e) > 0$，**使得当** $|x_1 - x_2| < d$，$x_1$，$x_2 \in I$ **时，有** $|f(x_1) - f(x_2)| < e$ **，则称** $f(x)$ **在** $I$ **上一致连续。**

**一致连续比一般地连续要强：**$f(x)$ **在** $I$ **连续，**$\forall x_0 \in I$ **，**$\forall e > 0$ **，**$\exists d = d(x_0, e) > 0$ **，使得当** $|x - x_0| < d$ **，** $x \in I$ **时，有** $|f(x) - f(x_0)| < e$ **。**

**这里** $d = d(x_0, e)$ **与点** $x_0$ **有关，在一致连续定义中** $d = d(e)$ **与** $x_1, x_2$ **无关，是在区间** $I$ **放在何处而皆准的普适常数。**

**函数在区间**$I$ **上一致连续推出它在区间上连续，反之不对。但如果是闭区间，就成立了，看下面定理：**

**定理（Cantor 1845-1918）** $f(x) \in C[a,b]$，**则** $f(x)$ **在**$[a,b]$**上一致连续。**

**证明： 如果不然，**$f(x)$ **在**$[a,b]$**上不一致连续，**$\exists e_0 > 0$ **，**$\forall d > 0$ **，**$\exists x', x'' \in [a,b]$ **，** $|x' - x''| < d$ **，而** $|f(x') - f(x'')| \ge e_0$**。**

**取**$d = \frac{1}{n}$ **，** $\exists x_n', x_n'' \in [a,b]$ **，** $|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n}$ **，而** $|f(x_n') - f(x_n'')| \ge e_0$ **，由波尔察诺定理，存在子序列** $x_{n_k}' \to x_0 \in [a,b]$ **，而由** $|x_{n_k}' - x_{n_k}''| < \frac{1}{n_k}$ **，也有** $x_{n_k}'' \to x_0$ **。 再由** $f(x)$ **在** $x_0$ **连续，在** $|f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \ge e_0$ **中令** $k \to \infty$ **，得**

$$0 = |f(x_0) - f(x_0)| = \lim_{k \to \infty} |f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')| \ge e_0 ,$$

**矛盾。所以** $f(x)$ **在**$[a,b]$**上一致连续。**

**例** **设** $f(x)$ **在** $[a,+\infty)$ $(a > 0)$ **上满足** Lipschitz **条件：**$|f(x) - f(y)| \le k|x - y|$，**证明** $\frac{f(x)}{x}$ **在** $[a,+\infty)$ **上一致连续。**

**证** **分析**

$$\left|\frac{f(x_1)}{x_1}-\frac{f(x_2)}{x_2}\right|\le\left|\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1}\right|+\left|f(x_2)\right|\frac{|x_1-x_2|}{|x_1x_2|}$$
$$\le B|x_1-x_2|<e.$$

因为 $|f(x)-f(a)|\le k|x-a|$，

$$|f(x_2)|\le k|x_2|+k|a|+|f(a)|,$$

$$\left|\frac{f(x_2)}{x_2}\right|\le B,$$

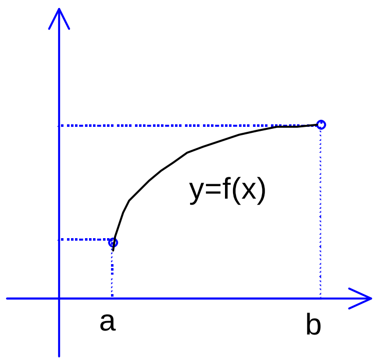
取$d=\dfrac{e}{B}$，当$|x_1-x_2|<d$时，$\left|\dfrac{f(x_1)}{x_1}-\dfrac{f(x_2)}{x_2}\right|<e$。

