第七章 重积分

本章主要讨论多元函数的积分学. 对多元函数来说, 积分区域是多样的. 就二元函数而言, 积分域可以是平面内的区域或平面内的曲线. 对三元函数来说, 积分域可以是空间的立体, 空间的曲线和曲面等. 通过以下各章的学习, 我们会发现这些积分定义中的思想是相同的, 但各种积分的计算则有较大的差别. 读者在多元积分学中应在掌握各种积分的定义的基础上, 熟练掌握各种积分的计算方法.

§6.1 重积分的定义

本节中我们主要详细介绍二重积分的定义, 读者不难利用本节的方法, 自己给出 n $(n \geq 3)$ 重积分相应的定义.

1.1 区域的面积

为了将定积分推广至二元函数在平面区域内的积分，首先必须解决平面区域的面积的定义问题.

回忆一下, 在初等数学中, 我们能求出多边形区域的面积. 在定积分中, 我们会求曲边梯形的面积. 设 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 并且对一切 $x \in [a,b]$ 有 $f(x) > 0$. 则由 $y = f(x)$, $x \in [a,b]$, x 轴, $x = a$ 及 $x = b$ 围成了一个曲边梯形 Q. 从定积分的定义我们可以看出, Q 的面积实际上是 Q 的所有外接多边形的面积的下确界，同时它也是 Q 的所有内接多边形的面积的上确界.

以上的讨论启发我们给出以下定义. 设 A 是一个多边形, 记 $m(A)$ 为 A 的面积.

定义 1: 设 E 是平面内的一个点集，记

$$\text{💣} = \{A \mid A\text{是多边形且}E \subset A\};$$
$$\text{❍} = \{B \mid B\text{是多边形且}B \subset E\}.$$

若 $\inf\limits_{A \in \text{💣}} m(A) = \sup\limits_{B \in \text{❍}} m(B)$, 则称 E 是可求面积的. 上式中的公共值称为 E 的面积, 记作 $m(E)$.

若一个区域 D 是由逐段光滑的曲线围成时, 则 D 是可求面积的. 事实上, 我们可以对 D 分成一些曲边梯形的并, 从而转化为定积分的问题.

另外, 设非负函数 $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ 是 $[a,b]$ 上一个不可积的函数. 记

$$E=\{(x,y)\,|\,0\le y\le f(x),a\le x\le b\},$$

则E是没有面积的. 因为$f(x)$在$[a,b]$上达布上和的下确界$=\inf\limits_{A\in \mathscr{A}} m(A)$，而达布下和的上确界$=\sup\limits_{B\in \mathscr{B}} m(B)$. 由$f(x)$的不可积我们推出

$$\inf_{A\in \mathscr{A}} m(A)>\sup_{B\in \mathscr{B}} m(B).$$

从而说明了E是不可求面积的.

从面积的定义中可以看出，一个区域D是有面积的充要条件是D的边界∂D是有面积的，并且$m(\partial D)=0$.

1.2 二重积分的定义

设D是平面内一个可求面积的有界闭区域，$z=f(x,y)$是D上的一个非负连续函数. 从几何上看，$z=f(x,y),(x,y)\in D$是空间的一块曲面. 它确定了一个以D为底的曲顶柱体V. 现在我们来求它的体积v.

我们下面利用定积分的思想. 我们首先用光滑曲线将D分成n个小块闭区域ΔD_1，$\Delta D_2,\cdots,\Delta D_n$，我们称给了$D$的一个分划. 由于$D$可求面积，从而每个$\Delta D_j\,(j=1,2,\cdots,n)$也可求面积，记它的面积为$\Delta s_j$. 从$D$的这个分划，我们得到了$n$个以$z=f(x,y)$，$(x,y)\in\Delta D_j$为顶，以$\Delta D_j$为底的曲顶柱体$V_j$. 在$\Delta D_j$上任取一点$(x_j,h_j)$，我们得到了$\Delta V_j$体积的一个近似值$f(x_j,h_j)\Delta s_j$. 由此我们得到$v$的一个近似值

$$v\approx\sum_{j=1}^{n} f(x_j,h_j)\Delta s_j.$$

记$l=\max\limits_{1\le j\le n}\{\Delta D_j\text{的直径}\}$，当$l\to 0$时若

$$\lim_{l\to 0}\sum_{j=1}^{n} f(x_j,h_j)\Delta s_j$$

存在，则我们便求出了V的体积.

由此我们有以下定义.

定义 2: 设D是平面内可求面积的闭区域，$z=f(x,y)$是定义在D上的函数. 用光滑曲线族将D作一分划$\Delta D_1,\cdots,\Delta D_j,\cdots,\Delta D_n$，记$\Delta D_j$的面积为$\Delta s_j$和

$$l = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \Delta D_j \text{的直径} \right\}.$$

在每个 ΔD_j 上任取一点 (x_j, h_j)，作和数

$$I = \sum_{j=1}^{n} f(x_j, h_j) \Delta s_j .$$

如果不管分划及 (x_j, h_j) 如何选取，当 $l \to 0$ 时 I 的极限存在，则称 $z = f(x, y)$ 在 D 上可积，并称此极限为 $f(x, y)$ 在 D 内的二重积分．记为

$$\iint_D f(x, y) dxdy \left(= \lim_{l \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x_j, h_j) \Delta s_j \right).$$

$f(x, y)$ 称为被积函数，D 称为积分区域．

用 $e - d$ 语言可以将以上定义更加精确化．称 $z = f(x, y), (x, y) \in D$ 在 D 上可积，若存在某定数 A，对任意的 $e > 0$，存在 $d > 0$，使得对 D 的任何分划 $\Delta D_1, \cdots, \Delta D_j, \cdots, \Delta D_n$，对任意的 $(x_j, h_j) \in D_j$，只要 $l = \max_{1 \le j \le n} \left\{ \Delta D_j \text{的直径} \right\} < d$ 时，就有

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(x_j, h_j) \Delta s_j - A \right| < e .$$

读者不难自己给出 $n\ (n \ge 3)$ 重积分的定义．

习题 1：叙述三重积分的定义．

§6.2 重积分的存在性与性质

在本节中我们先讨论重积分的存在性问题，然后再讨论重积分的一些基本性质．

2.1 重积分的存在性

我们这里只讨论二重积分．

设 D 是平面内具有面积的区域，$z = f(x, y)$ 是 D 上的一个函数．我们首先注意到：若 $f(x, y)$ 在 D 无界，则它在 D 的二重积分一定不存在．该事实的证明完全与定积分中相应性质的证明类似．因此我们下面总假定所论及的函数是有界的．

对 D 的任何一个分划 $\Delta D_1, \cdots, \Delta D_n$，相应地 $z = f(x, y)$ 在每个 ΔD_j 上有上确界 M_j，

下确界m_j，及振幅$w_j = M_j - m_j$. 从而我们得到了关于该分划的达布上和及下和

$$S(f,D)=\sum_{j=1}^{n} M_j \Delta s_j\,,$$

$$s(f,D)=\sum_{j=1}^{n} m_j \Delta s_j\,.$$

记$\overline{I} = \inf\ S(f,D)$, $\underline{I} = \sup s(f,D)$. 以上的上下确界是对$D$的所有分划取的, 则如同定积分中相应性质, 我们可得到以下的定理.