## §3.3 初等函数连续性

1．**多项式函数** $P_n(x)\in C(-\infty,+\infty)$。

**有理函数** $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\in C(D)$，

$$D=\mathbf{R}\setminus\{Q_m(x)\text{的零点}\}$$




**三角函数** $\sin x$, $\cos x\in C(-\infty,+\infty)$

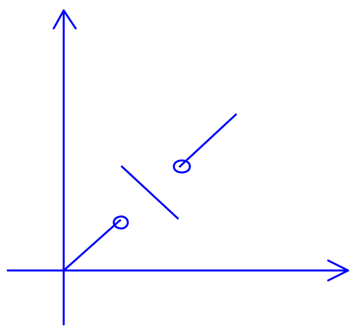
$$|\sin x-\sin x_0|=\left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|\le|x-x_0|<e$$

$$tg\,x\in C(D),\qquad D=\mathbf{R}\setminus\{(k+\tfrac{1}{2})p\ ,\ k\in\mathbf{Z}\}$$

2．**定理** 区间上严格单调函数，如果值域为一区间，则函数连续。（见上图）

本定理可看成 Bolzano-Cauchy 第二定理之逆：连续函数可以取到一切中间值，反之不对，看例子

$$f(x)=\begin{cases}x & 0\le x<1,\\ 3-x & 1\le x\le 2,\\ x & 2<x\le 3.\end{cases}$$



它可取一切中间值，却不连续。 但如加上严格单调条件，就成立了。

**定理的证明** 不妨设 $f(x)$ 在区间 $I=(a,b)$ 严格上升，若 $f(x)$ 在 $x_0\in I$ 不连续，则 $f(x_0-0)\le f(x_0)\le f(x_0+0)$ 中必有一严格不等号成立，比如 $f(x_0-0)<f(x_0)$，则值域包含在 $(f(a+0), f(x_0-0)]\cup[f(x_0), f(b-0))$ 中，就不是一个区间了。

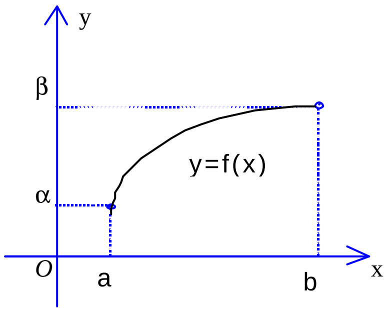
下面定理给出反函数的连续性。

**定理** 设 $y=f(x)\in C(a,b)$，严格上升，记 $\inf\limits_{a<x<b} f(x)=\alpha$，$\sup\limits_{a<x<b} f(x)=\beta$，（$\alpha$，$\beta$ 可能为 $-\infty,+\infty$）

则 (1) 在 $(\alpha,\beta)$ 上存在反函数 $x=f^{-1}(y)$；

(2) $x=f^{-1}(y)$ 在 $(\alpha,\beta)$ 上严格上升；

(3) $f^{-1}(y)\in C(\alpha,\beta)$。




实际上 $y=f(x)$ 和 $x=f^{-1}(y)$ 表示是同一条曲线，单调性和连续性都是这条曲线的固有性质，这定理结果是再也自然不过的事实。

**证** (1) 因 $y=f(x)$ 严格上升，反函数一定存在，需要证 $f^{-1}(y)$ 的定义域恰为 $(\alpha,\beta)$。

$\forall y_0\in(\alpha,\beta)$，由上、下确界定义，$\exists x',x''\in(a,b)$，使得 $f(x')<y_0<f(x'')$。在 $[x',x'']$ 或 $[x'',x']$ 上应用 Bolzano-Cauchy 第二定理，$\exists x_0\in(x',x'')$ 或 $(x'',x')$，使得 $f(x_0)=y_0$，由 $y_0$ 的任意性，得到 $(\alpha,\beta)$ 为 $f$ 的值域，即 $(\alpha,\beta)$ 为 $x=f^{-1}(y)$ 的定义域。

(2) 设 $y_1,\ y_2\in(\alpha,\beta)$，$y_1<y_2$，要证 $x_1=f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)=x_2$，若 $x_1\ge x_2$，由反函数定义及 $f(x)$ 的严格上升，得 $y_1=f(x_1)\ge f(x_2)=y_2$，矛盾，所以 $f^{-1}(y)$ 严格上升。

(3) $f^{-1}(y)$ 在 $(\alpha,\beta)$ 严格上升，值域为 $(a,b)$，由定理 1 知 $f^{-1}(y)\in C(\alpha,\beta)$。

**注** 若 $f(x)\in C[a,b]$ 严格上升，令 $f(a)=\alpha$，$f(b)=\beta$，则结论中 $(\alpha,\beta)$ 改为 $[\alpha,\beta]$ 仍成立，对严格下降函数也有同样结论。

由此可得 $y=\arcsin\ x\in C[-1,1]$,

$y=\arccos x\in C[-1,1]$,

$y = arctg\, x \in C(-\infty, +\infty)$ 。

**3．指数函数$a^x$、对数函数$\log_a x$和幂函数$x^a$连续性**

**引理** 设$a > 1,\ n > 1$为正整数，则∃！$b > 1$， 使$a = b^n$。由此我们可以定义$b = \sqrt[n]{a}$。

**证** 在区间 $[1, a]$上考虑函数$f(x) = x^n \in C[1, a]$，且$f(1) = 1 < a < a^n = f(a)$。Bolzano-Cauchy 第二定理给出$b \in [1, a]$，使$a = b^n$。

如果$b' = \sqrt[n]{a}$，即$b'^n = a$，$b'^n = b^n$，由函数$f(x) = x^n$ 严格单调，推出$b' = b$，即唯一性。

**定义** 若$q = \dfrac{m}{n}$（$m, n$正整数，互素）为正有理数，$a^q = (\sqrt[n]{a})^m$。 若$q$为负有理数，$a^q = \dfrac{1}{a^{-q}}$，定义$a^0 = 1$。 若$l$为无理数，定义$a^l = \sup\limits_{q<l} a^q$， $q$为有理数。

这里需说明$\sup$存在：当$q$为有理数时，$a^q$是单调上升的，即 $q_1 < q_2$ 时，$\dfrac{a^{q_2}}{a^{q_1}} = a^{q_2 - q_1} > 1$，$a^{q_2} > a^{q_1}$，所以$\sup$存在。

最后无论$x$为有理数还是无理数，都有$a^x = \sup\limits_{q \le x} a^q$，$q$为有理数。

**命题** $f(x) = a^x$严格上升，在$(-\infty, +\infty)$上连续。

**证** 设$x_1 < x_2$，∃有理数$q_1, q_2$，使得$x_1 \le q_1 < q_2 \le x_2$，由此

$$a^{x_1} = \sup_{q \le x_1} a^q \le a^{q_1} < a^{q_2} \le \sup_{q \le x_2} a^q = a^{x_2}。$$

$\forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$，$\forall e > 0$，$\exists N$，使得$a < (1+e)^N$，取$q_1, q_2$有理数，使得$q_1 < x_0 < q_2$，$q_2 - q_1 = \dfrac{1}{N}$，则 $f(x_0) \le f(x_0 + 0) \le a^{q_2}$， $f(x_0) \ge f(x_0 - 0) \ge a^{q_1}$，

$1 \le \dfrac{f(x_0 + 0)}{f(x_0 - 0)} \le \dfrac{a^{q_2}}{a^{q_1}} = a^{q_2 - q_1} = a^{\frac{1}{N}} < 1 + e$，所以$f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = f(x_0) = a^{x_0}$。

**指数函数还有性质** $a^{x_1} a^{x_2} = a^{x_1 + x_2}$。

**命题** 对数函数$y = \log_a x \in C(0, +\infty)$。

**证**　$x=a^{y}$ **在** $(-\infty,+\infty)$ **上严格上升，连续，其值域为** $(0,+\infty)$ **，所以其反函数** $y=\log_{a}x$ **在** $(0,+\infty)$ **也严格上升，连续。**