定理 1: 设D是平面内可求面积的区域, $z = f(x,y)$在D内有界. 则以下命题等价:

1） $z = f(x,y)$在D内可积.

2）$\forall e > 0$, $\exists d > 0$, 对D的任何分划$\Delta D_1, \cdots, \Delta D_n$, 只要$l(D) = \max\limits_{1 \le j \le n} \{\Delta D_j$的直径$\}$ $< d$, 就有

$$\overline{S}(f,D) - \underline{s}(f,D) = \sum w_j \Delta s_j < e\,.$$

3） $\forall e > 0$, $\exists$ D的分划$\Delta D_1, \cdots, \Delta D_n$, 使得

$$S(f,D) - s(f,D) < e\,.$$

4） $\overline{I} = \underline{I}$.

由此我们可以得到以下的结果.

定理 2: 设D是平面内可求面积的区域, $z = f(x,y)$在D连续. 则$z = f(x,y)$在D可积.

2.2 积分的性质

定理 3: 设D是平面内可求面积的闭区域, $z_1 = f(x,y), z_2 = g(x,y)$在$D$可积. 则以下结论成立:

1） 对任意的常数a,b, $af + bg$在D可积且

$$\iint_D (af + bg)dxdy = a\iint_D fdxdy + b\iint_D gdxdy\,.$$

2）在D上若$f(x,y) \le g(x,y)$, 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy \le \iint_D g(x,y)dxdy.$$

3）$|f(x,y)|$在D内可积且

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

4）积分第一中值定理：若$f(x,y)$在D内连续，则$\exists(x,h)\in D$，使得

$$\iint_D f(x,y)dxdy = f(x,h)m(D).$$

5）设D_1, D_2是可求面积的闭区域，且$D_1 \cup D_2 = D,\ D_1{}^\circ \cap D_2{}^\circ = \varnothing$．则$f$在$D$可积的充要条件是$f$在$D_1, D_2$可积，且

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy.$$

以上定理的证明可仿照定积分的证明给出，请读者自行补出.

§6.3 化重积分为累次积分

3.1 化二重积分为累次积分

在利用定积分计算旋转体的体积时，我们所用的方法是对垂直该直线的截面积进行积分的．从二重积分的几何意义，我们不难得到以下的计算方法.

定理 1: 设$f(x,y)$在矩形$D=[a,b]\times[c,d]$可积，并且对任意的$x\in[a,b]$，积分$I(x) = \int_c^d f(x,y)dy$存在．则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b I(x)dx = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy.$$

证明：对$[a,b]$及$[c,d]$分别作分划

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$
$$c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d.$$

由此我们得到小矩形$\Delta s_{ij} = [x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j],\ (i=1,2,\cdots,n,\ j=1,2,\cdots,m)$．记$f(x,y)$在$\Delta s_{ij}$上的上下确界分别为$M_{ij}$及$m_{ij}$，则对$\forall x_i \in [x_{i-1}, x_i]$，我们有

$$m_{ij}\Delta y_j \le \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x_i, y)dy \le M_{ij}\Delta y_j,$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \le \int_c^d f(x_i, y)dy = I(x_i) \le \sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j$$

及

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} m_{ij}\Delta y_j \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} I(x_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} M_{ij}\Delta y_j \Delta x_i .$$

注意到当 $\max\limits_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le m}}\{\Delta x_i, \Delta y_j\} \to 0$ 时，上面不等式的两端都趋向于 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$．而由定积分的定义知 $\sum\limits_{i=1}^{n} I(x_i)\Delta x_i$ 趋于 $\int_a^b I(x)dx$．定理得证.

显然，当 $z = f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 可积，且对任意的 $y\in[c,d]$， $I(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ 存在时，我们有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx .$$

特别地，当 $z = f(x,y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 连续时，我们有

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx .$$

下面我们进一步讨论夹在两条平行于坐标轴的直线之间的区域的二重积分的计算问题.

定理 2：设 $D=\{(x,y)\,|\, a\le x\le b, j_1(x)\le y\le j_2(x)\}$，其中 $j_1(x)$ 与 $j_2(x)$ 在 $[a,b]$ 连续. $f(x,y)$ 在 D 可积，且对任意的 $x\in[a,b]$， $I(x)=\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy$ 存在．则

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx\int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy .$$

证明：任取一矩形 $D_1=[a,b]\times[c,d]$，使得 $D\subset D_1$．定义

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y), & (x,y)\in D,\\ 0, & (x,y)\in D_1\setminus D.\end{cases}$$

由二重积分的性质知 $\tilde{f}(x,y)$ 在 D_1 可积，且对任意的 $x\in[a,b]$，

$$I_1(x)=\int_c^d f(x,y)dy = \left(\int_c^{j_1(x)} + \int_{j_1(x)}^{j_2(x)} + \int_{j_2(x)}^{d}\right) f(x,y)dy = I(x) .$$

由定理 1，我们有

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} \tilde{f}(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d \tilde{f}(x,y)dy$$

$$= \int_a^b dx \int_{j_1(x)}^{j_2(x)} f(x,y)dy.$$

定理证毕.

如果区域 $D = \{(x,y) \mid c \le y \le d, y_1(y) \le x \le y_2(y)\}$，其中 $y_1(y)$ 与 $y_2(y)$ 是 $[c,d]$ 上的连续函数. $f(x,y)$ 在 D 可积，且对任意的 $y \in [c,d]$，$I(y) = \int_{y_1(y)}^{y_2(y)} f(x,y)dx$ 存在. 则

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{y_1(y)}^{y_2(y)} f(x,y)dx.$$

若一个区域能分成若干个以上我们讨论过的区域，则二重积分的计算即可归结为定积分的计算.

例 1: 求 $\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,dxdy$，其中 D 是由 $y = 0, y = x$ 和 $x = 1$ 所围成的区域.

解：$\iint_D \sqrt{4x^2 - y^2}\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x \sqrt{4x^2 - y^2}\,dy$

$$= \int_0^1 \left[\frac{y}{2}\sqrt{4x^2 - y^2} + 2x^2 \arcsin \frac{y}{2x} \right]_{y=0}^{y=x} dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{p}{3} \right) x^2 dx = \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{p}{3} \right).$$

显然，以上积分也可以化为 $\int_0^1 dy \int_y^1 \sqrt{4x^2 - y^2}\,dx$. 但读者不难发现如果采取这种积分顺序，计算是十分复杂的. 由此可见，积分顺序的选取对积分的计算有很大的影响.

例 2: 求由 $z = xy,\ z = x + y,\ x + y = 1,\ x = 0,\ y = 0$ 所围立体的体积.

解：设 $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ \ 0 \le y \le 1 - x\}$，则此立体的体积可看为底为 D 的两个曲顶分别为 $z = x + y$ 及 $z = xy$ 的柱体的体积之差.

$$V = \iint_D [(x+y) - xy]dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} [(x+y) - xy]dy = \frac{4}{27}.$$

例 3: 用两种不同的顺序将二重积分 $I = \iint_D f(x,y)dxdy$ 化为累次积分，其中 D 是由 $y = 0,\ y = x^3,\ x + y = 2$ 所围.

解：如果先对 y 积分，则上限函数是分段函数，因此有

$$I=\int_0^1 dx\int_0^{x^3} f(x,y)dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x} f(x,y)dy$$
$$=\int_0^1 dy\int_{y^{\frac{1}{3}}}^{2-y} f(x,y)dx.$$

例 4：计算积分 $I=\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}}\frac{\sin y}{y}dy$.

解：由于 $\frac{\sin y}{y}$ 没有初等原函数，所以我们不能直接计算．设 D 是由 $y=x$ 和 $y=\sqrt{x}$ 在第一象限所围成的区域，则 I 是 $z=\frac{\sin y}{y}$ 在 D 的二重积分．从而我们有

$$I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}dx=\int_0^1\frac{\sin y}{y}(y-y^2)dy=1-\sin 1 .$$

由本题可知正确选择积分顺序的重要性.

3.2 化三重积分为累次积分

类似于二重积分的讨论，我们有以下三重积分的计算方法.

设空间闭区域 V 是由 xy 平面的可求面积的闭区域上定义的两块曲面所确定的，即

$$V=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in D,\ j_1(x,y)\le z\le j_2(x,y)\}.$$

其中 $j_1(x,y)$ 及 $j_2(x,y)$ 在 D 连续， $f(x,y,z)$ 在 V 可积，且对任意的 $(x,y)\in D$,

$$I(x,y)=\int_{j_1(x,y)}^{j_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$

存在．则

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\iint_D dxdy\int_{j_1(x,y)}^{j_2(x,y)} f(x,y,z)dz .$$

如果空间区域 V 是介于两个平面之间，即

$$V=\{(x,y,z)\,|\,c\le z\le d,\ (x,y)\in D(z)\},$$

其中 $D(z)$ 是平面 $z=z$ 与 V 的截面，且可求面积． $f(x,y,z)$ 在 V 可积，且固定 z 时在 $D(z)$ 二重可积，则

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz=\int_c^d dz\iint_{D(z)} f(x,y,z)dxdy .$$

例 1: 计算三重积分 $I = \iiint\limits_V (x+y+z)^2\, dxdydz$，**其中** $V: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\le 1$.

解：从积分区域的对称性及函数的奇偶性可以看出

$$\iiint\limits_V xydxdydz = \iiint\limits_V xzdxdydz = \iiint\limits_V yzdxdydz = 0,$$

所以

$$I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz.$$

我们先计算 $\iiint\limits_V x^2 dxdydz$. **注意到平面** $x = x$ **与** V **的截面** $D(x)$ **为**

$$\frac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}+\frac{z^2}{c^2\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)}\le 1,$$

这个椭圆的面积为 $pbc\left(1-\dfrac{x^2}{a^2}\right)$，**我们有**

$$\iiint\limits_V x^2 dxdydz = \int_{-a}^{a} x^2 dx \iint\limits_{D(x)} dydz$$

$$= \int_{-a}^{a} pbcx^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx = \frac{4}{15}pa^3bc.$$

类似地我们有

$$\iiint\limits_V y^2 dxdydz = \frac{4}{15}pab^3c$$

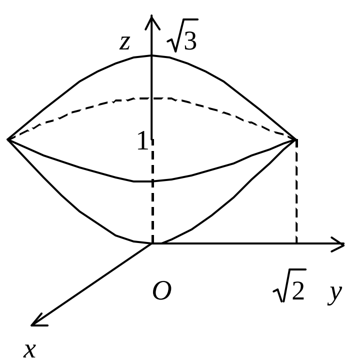
及

$$\iiint\limits_V y^2 dxdydz = \frac{4}{15}pabc^3.$$

所以

$$I = \frac{4}{15}pabc(a^2+b^2+c^2).$$

例 2: 计算重积分 $I = \iiint\limits_V (x+y+z)dxdydz$，**其中** V **是由曲面** $2z = x^2+y^2$ **与** $x^2+y^2+z^2=3$ **所围成的区域.**



解：如图，两曲面的交线为 $z=1$ **平面上的圆** $x^2+y^2=2$. **由对称性**

$$\iiint\limits_V xdxdydz = \iiint\limits_V ydxdydz = 0.$$

所以

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V z\,dx\,dy\,dz \\
&= \int_0^1 dz \iint\limits_{D(z)} z\,dx\,dy + \int_1^{\sqrt{3}} dz \iint\limits_{D(z)} z\,dx\,dy \\
&= \int_0^1 \pi z^2 dz + \int_1^{\sqrt{3}} \pi z(3-z^2)dz = \frac{5}{3}\pi .
\end{aligned}
$$

§6.4 重积分的变量替换

4.1 二重积分的变量替换

大家知道，变量替换在定积分计算中起着非常重要的作用．设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$x=\varphi(t)$ 在 $\alpha \le t \le \beta$ 连续可微、严格递增，且 $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b$，则我们有

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt . \tag{1}$$

我们当时是用 Newton-Lebnitz 公式给了上式的证明．由于二重积分没有相应的公式，因此我们必须用别的方法来推导二重积分的变量替换公式．为此我们对定积分的变量替换公式再给一个证明．

显然，在假定下（1）两边的积分是存在的．为此我们只要证明它们是相等的即可．

将 $[\alpha,\beta]$ 作分割 $\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_n=\beta$，相应地得到 $[a,b]$ 的一个分割

$$a=\varphi(t_0)<\varphi(t_1)<\cdots<\varphi(t_n)=b .$$

由于

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \varphi(t_i)-\varphi(t_{i-1}) = \varphi'(\xi_i)\Delta t_i ,$$

令 $\eta_i=\varphi(\xi_i)$，我们得到了等式

$$\sum_{i=1}^n f(\eta_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n f\big(\varphi(\xi_i)\big)\varphi'(\xi_i)\Delta t_i .$$

由 $\varphi(t)$ 的一致连续性，当 $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta t_i\}\to 0$ 时，有 $\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$．从而当 $\lambda\to 0$ 时即得到了（1）．

从这种证明的本质可以看出，所谓积分的变换无非是对函数乘上变换前后的区间长度的比例因子（即 $\varphi'(t)$）后在新区间的积分．根据这种思想，我们必须找出平面变换下面积变化的比例因子．

设 D 和 G 为逐段光滑的简单闭曲线所围成的区域，从而 D 和 G 均可求面积．再设

$$T:\quad \begin{cases} x=\varphi(u,v) \\ y=\psi(u,v) \end{cases} \qquad (u,v)\in D$$

是D到G的一个一一对应，且在D上有二阶连续偏导数．记

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial j}{\partial u} & \dfrac{\partial j}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

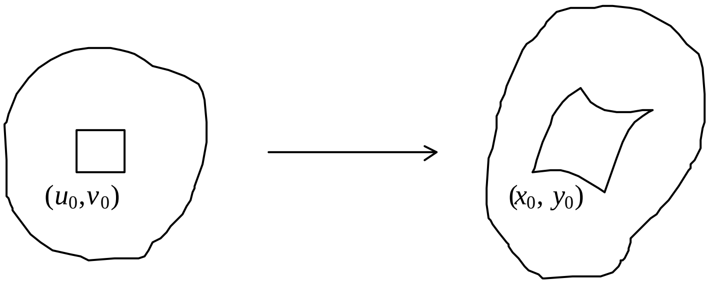
为T 的 Jacobi 行列式，再假定在D内$J(u,v)\neq 0$．我们有以下引理.