**命题**　**幂函数** $y=x^{a}=e^{a\ln x}\in C(0,+\infty)$**。**

**证**　**它是指数函数** $e^{z}$ **和对数函数** $z=a\ln x$ **的复合函数，每个函数都连续，它们的复合也连续。**

**结论**　**一切初等函数都在其定义域上是连续的。**

**求极限的指数法则**　**若** $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=a>0$ **，** $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=b$ **，则** $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^{b}>0$**。**

**证**　**如果** $u(x),v(x)$ **在** $x_0$ **点连续，且** $u(x_0)>0$ **，则** $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$ **在** $x_0$ **点连续，补充定义** $u(x_0)=a$ **，** $v(x_0)=b$ **，则** $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^{b}$ **。**

**上述极限过程当** $x_0=+\infty,-\infty$ **时仍成立，只要利用变换** $x=\dfrac{1}{t}$ **就行了，例如：**

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\sin\dfrac{1}{x})^{x}$ **中我们注意到** $(1+\sin\dfrac{1}{x})^{x}=(1+\sin\dfrac{1}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}}$ **，很容易得到它趋向于** $e$ **，当** $x\to+\infty$ **时。**

$f$ **连续** $\Leftrightarrow$ $f$ **与** $\lim\limits_{x\to x_0}$ **可交换：**

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)=f(\lim_{x\to x_0}x)\text{；}$$

$$\lim_{x\to x_0}f(j(x))=f(\lim_{x\to x_0}j(x))=f(j(x_0))\text{。}$$

# 习题

3.1　**研究下列函数的连续性，并指出间断点类型：**

（1）　$f(x)=\operatorname{sgn}x$ ；　　（2）　$g(x)=x-[x]$ ；

（3）　$f[g(x)]$ ；$g[f(x)]$ ；　　（4）　$h(x)=\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}\right)\Big/\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

3.2　**指出下列函数的间断点，并说明属于哪一类型的间断点：**

（1）　$y=\dfrac{x}{(1+x)^{2}}$ ；　　（2）　$y=\cos^{2}\dfrac{1}{x}$ ；

（3） $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$；　　　　（4） $y = \dfrac{1}{\left[\dfrac{1}{x}\right]}$ $(0 < x \le 1)$.

3.3 **适当选取** $a$**，使函数** $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0 \\ a + x, & x \ge 0 \end{cases}$ **连续**.

3.4 **举出处处都不连续，但取绝对值后却是处处连续的函数的例子**.

3.5 **设** $f(x)$**，**$g(x)$ **在** $[a, b]$ **上连续，证明：**

（1） $|f(x)| \in C[a, b]$；

（2） $\max(f(x), g(x)) \in C[a, b]$；

（3） $\min(f(x), g(x)) \in C[a, b]$.

3.6 **设** $f(x) \in C[a, b]$**，令**

$$f_t(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > t \text{ 的 } x \in [a, b], \\ t, & f(x) \le t \text{ 的 } x \in [a, b]. \end{cases}$$

**求证：** $f_t(x) \in C[a, b]$.

3.7 **设** $f(x)$ **在** $x = 0$ **处连续，且** $\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$**，有** $f(x + y) = f(x) + f(y)$**，证明：**

$f(x)$ **在** $(-\infty, +\infty)$ **上连续，且** $f(x) = f(1) \cdot x$.

3.8 **设** $f(x)$ **在** $(a, b)$ **上只有第一类间断点，且对** $\forall x, y \in (a, b)$**，有**

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \le \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

**求证：** $f(x)$ **在** $(a, b)$ **上连续**.

3.9 **证明方程** $x^3 + px + q = 0$ $(p > 0)$ **有且只有一个实根**.

3.10 **设** $f(x)$ **在** $(a, b)$ **上连续，** $x_1, x_2, \cdots, x_n \in (a, b)$**，证明：** $\exists x \in (a, b)$**，使**

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i).$$

3.11 **设** $f(x) \in C[a, b]$**，且** $x_1 \ne x_2$ **（**$x_1, x_2 \in [a, b]$**）时，有** $f(x_1) \ne f(x_2)$**，求证：**

$f(x)$ **在** $[a, b]$ **上严格单调上升或严格单调下降**.