引理 1：在以上假定下，

$$m(G)=\iint_D |J(u,v)|dudv\,.$$

证明：设s 为D内的一闭正方形，左下顶点为(u_0,v_0)，边长为h，经T 映为G 内的一曲边四边形$T(s)$．我们先证明

$$m(T(s))=\iint_s |J(u,v)|dudv\,.$$



先设$J(u,v)>0$．记s 的边界为L，$T(s)$的边界为Γ，Γ可由四个参数方程写出．由定积分中求面积的方法我们有

$$m(T(s))=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx\,,$$

其中L的方向取正向．将每段的参数方程代入得

$$\begin{aligned}2m(T(s))=&\int_{u_0}^{u_0+h}\left[j\,(u,v_0)\frac{\partial y\,(u,v_0)}{\partial u}-y\,(u,v_0)\frac{\partial j\,(u,v_0)}{\partial u}\right]du\\
&+\int_{v_0}^{v_0+h}\left[j\,(u_0+h,v)\frac{\partial y\,(u_0+h,v)}{\partial v}-y\,(u_0+h,v)\frac{\partial j\,(u_0+h,v)}{\partial v}\right]dv\\
&+\int_{u_0+h}^{u_0}\left[j\,(u,v_0+h)\frac{\partial y\,(u,v_0+h)}{\partial u}-y\,(u,v_0+h)\frac{\partial j\,(u,v_0+h)}{\partial u}\right]du\\
&+\int_{v_0+h}^{v_0}\left[j\,(u_0,v)\frac{\partial y\,(u_0,v)}{\partial v}-y\,(u_0,v)\frac{\partial j\,(u_0,v)}{\partial v}\right]dv.\end{aligned}$$

对上面的八个积分两两配对并应用微积分基本定理，如

$$
-\int_{u_0}^{u_0+h}\left[j(u,v_0+h)\frac{\partial y(u,v_0+h)}{\partial u}-j(u,v_0)\frac{\partial y(u,v_0)}{\partial u}\right]du
$$
$$
=-\int_{u_0}^{u_0+h}du\int_{v_0}^{v_0+h}\left[\frac{\partial j(u,v)}{\partial v}\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}+j(u,v)\frac{\partial^2 y(u,v)}{\partial u\partial v}\right]dv
$$
$$
=-\iint_s\left[\frac{\partial j}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+j\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\right]dudv.
$$

对所余积分同样处理，得到

$$
2m(T(s))=-\iint_s\left[\frac{\partial j}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}+j\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\right]dudv+\iint_s\left[\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial j}{\partial u}+y\frac{\partial^2 j}{\partial u\partial v}\right]dudv
$$
$$
+\iint_s\left[\frac{\partial j}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+j\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}\right]dudv-\iint_s\left[\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial j}{\partial v}+y\frac{\partial^2 j}{\partial u\partial v}\right]dudv
$$
$$
=2\iint_s\left[\frac{\partial j}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial j}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right]dudv,
$$

即

$$
m(T(s))=\iint_s J(u,v)dudv.
$$

当 $J(u,v)<0$ **时，类似地我们有**

$$
m(T(s))=-\iint_s J(u,v)dudv.
$$

总之有

$$
m(T(s))=\iint_s |J(u,v)|dudv.
$$

由区域面积的定义，我们知 D **的面积是** D **内接多边形面积的上确界．因此我们可以用平行坐标轴的直线网，使得其间隔为** h **来对平面进行分划，从而得到一类特殊的内接多边形的逼近** D．**而这些内接多边形可分成有限多个正方形，利用上面所证结果，即可证明引理．**

从引理 1 **及积分中值定理可以看出**

$$
|J(u_0,v_0)|=\lim_{m(s)\to 0}\frac{m(T(s))}{m(s)}.
$$

即变换 T **的** Jacobi **的绝对值就是面积变化的比例系数，从而我们有以下定理．为了方便起见，以下所论及的区域总是由有限条分段光滑闭曲线所围的闭区域．**

定理 1：设变换

$$
T:\ \begin{cases} x=j(u,v) \\ y=y(u,v) \end{cases} \qquad (u,v)\in D
$$

将 D **一一地变为** G，**且** j，y **在** D **有连续的二阶偏导数，在** D **内** $J(u,v)=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$．**再**

设 $f(x,y)$ 在 G 连续，则

$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(j(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv .$$

证明：在定理的假设下以上等式两边的积分都存在．以下我们证明等号成立．为此我们对 D 用光滑曲线族作一分划 $\Delta D_1, \Delta D_2, \cdots, \Delta D_n$，经过变换 T 相应地得到 G 的一个分划 $\Delta G_1, \Delta G_2, \cdots, \Delta G_n$，其中 $\Delta G_i = T(\Delta D_i)$．由二重积分的中值定理及引理 1，在 ΔD_j 中存在 $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$，使得

$$m(\Delta G_i) = \left|J(\bar{u}_i, \bar{v}_i)\right| m(\Delta D_i) .$$

在 ΔG_i 中取 $(\bar{x}_i, \bar{y}_i) = (j(\bar{u}_i, \bar{v}_i), y(\bar{u}_i, \bar{v}_i))$，我们得到以下等式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i) m(\Delta G_i) = f(j(\bar{u}_i, \bar{v}_i), y(\bar{u}_i, \bar{v}_i))\left|J(\bar{u}_i, \bar{v}_i)\right| m(\Delta D_i) .$$

$l = \max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta D_i 的直径\}$，则 $\max\limits_{1 \le i \le n}\{\Delta G_i 的直径\} \to 0$，最后得到

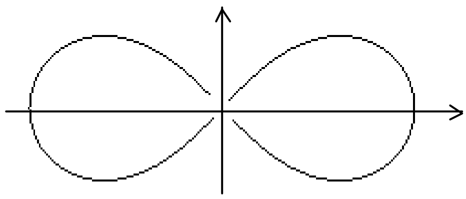
$$\iint\limits_G f(x,y)dxdy = \iint\limits_D f(j(u,v),y(u,v))\left|J(u,v)\right|dudv .$$

定理证完．

例 1：计算积分 $I = \iint\limits_D (x^2 + y^2)dxdy$，其中 D 是由双纽线

$$\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right) \ (x \ge 0)$$

围成的区域．



解：令 $x = r\cos q$，$y = r\sin q$，双纽线方程 $r = a\sqrt{\cos 2q}$ $\left(-\dfrac{p}{4} \le q \le \dfrac{p}{4}\right)$．由于区域和被积函数关于 x 对称，故

$$I = 2\int_0^{\frac{p}{4}} dq \int_0^{a\sqrt{\cos 2q}} r^2 \cdot rdr = \frac{a^4}{2}\int_0^{\frac{p}{4}} \cos^2 2q dq = \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 q dq = \frac{p}{8}a^4 .$$

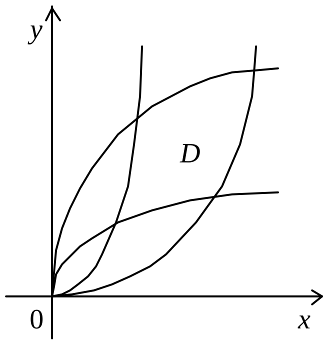
例 2：计算二重积分 $\iint\limits_D xydxdy$，其中 D 是抛物线

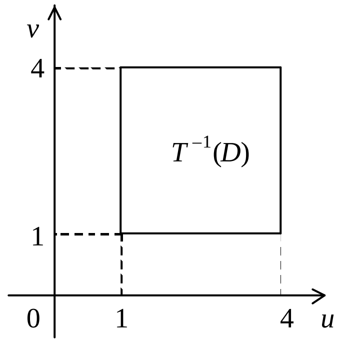
$$y^2 = x,\ y^2 = 4x,\ x^2 = y,\ x^2 = 4y$$

所围成的区域．

解：作变换 $T^{-1} : u = \dfrac{y^2}{x}$，$v = \dfrac{x^2}{y}$，则它将 D 一一地映为正方形区域

$$T^{-1}(D): 1 \le u \le 4, 1 \le v \le 4,$$





且 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -3$. 由于 $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \cdot \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = 1$, 所以 $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \dfrac{1}{3}$. 又

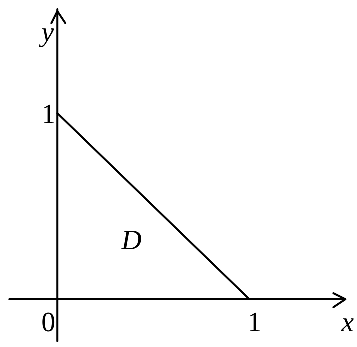
$$uv = \frac{y^2}{x} \cdot \frac{x^2}{y} = xy,$$

所以

$$\iint_D xydxdy = \iint_{T^{-1}(D)} uv\frac{1}{3}dudv = \frac{1}{3}\int_1^4 udu\int_1^4 vdv = \frac{75}{4}.$$

例 3: 计算二重积分

$$\iint_D \sqrt{\frac{xy}{x+y}}dxdy,$$



其中 D 是由抛物线 $x=0,\ y=0,\ x+y=1$ 所围成的区域.

解：作变换 $T: x = r\cos^2 q,\ y = r\sin^2 q$，它把区域 $G: 0 < q < \dfrac{p}{2},\ 0 < r < 1$ 一一地映为区域 $\Omega = D^{\circ}$.

$$J(r,q) = \begin{vmatrix} \cos^2 q & -2r\cos q\sin q \\ \sin^2 q & 2r\sin q\cos q \end{vmatrix} = 2r\sin q\cos q.$$

所以

$$\iint_D \sqrt{\frac{xy}{x+y}}dxdy = \iint_G r^{\frac{1}{2}} \cos q \sin q \cdot 2r \cos q \sin q dq dr$$

$$= 2\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^2 q \sin^2 q dq \cdot \int_0^1 r^{\frac{3}{2}} dr = \frac{2}{5} B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{2}{5} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{1}{20}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{20} \cdot \frac{p}{\sin\frac{p}{2}} = \frac{p}{20}.$$

又解：在变换 $x = r\cos^2 q$, $y = r\sin^2 q$ **中，若令** $u = r, v = \sin^2 q$ **，由此演化成变换** $T: x = u(1-v),\ y = uv$ **，它把区域** $G: 0 < u < 1,\ 0 < v < 1$ **一一地映为区域** $\Omega = D^\circ$.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 1-u & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u.$$

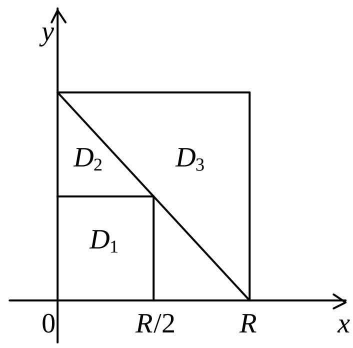
所以

$$\iint_D \sqrt{\frac{xy}{x+y}}dxdy = \iint_G \sqrt{(1-v)uv} \cdot ududv$$

$$= \int_0^1 u^{\frac{3}{2}} du \cdot \int_0^1 v^{\frac{1}{2}} (1-v)^{\frac{1}{2}} dr = \frac{2}{5} B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{p}{20}.$$

例 4: 证明 B **函数与** Γ **函数的联系公式**:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ (p > 0, q > 0).$$



证明：已知 $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ **有递推公式**

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p).$$

$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ **有递推公式**

$$\mathrm{B}(p+1,q+1) = \frac{pq}{(p+q+1)(p+q)}\mathrm{B}(p,q).$$

利用递推公式，只需对联系公式当 $p > 1, q > 1$ **证明即成．为此我们考虑第一象限上非负函数**

$$f(x,y) = x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)}.$$

和三个闭区域 $D_1: 0 \le x, y \le \frac{R}{2};\ D_2: x \ge 0, y \ge 0, x+y \le R;\ D_3: 0 \le x, y \le R$ **（如图）．由二重积分的几何意义，显然有**

$$\iint_{D_1} f(x,y)dxdy \le \iint_{D_2} f(x,y)dxdy \le \iint_{D_3} f(x,y)dxdy .$$

在 D_1, D_3 上的二重积分可化为两个定积分的积:

$$\iint_{D_1} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^{\frac{R}{2}} x^{p-1}e^{-x}dx\int_0^{\frac{R}{2}} y^{q-1}e^{-y}dy,$$

$$\iint_{D_3} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy = \int_0^{R} x^{p-1}e^{-x}dx\int_0^{R} y^{q-1}e^{-y}dy.$$

D_2 上的积分作变换 $T: x = u(1-v),\ y = uv,\ J = u$，所以

$$\begin{aligned}\iint_{D_2} x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy &= \int_0^1 dv\int_0^R u^{p+q-1}e^{-u}v^{q-1}(1-v)^{p-1}du \\ &= \int_0^1 v^{q-1}(1-v)^{p-1}dv\cdot\int_0^R u^{p+q-1}e^{-u}du \\ &= \mathrm{B}(p,q)\int_0^R u^{p+q-1}e^{-u}du.\end{aligned}$$

因此我们得到不等式

$$\int_0^{\frac{R}{2}} x^{p-1}e^{-x}dx\cdot\int_0^{\frac{R}{2}} y^{q-1}e^{-y}dy \le \mathrm{B}(p,q)\int_0^R u^{p+q-1}e^{-u}du \le \int_0^R x^{p-1}e^{-x}dx\cdot\int_0^R y^{q-1}e^{-y}dy.$$

上式中令 $R\to+\infty$，即得

$$\Gamma(p)\Gamma(q) \le \mathrm{B}(p,q)\Gamma(p+q) \le \Gamma(p)\Gamma(q),$$

或

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\ (p>1,\ q>1).$$

4.2 n 重积分的变量替换

设 U 是 $\mathbf{R}^n\,(n\ge 2)$ 中由分片光滑的边界围成的有界闭区域，映射

$$T: y_1 = f_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_n = f_n(x_1,\cdots,x_n)$$

将 U 一一对应地映到闭区域 $V\subset\mathbf{R}^n$，且 $y_1,\cdots,y_n$ 都具有连续的二阶偏导数，T 的 Jacobi 行列式不等于零. 我们有以下的定理.