3.12　**设** $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，$\forall x,\ y\in(-\infty,+\infty)$，**函数** $f(x)$ **满足**

$$|f(x)-f(y)|\le k|x-y| \quad (0<k<1).$$

**求证：**（1）　**函数**$kx-f(x)$**单调上升；**

（2）　$\exists x\in(-\infty,+\infty)$，**使** $f(x)=x$ .

3.13　**求下列极限：**

（1）　$\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+x}}$；　　　　（2）　$\lim\limits_{n\to+\infty}(arctgx)^{\cos\frac{1}{x}}$.

3.14　**求下列极限：**

（1）　$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$；　　　　（3）　$\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

3.15　**证明：方程**$x^a=\ln x$　（$a<0$）**在正实轴上有且仅有一根**.

3.16　**设** $f(x)\in C[a,+\infty)$，**且** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **存在，证明：** $f(x)$ **在**$[a,+\infty)$ **上有界**.

3.17　**设** $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，**且** $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=+\infty$，**证明：** $f(x)$ **在**$(-\infty,+\infty)$ **上取到它的最小值**.

3.18　**设** $f(x),\ g(x)\in C[a,b]$　，**证明：**$\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)+g(x)|\le\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)|+\max\limits_{a\le x\le b}|g(x)|$.

3.19　**设** $f(x)\in C[a,b]$，**记** $g(x)=\max\limits_{a\le t\le x}f(t)$　$(a\le x\le b)$，**求证：** $g(x)\in C[a,b]$.

3.20　**求证：** $y=x$ **和** $y=\sin x$ **在实轴上一致连续**.

3.21　**求证：** $y=\sqrt[3]{x}$ **在**$[0,+\infty)$ **上一致连续**.

3.22　**设** $f(x)$ **在**$(a,b)$ **上一致连续，证明：**

（1）　$f(x)$ **在**$(a,b)$ **上有界；**

（2）　$y=\ln x$ **在**$(0,1)$ **上不一致连续**.

3.23　**设** $f(x)$ **在**$[a,b]$ **上满足李普希兹条件：**

$$|f(x)-f(y)|\le k|x-y|,\quad (k\text{ 为常数}),\ \forall x,\ y\in[a,b].$$

**证明：** $f(x)$ **在**$[a,b]$ **上一致连续**.

3.24　**设** $f(x)$ **在**$[a,+\infty)$ $(a>0)$ **上满足李普希兹条件：**

$$|f(x)-f(y)| \le k|x-y|，\forall x, y \in [a,+\infty).$$

**证明：**$\dfrac{f(x)}{x}$**在**$[a,+\infty)$**上一致连续**.

3.25 **设**$f(x)$**在**$(-\infty,+\infty)$**上单调，且满足方程：**

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}，\forall x, y \in (-\infty,+\infty).$$

**求证：**$f(x)=f(0)+f(1)\cdot x$.

3.26 **设** $f(x)$ **在** $[a,b]$ **上连续，并且有唯一的极大点** $x_0$ **；又设** $x_n \in [a,b]$ **，使** $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)=f(x_0)$**。求证：**$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x_0$**。**

3.27 **设**$f(x)$**在**$(a,b)$**上连续，且无极大点，求证：**$f(x)$**只存在两种情况：**

（1）$f(x)$**在**$(a,b)$**上单调；**

（2）$\exists x_0 \in (a,b)$**，使得**$f(x)$**在**$(a,x_0)$**上下降，在**$(x_0,b)$**上上升，且**$x_0$**为**$f(x)$**的最小值点。**

3.28 **设**$f(x) \in C[0,2a]$**而且**$f(0)=f(2a)$**。求证：**$\exists x \in [0,a]$**使得**$f(x)=f(x+a)$**。**

3.29 **设**$f(x)$**在**$[a,b]$**上连续，且取值为整数。求证：**$f(x)\equiv$**常数。**