定理 2: 设映射 T 及 U,V 均如上所设，$f(y_1,\cdots,y_n)$ 是 V 上的连续函数，则有

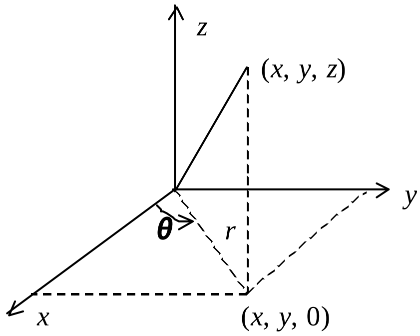
$$\underbrace{\int\cdots\int_V}_{n} f(y_1,\cdots,y_n)dy_1\cdots dy_n$$

$$= \underbrace{\int\cdots\int_U}_{n} f(y_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,y_n(x_1,\cdots,x_n))\left|\frac{\partial(y_1,\cdots,y_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}\right|dx_1\cdots dx_n .$$

这个定理的证明略去.

对三维空间的情形，我们有以下两种重要的变换.

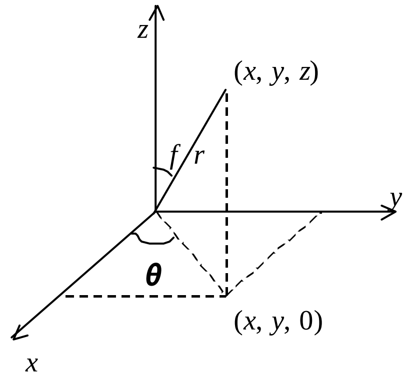
（1） 柱坐标变换



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases},$$

它的 Jacobi 行列式为 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = r$.

（2） 球坐标变换



$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases},$$

它的 Jacobi 行列式为 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = r^2\sin\varphi$.

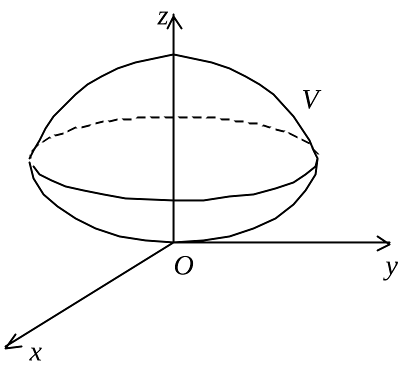
例 1：计算三重积分

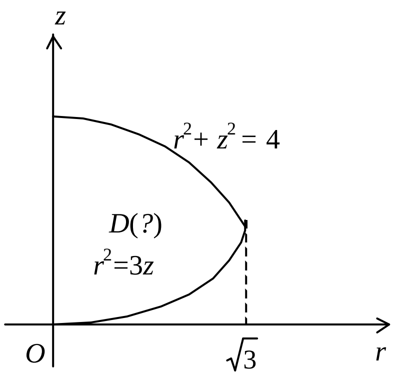
$$\iiint_V z\,dxdydz,$$

其中 V 是由球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 和抛物面 $x^2+y^2=3z$ 所围成的区域.

解：画出 V 和 $D(\theta)$ 的图形（如图），并将 V 的边界方程化为柱坐标中方程:

$$r^2+z^2=4,\ r^2=3z.$$





所以

$$\iiint\limits_V zdxdydz = \int_0^{2p} dq \iint\limits_{D(q)} zrdrdz$$
$$= \int_0^{2p} dq \int_0^{\sqrt{3}} dr \int_{\frac{r^2}{3}}^{\sqrt{4-r^2}} rzdz$$
$$= 2p \int_0^{\sqrt{3}} \frac{r}{2}\left(4 - r^2 - \frac{r^4}{9}\right) dr = \frac{13}{4}p.$$

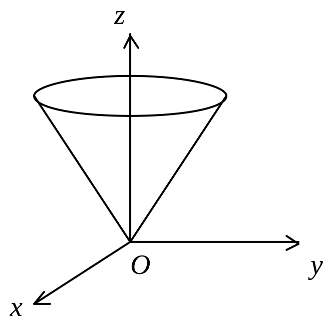
例 2: 计算三重积分

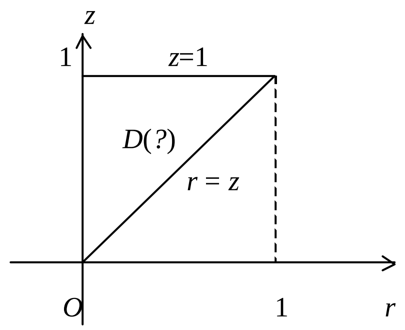
$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz,$$

其中V **是由锥面** $x^2 + y^2 = z^2$ **和平面** $z = 1$ **围成.**

解：画出V **和** $D(q)$ **的图形（如图），并将**V **的边界方程化为柱坐标中方程:**

$$r = z,\ \ z = 1.$$





所以

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz = \int_0^{2p} dq \iint\limits_{D(q)} r \cdot rdrdz$$
$$= 2p \int_0^1 dz \int_0^z r^2 dr = 2p \int_0^1 \frac{z^3}{3} dz = \frac{p}{6}.$$

又解：用$z = z$ **平面去截**V **，得平面区域**$D(z)$ **，**V **在** z **轴上的投影为**$[0,1]$ **，所以**

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz = \int_0^1 dz \iint\limits_{D(z)} \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$
$$= \int_0^1 dz \int_0^{2p} dq \int_0^z r^2 dr = \frac{p}{6}.$$

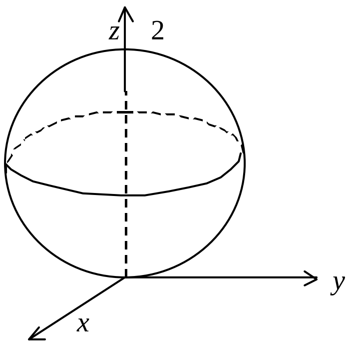
例 3: 计算三重积分

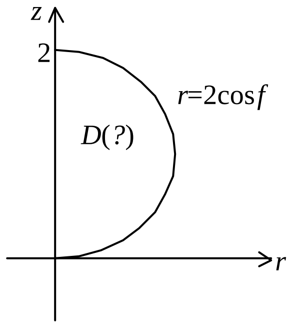
$$\iiint\limits_V (x^2 + y^2 + z^2) dxdydz,$$

其中V **是由球面** $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ **围成的区域.**

解：画出V 和 $D(\theta)$ 的图形（如图），并将V 的边界方程化为球坐标下的方程:

$$\rho = 2\cos\varphi .$$





所以

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \iint_{D(\theta)} \rho^2 \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\rho$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^4 \sin\varphi \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{32}{5} \cos^5\varphi \sin\varphi \, d\varphi = \frac{32}{15}\pi .$$

例 4: 计算三重积分

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz ,$$

其中$V : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \le 1$.

解：作广义球坐标变换:

$$T : \begin{cases} x = a\rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = b\rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = c\rho\cos\varphi \end{cases} .$$

变换T **的** Jacobi **行列式为** $J(\rho,\varphi,\theta) = abc\rho^2\sin\varphi$. **所以**

$$\iiint_V (x^2+y^2+z^2)dxdydz$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 (a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + c^2\cos^2\varphi) abc\rho^4 \sin\varphi \, d\rho$$

$$= \frac{2}{5} abc \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + b^2\sin^2\varphi\sin^2\theta + c^2\cos^2\varphi) \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \frac{2}{15} abc \int_0^{2\pi} (2a^2\cos^2\theta + 2b^2\sin^2\theta + c^2) d\theta$$

$$= \frac{4}{15} abc (a^2+b^2+c^2)\pi .$$

例 5: 计算n维空间中半径为R的超球

$$\Omega : x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \le R^2$$

的体积.

解：类似于三维的球坐标变换, 我们引入n维球坐标变换:

$$\begin{cases} x_1 = r\cos q_1 \\ x_2 = r\sin q_1 \cos q_2 \\ x_3 = r\sin q_1 \sin q_2 \cos q_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-1} = r\sin q_1 \sin q_2 \cdots \cos q_{n-1} \\ x_n = r\sin q_1 \sin q_2 \cdots \sin q_{n-1}. \end{cases}$$

$(0 < r < +\infty,\ 0 < q_1, q_2, \cdots, q_{n-2} < p$，$0 < q_{n-1} < 2p$. 由归纳法可证

$$\left|\frac{\partial(x_1,\cdots,x_n)}{\partial(r,q_1,\cdots,q_{n-1})}\right| = r^{n-1}\sin^{n-2} q_1 \sin^{n-3} q_2 \cdots \sin q_{n-2}.$$

现设Ω的体积为V_n，则

$$\begin{aligned} V_n &= \int\cdots\int_{\Omega} 1\,dx_1\cdots dx_n \\ &= \int_0^{2p} dq_{n-1}\int_0^p dq_{n-2}\cdots\int_0^p dq_1\int_0^R r^{n-1}\sin^{n-2}q_1\sin^{n-3}q_2\cdots\sin q_{n-2}\,dr \\ &= \frac{2p}{n}R^n\int_0^p \sin^{n-2}q_1\,dq_1\int_0^p \sin^{n-3}q_2\,dq_2\cdots\int_0^p \sin q_{n-2}\,dq_{n-2} \\ &= \frac{2p}{n}R^n B\left(\frac{1}{2},\frac{n-1}{2}\right)B\left(\frac{1}{2},\frac{n-2}{2}\right)\cdots B\left(\frac{1}{2},1\right) \\ &= \frac{2p}{n}R^n \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}\cdots\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} \\ &= \frac{2p}{n}R^n\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{n-2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{p^{\frac{n}{2}}}{\frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}R^n = \frac{p^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}R^n. \end{aligned}$$

习题

1．试求$\mathbf{R}^2$中点集

$$E = \{(x,y)\,|\,0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1,\ x\text{与}y\text{至少有一无理数}\}$$

的内容积和外容积. 问E是不是可求面积?

2．在$\mathbf{R}^2$的区域$D=\{(x,y)\,\big|\,|x|\le 1,\ |y|\le 1\}$上给定一函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当}x,y\text{都是有理数;}\\ 0, & \text{当}x,y\text{至少有一个是无理数}\end{cases}$$

问$f(x,y)$是否在D可积?

3．设Ω和S是$\mathbf{R}^3$中的可测图形,

$$f(x,y,z)=\begin{cases}1, & (x,y,z)\in S;\\ 0, & (x,y,z)\in \Omega\setminus S.\end{cases}$$

问$f(x,y,z)$是否在Ω上可积?

4．设$f:A\subset\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^1$在$A$有界、可积. 又设$B\subset A$为一可测图形, 证明$f$的限制$f\big|_B$在$B$可积.

5．设$\mathbf{R}^m$中的开区域Ω是可测图形, $f:\overline{\Omega}\to\mathbf{R}^1$, f在$\overline{\Omega}$上连续. 如果对于任一可测图形$B\subset\Omega$, 都有$\int_B f dV>0$. 证明$f(x)\equiv 0, x\in\overline{\Omega}$.

6．设$\mathbf{R}^m$中的开区域Ω是一可测图形, f在$\overline{\Omega}$上连续. 如果对任何一个在$\overline{\Omega}$上连续而且在$\partial\Omega$上之值为零的函数$h(x)$, 都有$\iint\limits_{\Omega} fh dV=0$, 则$f(x)$在$\overline{\Omega}$上恒为零. 如果去掉$\Omega$为开区域的条件, 结论是否仍正确?

7． 设一元函数$f(x)$在$[a,b]$可积, $g(y)$在$[c,d]$可积. 证明: 二元函数$F(x,y)=f(x)g(y)$在$D=[a,b]\times[c,d]$上可积, 而且

$$\iint\limits_D F(x,y)dxdy=\int_a^b f(x)dx\int_c^d g(y)dy\,.$$

8．设$\Omega=[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]$, f在Ω上连续. 定义$\Omega_x=[a_1,x_1]\times\cdots\times[a_n,x_n]$, 其中$x_i\in[a_i,b_i]$. 令

$$F(x_1,\cdots,x_n)=\iint\limits_{\Omega_x} f dV\,.$$

证明$F(x_1,\cdots,x_n)$在Ω°有连续一阶偏导数, 并求出$\dfrac{\partial F}{\partial x_i}\ (i=1,\cdots,n)$.

9． 设在$D=[a,b]\times[c,d]$上定义的二元函数$f(x,y)$有二阶连续偏导数.

（1）证明$\iint\limits_D f''_{xy}(x,y)dxdy=\iint\limits_D f''_{yx}(x,y)dxdy$;

（2）利用（1）证明$f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y),\quad (x,y)\in D$.

10． 设一元函数$f(x)$在$[a,b]$上可积. 在$D=[a,b]\times[a,b]$上定义

$$F(x,y)=\left[f(x)-f(y)\right]^2.$$

（1）将重积分$\iint\limits_D F(x,y)dxdy$化为累次积分;

（2）证明$\left(\int_a^b f(x)dx\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)dx$.

11． 对下列区域依两种不同顺序将二重积分$\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy$化为累次积分:

（1）Ω是以$A_1(a_1,b_1),A_2(a_2,b_2)$和$A_3(a_3,b_3)(a_1<a_2,b_1<b_2)$为顶点的三角形;

（2）Ω是圆域$(x-a)^2+(y-b)^2\le R^2$;

（3）Ω是环域$R_1^2\le(x-a)^2+(y-b)^2\le R_2^2\ (R_2>R_1)$;

（4）Ω是由$y=x^3,\ y=2x^3,\ y=1$和$y=2$围成的区域.

12． 在下列积分中改变积分的顺序:

（1）$\int_1^e dx\int_0^{\ln x}f(x,y)dy$;

（2）$\int_0^2 dy\int_{y^2}^{3y}f(x,y)dx$;

（3）$\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$;

（4）$\int_1^2 dx\int_{2-x}^{\sqrt{2x-a}}f(x,y)dy\quad(0<a<1)$.

13． 设一元函数$g(x)$在$[0,1]$可积. 证明:

$$\int_0^1 dx\int_x^1 g(t)dt=\int_0^1 tg(t)dt.$$

14． 计算下列二重积分:

（1）Ω是由$y^2=2px(p>0),\ x=\dfrac{p}{2}$围成的区域，计算

$$\iint\limits_\Omega x^m y^k dxdy\ (m,k>0);$$

（2）Ω由$y=0,\ y=\sin(x^2),\ x=0$和$x=\sqrt{p}$围成计算

$$\iint_{\Omega} x dxdy;$$

（3） $\Omega=\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y^{2}, 0 \leq y \leq 2+x, x \leq 2\}$，**计算**

$$\iint_{\Omega} x^{2} y^{2} dxdy;$$

（4） Ω **由** $y=e^{x}, y=1, x=0$ **及** $x=1$ **围成，计算**

$$\iint_{\Omega}(x+y) dxdy;$$

（5） Ω **由** $y=x^{2}, y=4x$ **及** $y=4$ **围成，计算**

$$\iint_{\Omega}(\sin nx) dxdy.$$

15． **计算下列三重积分**:

（1） Ω **由曲面** $x^{2}+y^{2}+z^{2}=1, x=0, y=0, z=0$ **围成的位于第一卦限的有界区域，计算**

$$\iiint_{\Omega} x^{3} yz dxdydz;$$

（2） Ω **由曲面** $z=x^{2}+y^{2}, z=1, z=2$ **围成，计算**

$$\iiint_{\Omega} z dxdydz;$$

（3） Ω **由** $z=16(x^{2}+y^{2}), z=4(x^{2}+y^{2}), z=64$ **围成，计算**

$$\iiint_{\Omega}(x^{2}+y^{2}) dxdydz.$$

16． **改变下列三重积分化为累次积分的顺序**:

（1） $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^{2}}}^{\sqrt{1-x^{2}}} dy \int_{\sqrt{x^{2}+y^{2}}}^{1} f(x, y, z) dz;$

（2） $\int_{-b}^{b} dz \int_{-\frac{b}{a}\sqrt{b^{2}-z^{2}}}^{\frac{b}{a}\sqrt{b^{2}-z^{2}}} dy \int_{0}^{\frac{y^{2}}{a^{2}}+\frac{z^{2}}{b^{2}}} f(x, y, z) dx;$

（3） $\int_{-a}^{a} dx \int_{-\frac{c}{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}}^{\frac{c}{a}\sqrt{a^{2}-x^{2}}} dz \int_{0}^{b\sqrt{1-\frac{x^{2}}{a^{2}}-\frac{z^{2}}{c^{2}}}} f(x, y, z) dy.$

17． **求下列立体** Ω **的体积**:

（1） Ω **由曲面** $z=xy, x+y+z=1$ **和** $z=a\ (a>0)$ **围成**;

（2） Ω **由曲面** $z=\cos x \cos y,\ z=0, |x+y| \leq \frac{p}{2}$ **和** $|x-y| \leq \frac{p}{2}$ **围成**.

18． **设** $f(t)$ **在** $t \geq 0$ **连续可微，而且** $\int_{1}^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ **收敛. 证明: 当** $a>0, b>0$ **时，有**

(1) $\lim\limits_{T\to+\infty}\int_0^T dx\int_b^a f'(xy)dy = f(0)\ln\dfrac{b}{a}$;

(2) $\int_0^{+\infty}\dfrac{f(ax)-f(bx)}{x}dx = f(0)\ln\dfrac{b}{a}$.

19. **已知变换**$T: u=e^x\cos y, v=e^x\sin y$.

(1) **设** $D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 4p\}$，**求**$T(D)$.

(2) **计算** $\iint\limits_D |\det DT(x,y)|dxdy$ **和** $\iint\limits_{T(D)} dudv$，**问两者是否相等**?

(3) **证明** $\det DT(x,y)$ **在** $\mathbf{R}^2$ **为正**. **(2) 的结论说明了什么问题**.

20. **作极坐标变换，计算下列积分**:

(1) Ω **由双纽线** $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ $(x\ge 0)$ **围成**，$\iint\limits_\Omega (x^2+y^2)dxdy$;

(2) Ω **由阿基米德螺线** $r=q$ **和半射线** $q=p$ **围成**，$\iint\limits_\Omega xdxdy$;

(3) Ω **由对数螺线** $r=e^q$ **和半射线** $q=0, q=\dfrac{p}{2}$ **围成**，$\iint\limits_\Omega xydxdy$.

21. **在下列积分中，作极坐标变换，并用两种不同的顺序化为对** r **和** q **的累次积分**:

$$\iint\limits_\Omega f(x,y)dxdy.$$

(1) $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$;

(2) Ω **由** $x^2+y^2=1, y\ge 0$ **和** $y=1-x$ **围成**.

22. **作极坐标变换，将下列二重积分化为一重积分**:

(1) $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$;

(2) $\iint\limits_\Omega f\left(\dfrac{y}{x}\right)dxdy$，**其中** $\Omega=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4x+2y-4\}$.

23. **利用二重积分，作极坐标变换，求由下列曲面围成立体的体积**:

(1) $x^2+y^2+z^2=a^2, x^2+y^2\le |x|a \quad (a>0)$;

(2) $x^2+y^2-z=0, (x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2), z=0$.

24. **利用二重积分求下列曲面围成立体的体积**:

(1) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z}{c}, \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}, z=0$;

(2) $z^2=xy, x+y=a, x+y=b, \quad (0<a<b)$;

（3）$\left(\frac{x}{a}\right)^n+\left(\frac{y}{b}\right)^n+\left(\frac{z}{c}\right)^n=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0\ (n>0)$.

以上各题中的a,b**和**c**均为正数**.

25． **作适当的变量替换，求下列积分**:

（1）Ω**由**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$**围成**，$\iint\limits_{\Omega}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$;

（2）Ω**是由**$x^4+y^4=1$**围成的区域**，$\iint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)dxdy$;

（3）Ω**由**$a^2x^2+b^2y^2=1$**围成**，$\iint\limits_{\Omega}\left|\frac{ax+by}{\sqrt{2}}-a^2x^2-b^2y^2\right|dxdy$.

以上各题中a,b**均为正数**.

26． **作柱坐标变换计算下列积分**:

（1）Ω**由曲面**$z=x^2+y^2,\ z=4,\ z=16$**围成**，$\iiint\limits_{\Omega}\left(x^2+y^2\right)^2dxdydz$;

（2）Ω**由曲面**$x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ z^2=x^2+y^2,\ z\ge 0$**围成**，

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3dxdydz.$$

27． **作球坐标变换计算下列积分**:

（1）$\Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2$，$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)dxdydz$;

（2）Ω**由**$x^2+y^2+z^2=2z$**围成**，$\iiint\limits_{\Omega}\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5dxdydz$.

28． **作适当变量替换，求下列三重积分**:

（1）Ω**由**$z=\frac{x^2+y^2}{a},\ z=\frac{x^2+y^2}{b},\ xy=c,\ xy=d,\ y=ax,\ y=bx$**围成的立体（其中**

$0<a<b,\ 0<c<d,\ 0<a<b$**）**，$\iiint\limits_{\Omega}x^2y^2zdxdydz$;

（2）Ω**由**$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$**围成**，$\iiint\limits_{\Omega}e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}dxdydz$.

29． **设一元函数**$f(t)\in C^{(1)}(0,+\infty)$，**令**

$$\Omega_t = \left\{ (x,y,z) \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le t^2 \right. \right\},$$

$$F(t) = \iiint\limits_{\Omega_t} f\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dxdydz.$$

（1）**证明** $F(t) \in C^{(1)}(0,+\infty)$；

（2）**求出** $F'(t)$ **的表达式**.